UNIVERSITE D'ANTANANARIVO S3 2021-2022
Sciences et Technologies
Mention Mathématiques Espace quotient
et Informatique TD $n°1$

Notation: On note par $\mathbf{Z}_p$ le groupe additif $\mathbf{Z}/p\,\mathbf{Z}$.

Exercice 1
On considère les deux applications $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_6$, $n \to 5n + 6\,\mathbf{Z}$ et
$g : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_{18}$, $n \to 11n + 18\,\mathbf{Z}$
1) Montrer que f et g sont des morphismes de groupes.
2) Sachant que 11 et 18 sont premiers entre eux, montrer que g est surjectif.
3) Montrer qu'il existe un unique morphisme $h : \mathbf{Z}_{18} \longrightarrow \mathbf{Z}_6$ telle que $f = h \circ g$. Montrer que h est surjectif.

Exercice 2
On considère les deux applications $f : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_{12}$, $n \to 2n + 12\,\mathbf{Z}$ et $g : \mathbf{Z} \longrightarrow \mathbf{Z}_{18}$, $n \to 3n + 18\,\mathbf{Z}$.
Soit i l'injection canonique de $f(\mathbf{Z})$ dans $\mathbf{Z}_{12}$.
Montrer qu'il existe un isomorphisme de groupes $\bar{h} : g(\mathbf{Z}) \longrightarrow f(\mathbf{Z})$ vérifiant $f = i \circ \bar{h} \circ g$.

Exercice 4
On note:
 $*$ S_3 le groupe symétrique d'ordre 3, c-à-d, le groupe de toutes les bijections de $\{1, 2, 3\}$ sur lui-même, appelé groupe des permutations de $\{1, 2, 3\}$;
 $*$ $\mathrm{Aut}(G)$ le groupe de tous les automorphismes de G, G étant un groupe.
1) On pose $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 = \{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ où $x_0 = (\dot{0}, \dot{0})$, $x_1 = (\dot{0}, \dot{1})$, $x_2 = (\dot{1}, \dot{0})$ et $x_3 = (\dot{1}, \dot{1})$.
Soit $\sigma \in S_3$ une permutation et f_σ l'application de $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ sur $\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$ définie par $f_\sigma(x_0) = x_0$ et pour $1 \leq i \leq 3$, $f_\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$.
Montrer que f_σ est un automorphisme de groupe.
2) Montrer que l'application $\Theta : S_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2)$, $\sigma \to f_\sigma$ est un isomorphisme de groupes.
3) On désigne par $\mathbf{Z}_8^\times$ le groupe des éléments inversibles de $\mathbf{Z}_8$.
 a) Montrer que $\mathbf{Z}_8^\times = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}\}$.
 b) On pose $y_i = \overline{2i + 1}$ pour $i = 0, 1, 2, 3$. Montrer que $\psi : S_3 \to \mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_8^\times), \sigma \to \psi(\sigma) = g_\sigma$ telle que $g_\sigma(y_0) = y_0$ et pour $i = 1, 2, 3$, $g_\sigma(y_i) = y_{\sigma(i)}$ est un isomorphisme de groupes.
5) Montrer qu'il existe un isomorphisme de $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2)$ sur $\mathrm{Aut}(\mathbf{Z}_8^\times)$.

Exercice 5
Soit E et F deux groupes tels que E soit engendré par un élément a.
1) Montrer que tout morphisme f de E vers F est entièrement déterminé par la donnée de $f(a)$.
2) On suppose que E est un groupe d'ordre n. Montrer que l'ordre de $f(a)$ divise n.
3) Déterminer tous les morphismes de groupes de $\mathbf{Z}_3$ dans $\mathbf{Z}_7$, de $\mathbf{Z}_3$ dans $\mathbf{Z}_{12}$, de $\mathbf{Z}_{12}$ dans $\mathbf{Z}_3$.