UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
Domaine Sciences et Technologies — Année universitaire 2023-2024
Mention Mathématiques et Informatique — Semestre 1

TD Analyse, Série N° 1

Exercice 1. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que
1) Si $A \cup B \cup C = (A \backslash B) \cup (B \backslash C) \cup (C \backslash A)$, alors $A \cap B \cap C = \emptyset$.
2) Si $A \subset B$, alors $A \cap B = A$ et $A \cup B = B$.
3) Si $A \cap B = \emptyset$ et $A \cap C = \emptyset$, alors $A \cap (B \cup C) = \emptyset$.

Exercice 2. Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E. Démontrer que
1) $A \backslash B = \bar{B} \backslash \bar{A}$.
2) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$ et $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$
3) $(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$.

Exercice 3. Les ensembles suivants sont dans chaque cas un intervalle de $\mathbb{R}$. Déterminer ces intervalles.
$A = \{x \in \mathbb{R} \mid \exists n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1\}$, $\qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1\}$

Exercice 4. Soient m et n deux entiers naturels tels que $m \neq 0$ et $n \geqslant 2$. Démontrer que
1) Si $m^n - 1$ est premier, alors $m = 2$ et n est premier.
2) Si $m^n + 1$ est premier avec $m \geqslant 2$, alors n est pair.
3) Si $m^n + 1$ est premier avec $m \geqslant 2$, alors m est pair et n est une puissance de 2.

Exercice 5. Soient x, y, z et t des réels vérifiant $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = xy + yz + zt + tx$. Montrer que $x = y = z = t$.

Exercice 6.
1) Démontrer que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel.
2) Montrer qu'il existe un couple $(a, b) \in (\mathbb{R}_+ \backslash \mathbb{Q})^2$ tel que $a^b \in \mathbb{Q}$.

Exercice 7.
1) Soient $p_1, p_2, \ldots, p_r$ r nombres premiers. Démontrer par contraposition que pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, p_i ne divise pas l'entier $N = p_1 p_2 \ldots p_r + 1$.
2) En utilisant la question 1), démontrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 8. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \{1, \ldots, n\}$.
1) Démontrer que $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.
2) Démontrer la formule suivante (binôme de Newton) : $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.
3) En déduire que $\sqrt[n]{n} < 1 + \sqrt{\frac{2}{n}}$.
4) Démontrer que si les réels $c_k > -1$ ont le même signe, alors $\prod_{k=1}^{n}(1 + c_k) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{n} c_k$. En déduire qu'on a l'inégalité de Bernoulli : $(1+a)^n \geqslant 1 + na$, pour $1 + a > 0$.

Exercice 9.
1) Montrer que pour tous x et y réels, on a $\mid xy \mid \leqslant \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant 1), démontrer par récurrence sur n que pour tous réels $a_1, \ldots, a_n$ et tous réels $b_1, \ldots, b_n$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \mid a_k b_k \mid \leqslant \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \sum_{k=1}^{n} b_k^2\right).$$

3) En déduire l'inégalité suivante : pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$;

$$\sum_{k=1}^{n} \mid a_k b_k \mid \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} \times \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

4) Déduire de 3) que quels que soient l'entier $n \geqslant 1$ et les réels $a_1, \ldots, a_n$, on a $\sum_{k=1}^{n} \mid a_k \mid \leqslant \sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$.

5) Déduire de 4) que pour tous réels $x,\ y,\ z$ strictement positifs,

$$\sqrt{\frac{x+y}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{y+z}{x+y+z}} + \sqrt{\frac{z+x}{x+y+z}} \leqslant \sqrt{6}.$$

Exercice 10.
On note respectivement A_n, G_n et H_n les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des n nombres réels strictement positifs $a_1, a_2, \ldots, a_n$, soit
$A_n = \dfrac{a_1 + \ a_2 + \cdots + a_n}{n}$, $G_n = (a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n)^{\frac{1}{n}}$, $H_n = \dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$.
1) Démontrer que si $G_n \leqslant A_n$, alors $H_n \leqslant G_n$.
2) Démontrer que si $a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n = 1$, alors $(1 + a_1)(1 + a_2)(1 + a_3) \ldots (1 + a_n) \geqslant 2^n$.

Exercice 11. Soit A une partie non vide de $\mathbb{Z}$.
Démontrer que si A est majorée, alors elle admet un plus grand élément.

Exercice 12. Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$.
1) Montrer que si $A \subset B$, alors $\sup(A) \leqslant \sup(B)$.
2) Montrer que $A \cup B$ est majorée et $\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$.
3) Montrer que $A \cup B$ est minorée et $\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$.
4) On pose $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Montrer que
   a) $A + B$ est majorée et on a $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$,
   b) $A + B$ est minorée et on a $\inf(A + B) = \inf(A) + \inf(B)$.

Exercice 13. Soit $E = \{r^2 \mid r \in \mathbb{Q}\}$, on pose $-E = \{-r^2 \mid r \in \mathbb{Q}\}$. Montrer que $E \cup (-E)$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 14. Montrer que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 15. Etudier le minimum, le maximum, la borne inférieure et la borne supérieure des ensembles suivants :
$A = \{1 + \frac{x+2}{x+1} \mid x \in \mathbb{R}_+\}$, $B = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leqslant 3\}$, $C = [-2; 2[\cap(\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})$, $D = \{\frac{m}{n} + \frac{4n}{m} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$,
$E = \{\frac{m}{n+m} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$.

Exercice 16. Soient a et b des réels strictement positifs avec $a \leqslant b$ et $m, n \in \mathbb{N}^*$.
On pose $\alpha_{mn} = \frac{1}{ma} + \frac{1}{nb}$ et $A = \{\alpha_{mn} \mid m, n \in \mathbb{N}^*\}$.
1) Montrer que A admet un plus grand élément et qu'il est minoré.
2) Démontrer, en utilisant la propriété "$\mathbb{R}$ est archimédien" que A admet 0 pour borne inférieure.
3) Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, les réels $\frac{1}{ka}$ et $\frac{1}{kb}$ sont des points d'accumulations de A.

Pour les exercices 17, 18, 19, $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 17. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Considérons l'ensemble $A = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \leqslant x\}$.
1) Démontrer que $\sup(A)$ existe et vérifier que $\sup(A) = E(x)$.
2) En utilisant 1), montrer que si $x \leqslant y$, alors $E(x) \leqslant E(y)$.
3) Démontrer que $E(x) + E(y) \leqslant E(x + y) \leqslant E(x) + E(y) + 1$.
4) Démontrer, en utilisant 3) que $nE(x) \leqslant E(nx) \leqslant nE(x) + n - 1$.
5) Prouver l'égalité $E(\frac{E(nx)}{n}) = E(x)$.

Exercice 18. 1) Démontrer le Lemme suivant : "Pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{Z}$, on a $E(a + b) = E(a) + b$".
2) Étant donné un entier naturel n, démontrer que $E\left((2 + \sqrt{3})^n\right)$ est impair.

Exercice 19. Résoudre dans $\mathbb{R}$, $E(2x + 1) = E(4 + x)$.