UNIVERSITE D'ANTANANARIVO S3,2021-22
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Mention Mathématiques et Informatique

Algèbre : Réduction des matrices
TD $n°2$

Exercice 1
Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices semblables et $a \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ un vecteur non nul. On pose $B = P^{-1}AP$ et $b = P^{-1}a$.
Montrer que a est un vecteur propre de A si et seulement si b est un vecteur propre de B.

Exercice 2
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice semblable à $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
1) Montrer que A est diagonalisable.
2) Trouver une matrice diagonale semblable à A.

Exercice 3
Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ une matrice semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Montrer que A est trigonalisable mais non diagonalisable.

Exercice 4
On considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & -4 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que $\chi_A(t) = (t-a)^2(t-b)^2$ où a et b sont des réels à déterminer.
2) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - aI)$ et une base de $\mathrm{Ker}(A - bI)$.
3) En déduire que A est diagonalisable.

Exercice 5
On considère la matrice suivante:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

1) Montrer que χ_A admet deux racines doubles a et b.
2) En déduire que A est trigonalisable.
3) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(A - aI)^2$ et une base de $\mathrm{Ker}(A - bI)^2$.
4) Trouver une matrice triangulaire B semblable à A.

Exercice 6
On considère la matrice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 & -1 \\ -4 & 5 & 4 & 4 \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 4 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Déterminer son polynôme caractéristique sachant qu'il admet une racine triple.
2) Trouver une matrice triangulaire B semblable à A et la matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$.
3) Calculer e^A.

Exercice 7
1) Montrer que les matrices suivantes sont trigonalisables:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 3 \\ -2 & -4 & 2 & -5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

2) Calculer A_i^n $(n \geq 2)$ et e^{A_i} pour $i = 1, 2, 3$.