UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
Domaine Sciences et Technologies
Mention Mathématiques
et Informatique

S3, 2021-2022

ESPACES QUOTIENTS

Ankino amin'i Jehovah ny lalanao,
Ary matokia Azy, fa hataony tanteraka.
Salamo 37:5

1 Généralité

Soit A, B, C trois ensembles et $f : A \longrightarrow B$, $g : A \longrightarrow C$ deux applications.
Pb: Peut-on trouver une application $h : C \longrightarrow B$ telle que $f = h \circ g$?
On considère la condition
(C_1) $\qquad \forall x, y \in A, (g(x) = g(y) \Longrightarrow f(x) = f(y)).$
On a la proposition suivante

Proposition 1.1 *h existe si et seulement si f et g vérifient la condition (C_1).*

Démonstration (1) Supposons que h existe. Soit $x, y \in A$ tels que $g(x) = g(y)$. On a $h(g(x)) = h(g(y))$ ou encore $f(x) = f(y)$. D'où (C_1).
(2) Supposons maintenant que (C_1) soit vérifiée. Soit $t \in C$. On va définir $h(t)$.
1°cas: $t \in g(A)$. Dans ce cas, il existe un élément $x \in A$ tel que $t = g(x)$. Soit $y \in A$ un autre antécédent de t par g, c-à-d, $t = g(y)$. D'après l'hypothèse, on a $f(x) = f(y)$. Ce qui prouve que $f(x)$ ne dépend pas de l'antécédent choisi. Posons alors $h(t) = f(x)$.
2°cas: $t \notin g(A)$. Dans ce cas, choisissons un élément $b \in B$ et posons $h(t) = b$.
h ainsi défini est bien une application de C vers B. En outre, pour tout $x \in A$, $h \circ g(x) = f(x)$. Donc $h \circ g = f$.
NB: Par construction, h est unique si g est surjective.

Proposition 1.2 *Supposons que f et g vérifient la condition*
(C_2) $\qquad \forall x, y \in A, (g(x) = g(y) \Longleftrightarrow f(x) = f(y)).$
Soit i l'injection canonique de $f(A)$ vers B, c-à-d, pour tout $u \in f(A)$, $i(u) = u$. Alors, il existe une bijection $\bar{h}$ de $g(A)$ vers $f(A)$ et une seule telle que $f = i \circ \bar{h} \circ g$.

Démonstration Considérons les applications $f_1 : A \longrightarrow f(A), x \to f_1(x) = f(x)$ et $g_1 : A \longrightarrow g(A), x \to g_1(x) = g(x)$.
Soit $x, y \in A$ tels que $g_1(x) = g_1(y)$. On a $g(x) = g(y)$. D'après l'hyp., $f(x) = f(y)$. Ainsi, d'après la Prop 1.1, il existe une application $\bar{h} : g(A) \longrightarrow f(A)$ telle que $f_1 = \bar{h} \circ g_1$. Comme $f = i \circ f_1$, alors $\forall x \in A$, $f(x) = i \circ \bar{h} \circ g_1(x) = i \circ \bar{h} \circ g(x)$, ou encore $f = i \circ \bar{h} \circ g$.
Ensuite, $\bar{h}$ est unique. En effet, pour tout $t \in g(A)$, $\bar{h}(t) = \bar{h} \circ g(x) = \bar{h} \circ g_1(x) = f_1(x) = f(x)$ où $t = g(x)$.
Montrons que $\bar{h}$ est bijective.
– Soit $u \in f(A)$. Il existe $x \in A$ tel que $u = f(x)$. Posons $t = g(x)$. On a $\bar{h}(t) = f(x) = u$. Donc $\bar{h}$ est surjective.
– D'autre part, soit $t, t' \in g(A)$ tels que $\bar{h}(t) = \bar{h}(t')$. Soit $x, x' \in A$ tels que $t = g(x)$ et $t' = g(x')$. D'après ce qui précède, $f(x) = \bar{h}(t)$ et $f(x') = \bar{h}(t')$. Donc $f(x) = f(x')$. D'après (C_2), $g(x) = g(x')$ ou encore $t = t'$. $\bar{h}$ est donc injective.

2 Quotient d'un groupe par un sous-groupe

On considère un groupe (additif) G non nécessairement abélien et H un sous-groupe de G. On définit une relation $\equiv$ sur G par

$$\forall x, y \in G, x \equiv y \iff -x + y \in H.$$

Remarque: Si la loi utilisée est multiplicative, $\equiv$ est définie par

$$\forall x, y \in G, x \equiv y \iff x^{-1}y \in H.$$

Proposition 2.1 *$\equiv$ est une relation d'équivalence ayant les propriétés suivantes:*
(1) $\bar{x} = x + H := \{x + h/\ h \in H\}$;
(2) $\forall x, y \in G, (x + y) + H = x + (y + H)$;
(3) $\forall h \in H, h + H = H$.
On note G/H l'ensemble des classes d'équivalence de $\equiv$.

Démonstration Montrons d'abord que $\equiv$ est une relation d'équivalence.
– Pour tout $x \in G$, on a $-x + x = 0 \in H$. Donc $x \equiv x$.
– D'autre part, soit $x, y \in G$ tels que $x \equiv y$. On a $-x + y \in H$.
Par suite $-(-x + y) = -y + x \in H$, c-à-d, $y \equiv x$.
– Enfin, soit $x, y, z \in G$ tels que $x \equiv y$ et $y \equiv z$. Alors $-x+z = (-x+y)+(-y+z) \in H$ ou encore $x \equiv z$.
On en conclut que $\equiv$ est une relation d'équivalence.

Soit maintenant $x, y \in G$. Alors

$$y \in \bar{x} \iff x \equiv y \iff -x + y \in H \iff \exists h \in H, -x + y = h \iff y \in x + H.$$

D'où $\bar{x} = x + H$.
De plus, pour tout z,

$$\begin{aligned} z \in (x + y) + H &\iff -(x + y) + z \in H \iff (-y - x) + z \in H \\ &\iff -y + (-x + z) \in H \iff -x + z \in y + H \\ &\iff z \in x + (y + H). \end{aligned}$$

Enfin, soit $h \in H$. Pour tout w,

$$w \in H \iff -h + w \in H \iff w \in h + H.$$

Ce qui prouve que $h + H = H$.

Définition 2.2 Une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ est compatible avec la loi de G si

$$\forall x, y, x', y' \in G, (x\mathcal{R}y \text{ et } x'\mathcal{R}y' \Rightarrow (x + x')\mathcal{R}(y + y')).$$

Définition 2.3 On dit que H est distingué (dans G) et on écrit $H \lhd G$ si $\forall x \in G, x + H - x \subset H$.
En particulier, tout sous-groupe d'un groupe abélien est distingué.

Lemme 2.4 *Soit A, B deux parties (non nécessairement des sous-groupes) de G et $x \in G$. Alors*

$$A \subset B \iff x + A \subset x + B \iff A + x \subset B + x.$$

Démonstration L'implication $A \subset B \Rightarrow x + A \subset x + B$ est évidente. Supposons que $x + A \subset x + B$ et soit $a \in A$. Alors il existe $b \in B$ tel que $x + a = x + b$. En ajoutant à gauche par $-x$, on a $a = b$. Donc $A \subset B$. Ce qui nous donne la 1-ère équivalence. On fait de même pour $A \subset B \iff A + x \subset B + x$.

Proposition 2.5 *On a les équivalences:*

$$H \lhd G \iff \forall x \in G, x + H = H + x \iff \forall x \in G, x + H - x = H.$$

Démonstration En appliquant le lemme, on a

$$\begin{aligned} H \lhd G &\iff \forall x \in G, x + H - x \subset H \text{ et } -x + H + x \subset H \\ &\iff \forall x \in G, x + H \subset H + x \text{ et } H + x \subset x + H \\ &\iff \forall x \in G, H + x = x + H \\ &\iff \forall x \in G, H = x + H - x. \end{aligned}$$

Proposition 2.6 *$\equiv$ est compatible avec la loi de G ssi H est distingué.*

Démonstration Supposons que $\equiv$ soit compatible avec la loi de G. Soit $x \in G$ et $y \in x + H - x$. On a $y + x \in x + H$ ou encore $y + x \equiv x$. Comme $-x \equiv -x$, alors $y + x - x \equiv x - x$. Donc $y \equiv 0$, c-à-d, $y \in H$.
Réciproquement, supposons que H soit distingué. Soit $x, x', y, y' \in G$ tels que $x \equiv y$ et $x' \equiv y'$. On a $y + y' \in (x + H) + (x' + H) = (x + (x' + H)) + H = (x + x') + H$. Donc $y + y' \equiv x + x'$.

Proposition 2.7 *Si H est distingué, la loi définie par $\forall x, y \in G, \bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$ est bien définie sur G/H appelée loi quotient. Muni de cette loi quotient, G/H a une structure de groupe appelé groupe quotient.*

Démonstration Soit $x, y, x', y' \in G$ tels que $\bar{x} = \bar{x}'$ et $\bar{y} = \bar{y}'$. Pour que la loi soit définie, il faut que $\overline{x' + y'} = \overline{x + y}$. Or, d'après la proposition précédente, $\equiv$ est compatible avec la loi de G. Donc $x' + y' \equiv x + y$, c-à-d, $\overline{x' + y'} = \overline{x + y}$.
On peut vérifier facilement que G/H muni de cette loi est un groupe.

Définition 2.8 Soit G et G' deux groupes et f une application de G vers G'. On dit que f est un morphisme de groupes si $\forall x, y \in G$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$. Si, de plus, elle est bijective, on dit que c'est un isomorphisme de groupes. Si un tel isomorphisme existe, on dit que G et G' sont isomorphes.

Proposition 2.9 *Si H est un sous-groupe distingué de G, alors l'application $\pi : G \longrightarrow G/H, x \to \bar{x} = x + H$ est un morphisme de groupes appelé surjection canonique.*

Proposition 2.10 *Soit f un morphisme du groupe G vers un groupe G'. Alors il existe un isomorphisme de groupes $\bar{f} : G/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$.*

Démonstration D'abord, comme $\mathrm{Ker}\, f$ est un sous-groupe distingué de G, alors $G/\mathrm{Ker}\, f$ est un groupe. Considérons alors la surjection canonique π de G sur $G/\mathrm{Ker}\, f$. Soit $x, y \in G$. On a:

$$\pi(x) = \pi(y) \iff -x + y \in \mathrm{Ker}\, f \iff f(-x + y) = 0 \iff f(x) = f(y).$$

D'après la Prop 1.2, il existe une bijection $\bar{f}$ de $\pi(G) = G/\mathrm{Ker}\, f$ sur $\mathrm{Im}\, f$, définie par

$$\forall \bar{x} \in G/\mathrm{Ker}\, f, \bar{f}(\bar{x}) = f(x).$$

De plus, $\forall \bar{x}, \bar{y} \in G/\mathrm{Ker}\, f$,

$$\bar{f}(\bar{x} + \bar{y}) = \bar{f}(\overline{x + y}) = f(x + y) = f(x) + f(y) = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{f}(\bar{y}).$$

Donc $\bar{f}$ est un isomorphisme de groupes car $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-groupe de G'.

3 Quotient d'un anneau par un idéal

Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau et I un sous-groupe de $(A, +)$. Puisque $(A, +)$ est abélien, I est distingué dans A et on peut donc considérer le groupe quotient $A/I = \{\bar{a} = a + I;\ a \in A\}$ muni de la loi quotient $\bar{a} + \bar{b} = \overline{a + b}$.

Définition 3.1 On dit que I est un idéal à gauche (resp. à droite) de A si $\forall a \in A, aI \subset I$ (resp. $Ia \subset I$). C'est un idéal bilatère s'il est à la fois un idéal à gauche et à droite.

Proposition 3.2 *Si I est un idéal bilatère, la loi définie par $\forall x, y \in I, \bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x \cdot y}$ est bien définie sur A/I appelée loi produit quotient. De plus, $(A/I, +, \cdot)$ est un anneau appelé anneau quotient.*

Définition 3.3 Soit A et A' deux anneaux et f une application de A vers A'. On dit que f est un morphisme d'anneaux si

$$\forall x, y \in A, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y).$$

Proposition 3.4 *Si I est un idéal bilatère de A, alors l'application $\pi : A \longrightarrow A/I, x \to \bar{x} = x + I$ est un morphisme d'anneaux appelé surjection canonique.*

Si f est un morphisme d'anneaux de A vers A', on peut vérifier facilement que $\mathrm{Ker}\, f$ est un idéal bilatère de A.
En faisant une démonstration analogue à celle de la Prop 2.10, on a

Proposition 3.5 *Soit $f : A \longrightarrow A'$ un morphisme d'anneaux. Alors il existe un isomorphisme d'anneaux $\bar{f} : A/\mathrm{Ker}\, f \to \mathrm{Im}\, f$. En d'autres termes, $A/\mathrm{Ker}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont isomorphes.*

4 Quotient d'un espace vectoriel par un sous-espace vectoriel

Considérons un espace vectoriel $(E, +, \times)$ sur un corps $\mathbb{K}$ et F un sous-groupe de $(E, +)$. F étant un sous-groupe distingué du groupe abélien $(E, +)$, on peut considérer le groupe quotient $E/F = \{\bar{x} = x + F;\ x \in E\}$ muni de la loi quotient $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x + y}$.

Proposition 4.1 *Si F est un sous-espace vectoriel de E, la loi définie par $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E, \lambda \times \bar{x} = \overline{\lambda \times x}$ est bien une loi externe sur E/F. De plus, $(E/F, +, \times)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ appelé espace vectoriel quotient.*

Définition 4.2 *On suppose E de dimension n et F un sev de E. On appelle codimension de F l'entier* $\operatorname{codim} F = n - \dim F$.

Proposition 4.3 *Si E est de dimension finie,* $\dim(E/F) = \operatorname{codim} F$.

Démonstration Soit $(a_1, \ldots, a_p)$ une base de F. Complétons-la pour avoir une base de E, soit $(a_1, \ldots, a_n)$ la base de E ainsi obtenue. Montrons que $(\bar{a}_{p+1}, \ldots, \bar{a}_n)$ est une base de E/F.
Soit $\bar{x} \in E/F$. x s'écrit d'une manière unique sous la forme $x = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$. Par suite, $\bar{x} = x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \cdots + x_n\bar{a}_n = x_{p+1}\bar{a}_{p+1} + \cdots + x_n\bar{a}_n$ car $\bar{a}_i = 0$ pour $1 \leq i \leq p$. Ce qui prouve que $(\bar{a}_{p+1}, \ldots, \bar{a}_n)$ est un générateur de E/F.
D'autre part, soit $x_{p+1}\bar{a}_{p+1} + \cdots + x_n\bar{a}_n = 0$. On a $x_{p+1}a_{p+1} + \cdots + x_na_n \in F$. Donc $x_{p+1}a_{p+1} + \cdots + x_na_n = 0$. Ce qui entraîne que $x_{p+1} = \cdots = x_n = 0$.
Il en résulte que $(\bar{a}_{p+1}, \ldots, \bar{a}_n)$ est une base de E/F. D'où le résultat.
Comme précédemment, on a

Proposition 4.4 *Soit E et F deux $\mathbb{K}$ev et f une application linéaire de E vers F. L'application $\bar{f} : E/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f, \bar{x} \to f(x)$ est un isomorphisme d'ev.*

5 Morphisme d'algèbres

Définition 5.1 *Une $\mathbb{K}$-algèbre est un quadruplet $(A, +, \cdot, \times)$ tel que*
- $(A, +, \cdot)$ *est un anneau;*
- $(A, +, \times)$ *est un $\mathbb{K}$ev.*

Soit A et A' deux algèbres et f un morphisme d'algèbres de A vers A', c-à-d,

$$\forall x, y, z \in A, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(xy + \lambda z) = f(x)f(y) + \lambda f(z).$$

Comme dans les sections précédentes, on a la proposition suivante

Proposition 5.2 *L'application $\bar{f} : A/\operatorname{Ker} f \to \operatorname{Im} f,\ \bar{x} \to f(x)$ est un isomorphisme d'algèbres vérifiant la relation $f = i \circ \bar{f} \circ \pi$ où π est la surjection canonique de A sur $A/\operatorname{Ker} f$ et i l'injection canonique de $\operatorname{Im} f$ dans A'.*

6 Quotient par un polynôme

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $\mathbb{K}[X]$ l'anneau des polynômes de var X. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$, de degré d ($d > 0$). L'ensemble $(P) = P\mathbb{K}[X]$ est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. Donc $\mathbb{K}[X]/(P)$ noté tout simplement $\mathbb{K}[X]/P$ est un anneau quotient. En notant $\bar{A}$ la classe d'un polynôme A, on a

$$\bar{A} = \bar{B} \iff P|(A - B).$$

Proposition 6.1 *$\mathbb{K}[X]/P$ est une $\mathbb{K}$-algèbre de dimension d de base canonique $(\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X^{d-1}})$. On a en particulier $\mathbb{K}[X]/P \simeq \mathbb{K}^d$.*

Démonstration Soit $\bar{A} \in \mathbb{K}[X]/P$ et $R = a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1}$ le reste de la division euclidienne de A par P. On a $\bar{A} = \bar{R} = a_0\overline{1} + a_1\overline{X} + \cdots + a_{d-1}\overline{X^{d-1}}$. Ce qui prouve que $\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X^{d-1}}$ engendre $\mathbb{K}[X]/P$. D'autre part, soit $a_0\overline{1} + a_1\overline{X} + \cdots + a_{d-1}\overline{X^{d-1}} = 0$. Alors P divise $a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1}$. Comme $\deg P = d$, alors $a_0 + a_1X + \cdots + a_{d-1}X^{d-1} = 0$. Par conséquent, $a_i = 0$ pour tout i. Ainsi $(\overline{1}, \overline{X}, \dots, \overline{X^{d-1}})$ est une base de $\mathbb{K}[X]/P$.