MI-Université d'Antananarivo
TD d'Algèbre I- Logique et Raisonnement - Année 2024

Exercice 1. Logique

1. Vérifier à partir de la table de vérité que pour toutes assertions P, Q et R, on a:

   i). $[P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)] \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \Rightarrow R)$;

   ii). $(P \Rightarrow Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \Rightarrow R)$;

   iii). $[(P \vee Q) \Rightarrow R] \Leftrightarrow ((P \Rightarrow R) \wedge (Q \Rightarrow R))$;

   iv). Un connecteur binaire noté par, $\triangleleft$, est dit associatif si, pour toutes assertions P, Q et R de la théorie donnée, on a la proposition:

   $$((P \triangleleft Q) \triangleleft R) \Leftrightarrow (P \triangleleft (Q \triangleleft R)).$$

   Vérifier, à partir d'une table de vérité, la non-associativité du connecteur d'implication et l'associativité du connecteur d'équivalence.

   - Chercher l'expression de $(P \Rightarrow (Q \Rightarrow \neg R))$ en fonction des seuls connecteurs $\neg$ et $\vee$.

Exercice 2. Raisonnement par récurrence:

1. Soit S un ensemble d'entiers naturels qui satisfait les deux conditions suivantes:

   i). 0 appartient à S;

   ii). Si n est un entier naturel tel que $1, 2, \ldots, n$ appartiennent à S, alors $n+1$ est aussi un élément de S.

   Montrer que $S = \mathbb{N}$.

2. Soient n_0 un entier naturel et $\{P_{n_0+n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ une famille de propositions qui satisfait les deux conditions suivantes:

   i). P_{n_0} est vraie;

   ii). Si pour $n \geq n_0$ la proposition P_n est vraie, alors la proposition P_{n+1} est aussi vraie.

   Montrer que pour tout $n \geq n_0$, la proposition P_n est vraie.

3. Soient $n \in \mathbb{N}^\star, a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Montrer que:

   a). $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$.

   b). [Binôme de Newton]$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$.

4. Soit p un nombre premier. Montrer que pour tout entier a, le nombre premier p divise $a^p - a$.

5. Montrer que tout entier supérieur ou égal à 2 est un produit des nombres premiers. En particulier, tout entier ≥ 2 admet un diviseur premier.

Exercice 3. Raisonnement par l'absurde: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \Rightarrow \textbf{Faux})$

1. Soient x et y deux nombres rationnels tels que $\sqrt{x}$ et $\sqrt{y}$ soient irrationnels. Montrer que $\sqrt{x}+\sqrt{y}$ est irrationnel.
2. Monter que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. En déduire qu'il existe deux nombres irrationnels a et b tels que a^b est rationnel.
3. Soit q un nombre rationnel sans facteur carré. Montrer que $\sqrt[n]{q}$ est irrationnel où n est un entier supérieur ou égal à 2.
4. Soit n un nombre composé (non premier). Montrer que n possède un diviseur premier p tel que $p^2 \leq n$.
5. Montrer qu'il existe un infinité de nombres premiers.

Exercice 4. Raisonnement par contraposée: $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$

1. Montrer que si n est un entier dont le carré est pair, alors n est pair.
2. Soit n un entier naturel. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, le nombre n est aussi premier. Montrer que la réciproque est fausse.
3. Montrer que si $2^n + 1$ est premier, alors n est un puissance de 2.
4. Soit n un entier. Montrer que si 8 ne divise pas $n^2 - 1$, l'entier n est pair.

Exercice 5. Raisonnement par disjonction de cas:

Montrer que, pour tout entier naturel n, le nombre $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ est un entier.

Exercice 6. $(P \Rightarrow Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge \neg Q \Rightarrow R)$

Soit p un nombre entier. Montrer que p est premier si et seulement si pour tout nombre entier a et b tels que p divise ab, on a: p divise a ou p divise b.

Problème 1.
Le but de ce problème est de démontrer le théorème de la division euclidienne qui suit:
Soient a et b deux entiers tels que $b \neq 0$. Il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que:

$$a = bq + r \quad ; 0 \leq r \leq |b| - 1.$$

Considérons l'ensemble

$$A := \{a - bk | k \in \mathbb{Z}\} \cap \mathbb{N}.$$

1. Montrer que toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
2. En déduire que A admet un plus petit élément qu'on notera par r et qu'il existe un entier q tel que $a = bq + r$.

3. Montrer qu'on a: $0 \leq r \leq |b| - 1$.

4. Montrer l'unicité du couple (q, r) puis conclure.

Problème 2.
Le but de ce problème est de démontrer le théorème fondamental de l'arithmétique:
Soit N un entier non nul. L'entier N peut s'écrire de manière unique sous la forme:

$$N = \epsilon \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$$

où les p_i sont des nombres premiers et les e_i sont des entiers naturels avec $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$.
On rappelle qu'un nombre $p \geq 2$ est premier si les seuls diviseurs positifs possibles de p sont 1 et p.

1. Soit p un nombre entier. Montrer que p est premier si et seulement si p n'est pas le produit de deux entiers plus grands que 1.

2. Supposons que $N \geq 2$. Montrer que N est un produit de nombres premiers.En particulier, N admet un diviseur premier.

3. Montrer l'unicité de l'écriture.

4. Conclure.