<u>Mention</u> : Physique et Applications

<u>Parcours</u>: PC/MI **<u>GRADE</u>: LICENCE Semestre1** **Année: 2023-2024**

Série N°2

Exercice 1

Soit O l'origine du repère orthonormé et M un point quelconque.

1) Dans un repère cartésien, le point M a pour coordonnées (x,y,z).

Déterminer en fonction de x, y, z ses coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (*r, ϑ, φ*).

Application numérique : M $(2, 2\sqrt{3}, 4)$

2) On fait tourner le système d'axes, d'un angle α autour de Oz.

Trouver les nouvelles coordonnées cartésiennes (x', y', z'), cylindriques (ρ', φ', z') et sphériques (r', θ', ϕ') du point.

Application numérique : M $(2, 2\sqrt{3}, 4)$; α = 30°.

Exercice 2

1) a- Exprimer les vecteurs unitaires du repère cylindrique $(O, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$ en fonction des vecteurs unitaires de la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

b- Calculer $\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}$ et $\frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}$ dans la base polaire.

c- Exprimer les vecteurs unitaires du repère cartésien en fonction des vecteurs unitaires du repère cylindrique.

2) a- Exprimer les vecteurs unitaires du repère sphérique $(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$ en fonction des vecteurs unitaires de la base cartésienne $(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$.

b- Exprimer les vecteurs unitaires du repère cartésien en fonction des vecteurs unitaires du repère sphérique.

Exercice 3

Soit un repère en coordonnées cartésiennes Oxyz. Un point M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y,z), cylindriques (ρ, φ, z) et sphériques (r, θ, ϕ).

On note $d\overrightarrow{OM}$ le vecteur déplacement élémentaire du point M.

a) Exprimer ce vecteur dans le repère cartésien $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$, dans le repère cylindrique $(O, \overrightarrow{e_\rho}, \overrightarrow{e_\varphi}, \overrightarrow{e_z})$ et dans le repère sphérique$(O, \overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi})$.

b) En déduire les expressions du volume élémentaire dV.

Exercice 4

Un point P se déplace dans le plan (xOy) du repère R$(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z})$. Les coordonnées de P en coordonnées polaires sont r et Θ. On désigne par $R_1(O_1, \overrightarrow{e_{x1}}, \overrightarrow{e_{y1}}, \overrightarrow{e_{z1}})$ un repère mobile tel que $\overrightarrow{e_{z1}} = \overrightarrow{e_z}$ à tout instant et $\overrightarrow{e_{x1}}$ est colinéaire à OO_1 (cf. figure 1).

Soit $\overrightarrow{O_1H}$ le vecteur dirigé et orienté comme $\overrightarrow{e_y}$ et de norme constante l.

1- Calculer $\frac{d\overrightarrow{O_1H}}{d\theta}$ par rapport à R.

2- a) Calculer les composantes de $\overrightarrow{O_1H}$ dans R_1 et en déduire $\frac{d\overrightarrow{O_1H}}{d\theta}$ par rapport à R_1.

b) Trouver les composantes dans R de ce vecteur.

3- On désigne par α = $(\overrightarrow{O_1x_1}, \overrightarrow{O_1H})$. Calculer $\frac{d\overrightarrow{O_1H}}{d\alpha}$ par rapport à R_1.

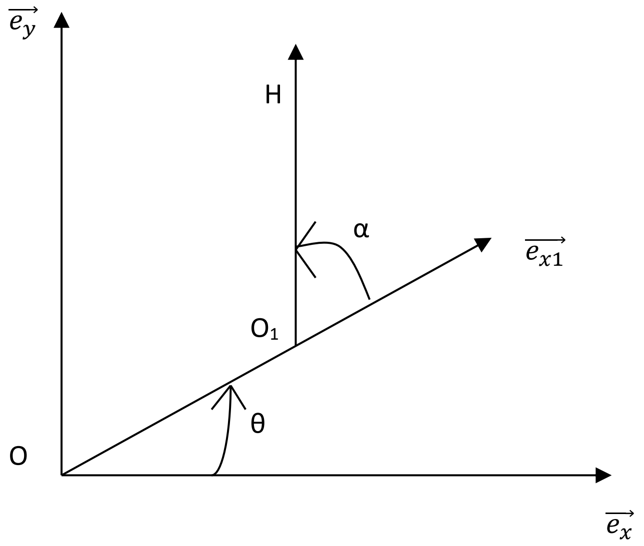

Figure 1

Exercice 5

Par rapport à un repère R($O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$), un point P est positionné à l'aide des coordonnées sphériques :

ρ = OP ; Θ = ($\overrightarrow{OZ}$,$\overrightarrow{OP}$) ; φ = ($\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OH}$) où H est la projection de P dans le plan (XOY).

1- Donner les expressions des coordonnées cartésiennes X, Y, Z de P en fonction de ρ, Θ, φ.

2- Définir les lignes coordonnées associées respectivement à ρ, Θ, φ c'est-à-dire les lignes décrites par P :

a) ρ variant, Θ, et φ étant constants
b) Θ variant, ρ, et φ étant constants
c) φ variant, ρ et Θ étant constants

3- On désigne respectivement par $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{e_\varphi}$ les vecteurs unitaires tangents en P aux lignes coordonnées, orientés dans le sens de la variable croissante.

a) Calculer en fonction de Θ et φ les composantes sur la base B($\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$) de $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$.

b) Montrer que $\overrightarrow{e_\rho}$, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_\varphi}$ pris dans cet ordre constituent une base orthonormée directe que l'on notera BS.

4- Exprimer dans la base sphérique BS :

a) Les vecteurs déplacements élémentaires de P selon les trois lignes de coordonnées, puis le vecteur déplacement élémentaire résultant d$\overrightarrow{OP}$.

b) En déduire l'élément différentiel de volume associé.

5- a) Calculer les composantes dans B des vecteurs :

d$\overrightarrow{e_\rho}$/dt ; d$\overrightarrow{e_\theta}$/dt ; d$\overrightarrow{e_\varphi}$/dt par rapport à R.

b) Montrer que si $\vec{\omega}$ = (dφ/dt)$\overrightarrow{e_z}$ + (dΘ/dt)$\overrightarrow{e_\varphi}$ alors d$\overrightarrow{e_\rho}$/dt = $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_\rho}$; d$\overrightarrow{e_\theta}$/dt = $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_\theta}$; d$\overrightarrow{e_\varphi}$/dt = $\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{e_\varphi}$.

6- On considère deux points P_1 et P_2 repérés par leurs coordonnées sphériques (ρ_1, Θ_1, φ_1) et (ρ_2, Θ_2, φ_2).

a) Déterminer l'angle α entre $\overrightarrow{OP_1}$ et $\overrightarrow{OP_2}$.

b) Application numérique : En assimilant la Terre à une sphère de rayon R = 6378 km, calculer la distance à vol d'oiseau entre Antananarivo (18°55'S ; 47°32'E) et New York (40°42'N ; 74°00'W).