UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Mention Mathématiques
et Informatique

S3, 2021-2022

Réduction des matrices

Ny fahatahorana an'i Jehovah no
fiandoham-pahalalana
Ohabolana 1:7

1 Rappels et notations

Dans toute la suite, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif.

Définition 1.1 Une matrice d'ordre $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un tableau M contenant m lignes et n colonnes formé par les éléments de $\mathbb{K}$.
Si on note $a_{i,j}$ le coefficient qui se trouve à la i-ème et à la j-ème colonne de M, on écrit $M = (a_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq m\\ 1\leq j\leq n}}$

On désigne par $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$. Muni de l'addition des matrices et de la multiplication externe, $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition 1.2 (Produit de deux matrices) Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j}) \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Le produit AB n'est défini que si $p = n$ et dans ce cas, AB est la matrice $(c_{i,j}) \in \mathcal{M}_{m,q}(\mathbb{K})$ définie par: Pour tout $1 \leq i \leq m$ et pour tout $1 \leq j \leq q$,

$$c_{i,j} = a_{i,1}b_{1,j} + a_{i,2}b_{2,j} + \cdots + a_{i,n}b_{n,j} = (a_{i,1}\, a_{i,2} \cdots a_{i,n}) \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ b_{2,j} \\ \vdots \\ b_{n,j} \end{pmatrix}.$$

Si $m = n$, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

Définition 1.3 Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est:
- diagonale si $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$;
- triangulaire supérieure (resp. inférieure) si tous les coefficients au-dessous (resp. au-dessus) de la diagonale sont nuls, c-à-d, $a_{i,j} = 0$ si $i > j$ (resp. $i < j$);
– triangulaire si elle est triangulaire supérieure ou inférieure.

Propriété 1.4 *Le déterminant d'une matrice diagonale ou triangulaire est égal au produit de ses éléments diagonaux.*

Définition 1.5 Soit E un $\mathbb{K}$ev de dimension n, $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de E et u un endomorphisme de E. Si $u(b_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,j}b_k$ $(1 \leq j \leq n)$, la matrice $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ est appelée la matrice de u dans $\mathcal{B}$: $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$.

Soit $A = (a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, c-à-d, $e_1 = {}^t(1\,0\,\cdots\,0)$, $e_2 = {}^t(0\,1\,0\cdots\,0)$,..., $e_n = {}^t(0\,\cdots\,0\,1\,0)$ où ${}^t(a_1\,a_2\,\cdots\,a_n) = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$.

Si on note A_j le produit Ae_j, alors A_j est le j-ième vecteur colonne de A et on note $A = [A_1A_2\cdots A_n]$.

2 Matrices semblables

Définition 2.1 Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit qu'elles sont semblables s'il existe une matrice inversible $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Proposition 2.2 *A et B sont semblables ssi il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{K}^n$ et un endo u de $\mathbb{K}^n$ tels que $A = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B}_0)$ et $B = \mathrm{Mat}(u, \mathcal{B})$, $\mathcal{B}_0$ étant la base canonique de $\mathbb{K}^n$.*

Proposition 2.3 *Si A et B sont semblables, alors A^p et B^p ($p \in \mathbb{N}$) sont également semblables.*

Proposition 2.4 *Soit $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $Ab_j = \sum_{k=1}^{n} \beta_{k,j}b_k$ ($1 \leq j \leq n$), alors $B = (\beta_{i,j})$ est semblable à A.*

Preuve Soit $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ la base cano de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Posons $b_j = \sum_{k=1}^{n} p_{k,j}e_k$.
$P = (p_{i,j})$ est la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ vers $\mathcal{B}$.
Avec la notation précédente, $P = [b_1b_2\cdots b_n]$. On a alors $APe_j = Ab_j$ pour tout j.
D'autre part, $PBe_j = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} p_{i,k}\beta_{k,j})e_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{k,j} \sum_{i=1}^{n} p_{i,k}e_i = \sum_{k=1}^{n} \beta_{k,j}b_k$.
Il en résulte que $APe_j = PBe_j$ pour tout j. Par suite, $AP = PB$ ou encore $B = P^{-1}AP$.

3 Polynômes de matrice

Définition 3.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P(t) = \sum_{i=1}^{p} a_it^i \in \mathbb{K}[t]$. On appelle polynôme de A associé au polynôme $P(t)$ la matrice $P(A) = \sum_{i=1}^{p} a_iA^i$ où $A^0 = I$.

Proposition 3.2 *Soit $P(t), Q(t)$ deux polynômes, A une matrice carrée d'ordre n et λ un scalaire. On a:*
(1) $(P + Q)(A) = P(A) + Q(A)$;
(2) $(PQ)(A) = P(A)Q(A)$;
(3) $(\lambda\,\mathrm{P})(A) = \lambda P(A)$.

En d'autres termes, l'application $\varphi_A : \mathbb{K}[t] \longrightarrow \mathbb{K}[A], P(t) \to P(A)$ est un morphisme d'algèbres. De plus, si $A \neq 0$, $\operatorname{Ker}\varphi_A$ est un idéal de $\mathbb{K}[t]$ engendré par un polynôme non constant unitaire $w_A(t)$:

$$\omega_A(A) = 0 \text{ et } \operatorname{Ker}\varphi_A = \{P(t) = \omega_A(t)Q(t)/\ Q(t) \in \mathbb{K}[t]\}.$$

Définition 3.3 Le polynôme unitaire $\omega_A(t)$ (c-à-d, le coefficient du plus haut degré est égal à 1) est appelé polynôme minimal de A.

Définition 3.4 Tout polynôme $P(t)$ non nul tel que $P(A) = 0$ est appelé polynôme annulateur de A.
Tout polynôme annulateur de A est donc divisible par $\omega_A(t)$.

Par exemple, $t^2 - 1$ est un polynôme annulateur de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ car $A^2 - I = 0$, et c'est le polynôme minimal.

4 Théorème de décomposition des noyaux

Théorème 4.1 *Soit P et Q deux polynômes de $\mathbb{K}[t]$ premiers entre eux et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors*

$$\text{Ker } PQ(A) = \text{Ker } P(A) \oplus \text{Ker } Q(A).$$

Plus généralement, si $P_1, P_2, \ldots, P_m$ sont des polynômes deux à deux premiers entre eux, alors

$$\text{Ker } P_1P_2\cdots P_m(A) = \text{Ker } P_1(A) \oplus \text{Ker } P_2(A) \oplus \cdots \oplus \text{Ker } P_m(A).$$

Preuve (i) Montrons d'abord que Ker $P(A)$ + Ker $Q(A)$ est une somme directe, c-à-d, Ker $P(A) \cap$ Ker $Q(A) = 0$.
P et Q étant premiers entre eux, il existe deux polynômes R et S tels que $R(t)P(t) + S(t)Q(t) = 1$.
Ainsi

$$R(A)P(A) + S(A)Q(A) = I. \qquad (*)$$

Soit donc $X \in$ Ker $P(A) \cap$ Ker $Q(A)$. De $(*)$, on a $R(A)P(A)X + S(A)Q(A)X = X = 0$.
On en déduit que Ker $P(A) \cap$ Ker $Q(A) = 0$.

(ii) Soit maintenant $X = X_1 + X_2 \in$ Ker $P(A) \oplus$ Ker $Q(A)$. Alors
$PQ(A)X = P(A)Q(A)X = P(A)Q(A)X_1 = Q(A)P(A)X_1 = 0$. Il s'ensuit que Ker $P(A) \oplus$ Ker $Q(A) \subset$ Ker $PQ(A)$.
Enfin, soit $X \in$ Ker $PQ(A)$. Posons $S(A)Q(A)X = X_1$ et $R(A)P(A)X = X_2$.
On a $P(A)X_1 = 0$ et $Q(A)X_2 = 0$. De plus, $(*)$ implique que $X = X_1 + X_2$. Par suite $PQ(A) \subset$ Ker $P(A) \oplus$ Ker $Q(A)$.
Le cas général en résulte en remarquant que P_m est premier avec le produit $P_1P_2\cdots P_{m-1}$.

5 Polynôme caractéristique

Définition 5.1 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique de A et on note $\chi_A(t)$ le déterminant de la matrice $A - tI_n$ où I_n est la matrice unité d'ordre n:

$$\chi_A(t) = |A - tI_n|.$$

Proposition 5.2 *On a:*
(i) Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_A(t)$ est un polynôme de degré n. De plus, si $\chi_A(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i$, alors $\alpha_n = (-1)^n$, $\alpha_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}(A)$ et $\alpha_0 = |A|$
où $\mathrm{tr}(A)$ est la somme des éléments diagonaux de A appelée trace de A.
(ii) Si A et B sont semblables, $\chi_A(t) = \chi_B(t)$.

6 Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice

6.1 Définitions

Définition 6.1 Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On dit que λ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ s'il existe un vecteur non nul $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$. Un tel vecteur X est appelé vecteur propre de A associé à λ.

Si λ est une valeur propre de A, on note $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ l'ensemble de tous les vecteurs X tels que $AX = \lambda X$.

6.2 Propriétés

Théorème 6.2 *Soit λ une valeur propre de A. Alors $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ appelé sous espace propre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ associé à λ. En outre, $\forall X \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$, $AX \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$.*

Preuve Soit $X, Y \in \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ et $\alpha \in \mathbb{K}$. On a $A(\alpha X) = \alpha AX = \alpha\lambda X = \lambda(\alpha X)$ et $A(X + Y) = AX + AY = \lambda X + \lambda Y = \lambda(X + Y)$. Ce qui prouve que $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ est un sev de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. De plus, $A[AX] = A(\lambda X) = \lambda AX$.

Théorème 6.3 *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors λ est une valeur propre de A ssi $A - \lambda I$ n'est pas inversible.*

Preuve On a:
λ est une valeur propre de A ssi il existe un vecteur non nul X de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $AX = \lambda X$, c-à-d, ssi le déterminant de $A - \lambda I$ est nul ou encore $A - \lambda I$ est non inversible.

Théorème 6.4 *Soit λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_k$ k valeurs propres distinctes de A, $X_1, X_2, \ldots, X_k$ k vecteurs propres associés respectivement à λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_k$. Alors ces k vecteurs sont linéairement indépendants. De plus, si $E := \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) + \cdots + \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I)$, alors*
$E = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I)$.

Preuve On raisonne par récurrence sur k.
Soit X_1 et X_2 deux vecteurs propres associés respectivement à λ_1 et λ_2, $a_1, a_2 \in \mathbb{K}$ tels que $a_1X_1 + a_2X_2 = 0 \quad (*)$.
On a $A(a_1X_1 + a_2X_2) = 0$ ou encore $a_1\lambda_1X_1 + a_2\lambda_2X_2 = 0 \quad (**)$.
$(*)$ et $(**)$ impliquent que $a_1 = a_2 = 0$. Il s'ensuit que X_1 et X_2 sont linéairement indépendants et $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) + \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) = \mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) \oplus \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I)$.
Supposons maintenant que si $X_1, X_2, \ldots, X_k$ sont des vecteurs propres associés respectivement à λ_1, $\lambda_2, \ldots \lambda_k$, alors ils sont linéairement indépendants et $\mathrm{Ker}(A - \lambda_1 I) + \mathrm{Ker}(A - \lambda_2 I) + \cdots + \mathrm{Ker}(A - \lambda_k I)$ directe.
Soit donc $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{k+1}$ $k+1$ valeurs propres de A et $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}$ des vecteurs propres associés. Déterminons $a_1, a_2, \ldots, a_{k+1}$ tels que $a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_{k+1}X_{k+1} = 0$ (i).
On a $A(a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_{k+1}X_{k+1}) = 0$ ou $\lambda_1a_1X_1 + \lambda_2a_2X_2 + \cdots + \lambda_{k+1}a_{k+1}X_{k+1} = 0$ (ii).
De (i) et (ii) on a $(\lambda_1 - \lambda_{k+1})a_1X_1 + (\lambda_2 - \lambda_{k+1})a_2X_2 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})a_kX_k = 0$.
L'hypothèse de récurrence implique que les a_i sont tous nuls.
Soit maintenant $Y_i \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_i I)$ $(1 \leq i \leq k+1)$ tels que $Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{k+1} = 0$. On a $A(Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_{k+1}) = 0$, soit $\lambda_1Y_1 + \lambda_2Y_2 + \cdots + \lambda_{k+1}Y_{k+1} = 0$.
Il en résulte que $(\lambda_1 - \lambda_{k+1})Y_1 + (\lambda_2 - \lambda_{k+1})Y_2 + \cdots + (\lambda_k - \lambda_{k+1})Y_k = 0$.
D'où $Y_1 = Y_2 = \cdots = Y_{k+1} = 0$.

Proposition 6.5 *λ est une valeur propre de A ssi $\chi_A(\lambda) = 0$.*

Proposition 6.6 *Si A est d'ordre n, alors A a au plus n valeurs propres.*

Définition 6.7 Soit λ une valeur propre de A. On appelle *ordre de multiplicité* de λ le plus grand entier m tel que de $(t - \lambda)^m$ divise $\chi_A(t)$.

Proposition 6.8 *Soit λ une valeur propre de A d'ordre de multiplicité m. Alors*

$$1 \leq \dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I) \leq m.$$

Preuve Soit $(b_1, \ldots, b_d, b_{d+1}, \ldots, b_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ où $(b_1, b_2, \ldots, b_d)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$. Posons, pour $1 \leq j \leq n$, $Ab_j = \sum_{i=1}^{n} \beta_{i,j} b_i$.
D'après la Prop 2.4, la matrice $B = (\beta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est semblable à A.
De plus, comme $Ab_j = \lambda b_j$ pour tout $j \leq d$, alors $\beta_{i,j} = \lambda \delta_{i,j}$ pour tout i et pour tout $j \leq d$. B est donc de la forme $\begin{pmatrix} \lambda\, \mathrm{I}_d & A_1 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$.
Ainsi $\chi_A(t) = \chi_B(t) = (\lambda - t)^d |A_2 - tI_{n-d}|$ et par suite $d \leq m$.

Définition 6.9 On dit que χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$ si χ_A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$.

7 Diagonalisation

Définition 7.1 On dit qu'une matrice carrée A est diagonalisable s'il existe une matrice diagonale B semblable à A.

Théorème 7.2 *A est diagonalisable ssi χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$ et* $\dim \mathrm{Ker}(A - \lambda I) = m$ *pour toute racine λ de χ_A d'ordre de multiplicité m.*

Preuve D'après la Prop 2.4, A diagonalisable ssi il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et n scalaires $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ tels que $Ab_j = \alpha_j b_j$ pour tout j.
On peut choisir $b_1, \ldots, b_n$ de telle sorte que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \cdots \leq \alpha_n$.
Soit $(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ une suite strictement croissante d'entiers définie comme suit:
m_1 est le plus grand entier ≥ 1 tel que $\alpha_{m_1} = \alpha_1$, m_2 est le plus grand entier $> m_1$ tel que $\alpha_{m_2} = \alpha_{m_1+1}$ et ainsi de suite. m_{i+1} est le plus grand entier $> m_i$ tel que $\alpha_{m_{i+1}} = \alpha_{m_i+1}$ et $\alpha_{m_k} = \alpha_{m_{k-1}+1} = \alpha_n$.
$\alpha_{m_1}, \ldots, \alpha_{m_k}$ sont les valeurs propres distinctes de A d'ordres de multiplicité respectifs $m_1, m_2 - m_1, \ldots, m_k - m_{k-1}$. Par conséquent, $\chi_A(t) = (\alpha_{m_1} - t)^{m_1 - m_0}(\alpha_{m_2} - t)^{m_2 - m_1} \cdots (\alpha_{m_k} - t)^{m_k - m_{k-1}}$. De plus, $\mathrm{Ker}(A - \alpha_{m_i} I) = \mathrm{Vect}(b_{m_{i-1}+1}, \ldots, b_{m_i})$.
D'où le théorème.

Proposition 7.3 *Soit $\omega_A(t)$ le polynôme minimal de A. Si λ est une valeur propre de A, alors $\omega_A(\lambda) = 0$.*

Preuve Soit X un vecteur propre de A associé à λ. On a $A^i X = \lambda^i X$ pour tout entier i. Posons alors $\omega_A(t) = \sum_{i=0}^{k} a_i t^i$. Comme $\omega_A(A) = 0$, $\omega_A(A)X = 0$, soit $\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i X = 0$. Par suite, $\omega_A(\lambda) = 0$.

Théorème 7.4 *A est diagonalisable ssi ω_A a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ et chaque racine de ω_A est simple.*

8 Trigonalisation

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 8.1 On dit A est triangularisable (ou trigonalisable) dans $\mathbb{K}$ s'il existe une matrice triangulaire B semblable à A.

Théorème 8.2 *Si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$, alors A est trigonalisable. De plus, si B est une matrice triangulaire semblable à A, les éléments diagonaux de B sont les valeurs propres de A.*

Théorème 8.3 (**Théorème de Cayley Hamilton**) *Si χ_A est scindé dans $\mathbb{K}$, alors $\chi_A(A) = 0$.*

Preuve Soit $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ les valeurs propres de A. D'après la Prop 2.4 et le théorème précédent, il existe une base $(b_1, \ldots, b_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et une matrice triangulaire $B = (\beta_{i,j})$ semblable à A telle que $\beta_{j,j} = \alpha_j$ et $Ab_j = \sum\limits_{1 \leq i \leq j} \beta_{i,j} b_i$ pour tout j.
Posons $A_i = (A - \alpha_1 I)(A - \alpha_2 I) \cdots (A - \alpha_i I)$ $(1 \leq i \leq n)$.
Montrons par récurrence que $A_i b_j = 0$ pour $1 \leq j \leq i$.

On a $A_1b_1 = 0$ car $Ab_1 = \alpha_1 b_1$. Supposons que $A_{i-1}b_j = 0$ pour $1 \leq j \leq i-1$.
Pour $1 \leq j \leq i-1$, $A_ib_j = A_{i-1}(A-\alpha_i I)b_j = (A-\alpha_i I)A_{i-1}b_j = (A-\alpha_i I)0 = 0$.
Et $A_ib_i = A_{i-1}(A-\alpha_i I)b_i = A_{i-1}(Ab_i - \alpha_i b_i) = A_{i-1}(\sum_{k=1}^{i-1} \beta_{k,i}b_k) = 0$.
Par conséquent, $A_n = 0$ et $\chi_A(A) = (-1)^n A_n = 0$.

Corollaire 8.4 *Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\chi_A(A) = 0$.*

Corollaire 8.5 *Si χ_A est scindé dans $\mathbb{R}$ et $\chi_A(t) = (-1)^n(t-\lambda_1)^{m_1}\cdots(t-\lambda_q)^{m_q}$, alors*

$$\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) = \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_1 I)^{m_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{Ker}\,(A-\lambda_q I)^{m_q}.$$

9 Recherche d'une base de $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A-\lambda I)^m$ par la méthode de pivot de Gauss

où λ est une valeur propre de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'ordre de multiplicité m.

9.1 Méthode de pivot de Gauss

Commençons par un exemple. Résolvons le système d'équations suivant:

$$(S_1)\left\{\begin{array}{rl} 2x_1+3x_2-x_3+4x_4 = 7 & (E_1)\\ 3x_1-4x_2+2x_3-3x_4 = -1 & (E_2)\\ 5x_1-x_2+x_3+x_4 = 6 & (E_3)\end{array}\right.$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4\\ 3 & -4 & 2 & -3\\ 5 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\\ -1\\ 6\end{pmatrix}$

Utilisons la méthode par élimination. Commençons par éliminer x_3 par exemple. Gardons l'équation (E_1), remplaçons (E_2) par $2\times(E_1)+(E_2)$ et (E_3) par $(E_1)+(E_3)$. On a le système équivalent suivant:

$$(S_2)\left\{\begin{array}{rl} 2x_1+3x_2-x_3+4x_4 = 7 & (E_4)\\ 7x_1+2x_2+0x_3+5x_4 = 13 & (E_5)\\ 7x_1+2x_2+0x_3+5x_4 = 13 & (E_6)\end{array}\right.$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4\\ 7 & 2 & 0 & 5\\ 7 & 2 & 0 & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7\\ 13\\ 13\end{pmatrix}$

Puis éliminons x_2. Gardons l'équation (E_5), remplaçons (E_4) par $-2\times(E_4)+3\times(E_5)$ et (E_6) par $(E_6)-(E_5)$. On a le système équivalent suivant:

$$(S_3)\left\{\begin{array}{rl} 17x_1+0x_2+2x_3+7x_4 = 25 & (E_7)\\ 7x_1+2x_2+0x_3+5x_4 = 13 & (E_8)\\ 0x_1+0x_2+0x_3+0x_4 = 0 & (E_9)\end{array}\right.$$

Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 5 \\ 17 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 25 \\ 0 \end{pmatrix}$

On peut donc exprimer x_2 et x_3 en fonction de x_1 et x_4. On a:
$\begin{cases} 2x_2 = 13 - 7x_1 - 5x_4 \\ 2x_3 = 25 - 17x_1 - 7x_4 \end{cases}$ ou encore $\begin{cases} x_2 = 13/2 - 7/2\, x_1 - 5/2\, x_4 \\ x_3 = 25/2 - 17/2\, x_1 - 7/2\, x_4 \end{cases}$

$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 & 5 \\ 17 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est appelée une matrice échelonnée réduite de $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & -4 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Définition 9.1 Une matrice échelonnée réduite est une matrice ayant un nombre maximal de vecteurs colonnes linéairement indépendants dont tous les coefficients sont nuls sauf un, appelé pivot.

Remarque:
– Chaque colonne d'une matrice échelonnée réduite contient au plus un pivot;
– Chaque ligne d'une matrice échelonnée réduite contient au plus un pivot;
– Le rang d'une matrice échelonnée réduite est égal au nombre de pivots de cette matrice.

Définition 9.2 Échelonner une matrice $A = (a_{i,j})$ sous forme réduite, c'est la transformer en une matrice échelonnée réduite qui s'obtient par combinaison linéaire et/ou par permutation des lignes de A (comme dans l'exemple précédent).

Recherche des pivots: On choisit d'abord un coefficient non nul de A, par exemple, a_{i_1,j_1}.
Puis on transforme A en une matrice $A_1 = (a^{(1)}_{i,j})$ comme suit:
(i) $L_{i_1}(A)$ est inchangée;
(ii) Pour tout $i \neq i_1$, $L_i(A)$ est remplacée par $a_{i_1,j_1} L_i(A) - a_{i,j_1} L_{i_1}(A)$.
où $L_i(A)$ est la i-ème ligne de A.
On aura: $a^{(1)}_{i_1,j_1} = a_{i_1,j_1}$ et $a^{(1)}_{i,j_1} = 0$ pour tout $i \neq i_1$.
Ensuite on choisit un deuxième coefficient non nul $a^{(1)}_{i_2,j_2}$ de A_1 (s'il existe) qui ne se trouve pas sur la ligne et la colonne contenant le premier coefficient choisi. On procède comme précédemment et on obtient une matrice A_2 et ainsi de suite.
À la fin, on obtient une matrice échelonnée réduite.

NB: On peut permuter les lignes pour que le premier pivot le plus à gauche se trouve à la première ligne, le deuxième pivot le plus à gauche à la deuxième ligne et ainsi de suite. Si c'est nécessaire, on rend à 1 tous les pivots.

9.2 Application: Recherche de l'inverse d'une matrice inversible

. Soit A une matrice inversible. On résout le système $AX = Y$. Pour cela, on échelonne sous la forme réduite la matrice dite augmentée $A|I$ au lieu de A seulement, I étant la matrice unité de même ordre que A. On obtient une matrice $I|B$. On a :

$$AX = Y \iff AX = IY \iff IX = BY \iff X = BY.$$

Donc $B = A^{-1}$.

Exemple: Cherchons la matrice inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -1 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

On a $A|I = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 3 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$

$\equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 8 & 5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 8 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -2 \\ -3 & -2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

9.3 Recherche d'une base de $E_\lambda = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^m$

Notons $N_i = N_i(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)^i$ et $n_i = \dim N_i$. Soit k le plus petit entier tel que $n_k = m$ $(k \leq m)$.
Comme $N_1 \subset N_2 \subset \cdots \subset N_m$, alors $n_1 < n_2 < \cdots < n_k$. De plus, en posant $d_1 = n_1$ et $d_i = n_i - n_{i-1}$ pour $2 \leq i \leq k$, on a $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_k \geq 1$.

Pour $2 \leq i \leq k$, soit F_i le sous-espace supplémentaire de N_{i-1} dans N_i : $N_i = N_{i-1} \oplus F_i$.

Donc $E_\lambda = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_k$. Ainsi, pour avoir une base de E_λ, on cherche une base de chaque F_i.

1-ère étape: Recherche d'une base de F_1.

Pour cela, échelonner sous forme réduite (ou pivoter) la matrice augmentée ${}^t(A - \lambda I_n)|I_n$.
On obtient une matrice augmentée $\left(\begin{array}{c|c} A_1 & C_1 \\ 0 & B_1 \end{array}\right)$ où B_1 est une matrice d'ordre $d_1 \times n$.

Les d_1 vecteurs lignes de B_1 forment une base de $N_1 = F_1$, que nous notons $b_1, \ldots, b_{n_1}$:
On a $(A - \lambda I_n)b_j = 0$ pour $1 \leq j \leq n_1$.
2-ème étape: Recherche d'une base de F_2.
Pour cela, échelonner sous forme réduite la matrice augmentée $\left(\begin{array}{c|c|c} A_1 & C_1 & 0 \\ B_1 & 0 & -I_{d_1} \end{array}\right)$
On obtient une matrice augmentée $\left(\begin{array}{c|c|c} A_2 & C_2 & E_2 \\ 0 & B_2 & D_2 \end{array}\right)$ où B_2 est une matrice d'ordre $d_2 \times n$.

Les d_2 vecteurs lignes de B_2 forment une base de F_2, que nous notons $b_{n_1+1}, \dots, b_{n_2}$.

En notant $D_{i,2}$ le i-ème vecteur ligne de D_2, on a $(A - \lambda I_n)b_{n_1+i} = D_{i,2} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_1} \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq d_2)$.

3-ème étape: Recherche d'une base de F_3.

Comme précédemment, échelonner sous forme réduite la matrice augmentée $\left(\begin{array}{c|c|cc} A_2 & C_2 & E_2 & 0 \\ B_2 & 0 & 0 & -I_{d_2} \end{array}\right)$

On obtient une matrice augmentée $\left(\begin{array}{c|c|c} A_3 & C_3 & E_3 \\ 0 & B_3 & D_3 \end{array}\right)$ où B_3 est une matrice d'ordre $d_3 \times n$.

Les d_3 vecteurs lignes de B_3 forment une base de F_3, que nous notons $b_{n_2+1}, \dots, b_{n_3}$.

En notant $D_{i,3}$ le i-ème vecteur ligne de D_3, on a

$(A - \lambda I_n)b_{n_2+i} = D_{i,3} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_2} \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq d_3)$.

A la j-ème étape, on obtient une matrice augmentée $\left(\begin{array}{c|c|c} A_j & C_j & E_j \\ 0 & B_j & D_j \end{array}\right)$ où B_j est une matrice d'ordre $d_j \times n$.

Si $D_{i,j}$ est le i-ème vecteur ligne de D_j, on a

$(A - \lambda I_n)b_{n_{j-1}+i} = D_{i,j} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_{j-1}} \end{pmatrix}$ $(1 \leq i \leq d_j)$.

A l'étape suivante, on pivote la matrice augmentée $\left(\begin{array}{c|c|cc} A_j & C_j & E_j & 0 \\ B_j & 0 & 0 & -I_{d_j} \end{array}\right)$

Finalement, on obtient une base $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ de E_λ vérifiant

$$(A - \lambda I_n)b_{n_{j-1}+i} = D_{i,j} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_{n_{j-1}} \end{pmatrix} \quad (1 \leq j \leq d_k, 1 \leq i \leq d_j).$$

10 Recherche d'une matrice triangulaire

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice scindée : $\chi_A(t) = (-1)^n (t - \lambda_1)^{m_1} \cdots (t - \lambda_p)^{m_p}$.

Par la méthode du pivot de Gauss (section précédente), on obtient une base $(b_1, \dots, b_{m_1})$ de E_{λ_1}, une base $(b_{m_1+1}, \dots, b_{m_1+m_2})$ de E_{λ_2} et ainsi de suite. On obtient alors une nouvelle base $\mathcal{B} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ de $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

D'autre part, pour chaque valeur propre λ_i, nous obtenons également des matrices $D_2, \dots, D_{k_i}$ où $k_i = k(\lambda_i)$ et $D_j = D_j(\lambda_i)$ $(2 \leq j \leq k_i)$.

Pour i fixé, notons $U_1^i = \begin{pmatrix} \lambda_i I_{d_1} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\quad U_{k_i}^i = \begin{pmatrix} {}^t D_{k_i} \\ \lambda_i I_{d_{k_i}} \end{pmatrix}$

et pour $2 \leq j \leq k_i - 1$, $U_j^i = \begin{pmatrix} {}^tD_j \\ \lambda_i I_{d_j} \\ 0 \end{pmatrix}$
où U_j^i est une matrice à m_i lignes et d_j colonnes
Posons $U^i = (U_1^i U_2^i \cdots U_{k_i}^i)$ et $A' = \mathrm{Diag}(U^1, U^2, \ldots, U^q)$.

Alors A' est une matrice triangulaire semblable à A et $A' = P^{-1}AP$ où $P = [b_1 b_2 \cdots b_n]$.

11 Applications

11.1 Calcul de l'exponentielle d'une matrice

Définition 11.1 On appelle exponentielle d'une matrice carrée A la matrice $e^A = \sum_n \frac{1}{n!} A^n$.

Soit A une matrice trigonalisable dans $\mathbb{R}$ d'ordre n et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ obtenue en échelonnant $A - \lambda I | I$ par la méthode de pivot de Gauss pour chaque valeur λ de A.
Si λ est une valeur propre associée à b_j, on a
$e^A b_j = e^{(A-\lambda I)+\lambda I} b_j = e^{\lambda} \sum_k \frac{1}{k!}(A - \lambda I)^k b_j = \sum_k \alpha_{k,j} b_k$.
En posant $P = [b_1 b_2 \cdots b_n]$ et $B = (\alpha_{k,j})$, alors la Prop 2.4 implique que

$$e^A = PBP^{-1}.$$

Exemple: Prenons la matrice de l'exemple précédent. On a:
$e^A b_1 = \sum_k \frac{1}{k!} A^k b_1 = b_1$;
$e^A b_2 = \sum_k \frac{1}{k!} A^k b_2 = b_2 - b_1 = -b_1 + b_2$;
$e^A b_3 = e^3 \sum_k \frac{1}{k!}(A - 3I)^k b_3 = e^3 b_3$.
Posons $P = [b_1, b_2, b_3]$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}$.
Calculons d'abord P^{-1}. On a

$$P|I = \left(\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -1 & 7/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 9/2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 9 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 0 & 0 & 9 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & -4 & -1 & 3 \\ 9 & 0 & 0 & -10 & -10 & 9 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{rrr|rrr} 9 & 0 & 0 & -10 & -10 & 9 \\ 0 & 9 & 0 & -12 & -3 & 9 \\ 0 & 0 & 9 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right)$$

D'où $P^{-1} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} -10 & -10 & 9 \\ -12 & -3 & 9 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, $BP^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -10 & -10 & 9 \\ -12 & -3 & 9 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ -12 & -3 & 9 \\ 2e^3 & 2e^3 & 0 \end{pmatrix}$ et

$e^A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 7/2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -7 & 0 \\ -12 & -3 & 9 \\ 2e^3 & 2e^3 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7e^3+14 & 7e^3-4 & -9 \\ 2e^3-14 & 7e^3+4 & 9 \\ 10e^3+2 & 10e^3-7 & 0 \end{pmatrix}$

11.2 Résolution d'un système d'équations différentielles linéaires

On considère le système différentiel

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j}x_j(t) = x_i'(t) \quad (1 \leq i \leq n)$$

Ce système s'écrit

$$AX(t) = X'(t)$$

où $A = (a_{i,j})$ et $X(t) = {}^t(x_1(t)\, x_2(t)\, \ldots\, x_n(t))$

Proposition 11.2 *Le système $AX(t) = X'(t)$ a pour solution générale $X(t) = e^{tA}X_0$ où X_0 est un vecteur arbitraire.*

Si A est trigonalisable, le calcul de e^{tA} se fait comme e^A.
Exemple:
Résoudre $\begin{cases} 3x+4y &= x' \\ -x-y &= y' \end{cases}$
Sous forme matricielle, on a $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$.
Le système a pour solution $X = e^{tA}X_0$ où $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.
Par un calcul simple, $\chi_A(t) = (1-t)^2$. Par la méthode de pivot de Gauss, on obtient une base (b_1, b_2) où $b_1 = -2e_1 + e_2$ et $b_2 = e_1$ avec $(A-I)b_1 = 0$ et $(A-I)b_2 = -b_1$.
Par conséquent, $e^{tA}b_1 = e^t b_1$ et $e^{tA}b_2 = e^t(b_2 - tb_1)$.
En posant $P = [b_1\, b_2]$ et $A' = e^t\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $e^{tA} = PA'P^{-1} = e^t\begin{pmatrix} 1+2t & 4t \\ -t & 1-2t \end{pmatrix}$.
Le système a donc pour solution $x = e^t[(1+2t)x_0 + 4ty_0]$ et $y = e^t[-tx_0 + (1-2t)y_0]$