PLAN DU COURS

1. Notions mathématiques utilisés en électromagnétisme

1.1. Les opérateurs vectoriels

Un champ de vecteurs est un domaine qui contient beaucoup de vecteurs de longueurs et d'orientations différentes. En électromagnétisme, on utilise des opérateurs (divergence, rotationnel, gradient) pour caractériser l'état d'un champ vectoriel.

Les composantes du vecteur $\vec{\nabla}$ sont plutôt des opérateurs en attente d'argument.

Cependant, on peut manipuler les composantes de $\vec{\nabla}$ exactement comme on manipule les composantes scalaires d'un vecteur ordinaire (mais avec quelques précautions liées au fait que $\vec{\nabla}$ n'est pas commutatif avec toutes les opérations).

L'opérateur nabla $\vec{\nabla}$ est un outil très commode pour manipuler aisément les principaux opérateurs différentiels :

$$\vec{\nabla} = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Les opérateurs vectoriels s'écrivent parfois à l'aide de l'opérateur nabla sous les formes respectives suivantes :

- le gradient d'un champ scalaire f est noté

$$\overrightarrow{grad}\,(f) = \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{e}_z$$

- la divergence d'un champ vectoriel est notée

$$div\,(\vec{v}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

- le rotationnel d'un champ vectoriel est noté

$$\overrightarrow{rot}\,(\vec{v}) = \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right]\,\vec{e}_x + \left[\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right]\,\vec{e}_y + \left[\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right]\,\vec{e}_z$$

Gradient : $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \vec{\nabla} f$

Divergence : $\mathrm{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$

Rotationnel : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$

Laplacien : $\Delta f = \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\right) f = \left(\nabla^2\right) f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f.$

Laplacien vectoriel : $\Delta\vec{A} = \left(\nabla^2\right)\vec{A}$

$\vec{A}\cdot(\vec{B}\wedge\vec{C})=\vec{B}\cdot(\vec{C}\wedge\vec{A})=\vec{C}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B})$
$\vec{A}\wedge(\vec{B}\wedge\vec{C})=(\vec{A}\cdot\vec{C})\vec{B}-(\vec{A}\cdot\vec{B})\vec{C}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f)=\vec{0}$
$\mathrm{div}\,(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A})=0$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A})-\Delta\vec{A}$
$\mathrm{div}\,(f\,\vec{A})=\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f+f\,\mathrm{div}\,\vec{A}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,(f\,\vec{A})=f\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}\;-\;\vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}(f\,g)=g\,\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\right)+f\,\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g\right)$

$\mathrm{div}(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}-\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}$
$\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B})=\vec{A}\,\mathrm{div}\,\vec{B}-\vec{B}\,\mathrm{div}\,\vec{A}+$ $(\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A}-(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{B})=\vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{B}+\vec{B}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}+$ $(\vec{B}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A}+(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{B}$
$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\vec{A}\cdot\vec{A})=2\vec{A}\wedge\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A}+2(\vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}})\vec{A}$
$\Delta(f\,g)=f\Delta g+g\Delta f+2\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,g$

Les opérateurs vectoriels (gradient, divergence et rotationnel) servent à caractériser un champ vectoriel ou scalaire.

Le **gradient** d'un champ scalaire en un point donné est un vecteur qui pointe dans la direction où le champ varie le plus vite.

La **divergence** d'un champ vectoriel est un scalaire dont la valeur indique le caractère plus ou moins divergent du champ.

Le **rotationnel** d'un champ vectoriel renseigne sur le caractère plus ou moins tournant du champ. Lorsqu'un champ vectoriel possède une composante tournante, alors le rotationnel de ce champ correspond à l'axe de rotation du champ.

La divergence d'un champ rotationnel est nulle c-à-d $div(\overrightarrow{rot}\vec{A})=0$.

Le rotationnel d'un champ de gradient est nul c-à-d $\overrightarrow{rot}(\vec{\nabla}\vec{A})=\vec{0}$.

1.2. Les équations de Maxwell

Les équations de base de l'électromagnétisme dans le vide, en présence de charges et de courants, sont les quatres équations de MAXWELL :

MAXWELL-GAUSS : $\mathrm{div}\,\vec{E}=\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$; MAXWELL-FLUX : $\mathrm{div}\,\vec{B}=0$

MAXWELL-FARADAY : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E}=-\dfrac{\partial\vec{B}}{\partial t}$; MAXWELL-AMPÈRE : $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B}=\mu_0\left(\vec{j}+\varepsilon_0\dfrac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)$

Avec :

- ρ est la densité volumique de charge : $\rho=\frac{dq}{d\tau}$
- $\vec{j}$ la densité volumique de courant : $\vec{j}=\sum_k\rho_k\vec{v}_k$
  ρ_k est la densité de charges mobiles de type k qui ont une vitesse $\vec{v}_k$

2. Ondes

2.1. Généralités

On appelle **onde** un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se déplace dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Une onde est simplement une perturbation ou une oscillation qui se propage par rapport à un état d'équilibre, qui se propage en véhiculant avec elle de l'énergie et de la quantité de mouvement, mais sans transport de matière. On dit qu'une onde se propage de proche en proche.

Si l'agitation est périodique, alors on obtient une onde ***périodique***. Si l'agitation est un simple aller-retour, l'onde obtenue est momentanée autant dans l'espace que dans le temps et on la qualifie d'***impulsion***.

L'observation de diverses ondes renseigne les physiciens sur la source qui a émis l'onde et sur le milieu de propagation qui l'a véhiculée jusqu'à l'observateur.

Par exemple, la lumière émise ou absorbée par les substances à l'état gazeux nous permet de nous représenter la structure de leurs atomes et de leurs molécules.

L'observation des ondes sismiques nous permet de modéliser la structure du noyau de la Terre ; l'analyse de la lumière provenant des étoiles nous permet de déduire leur mouvement et leur composition chimique.

Une onde est modélisée par une fonction du temps et d'une variable spatiale. La propagation de l'onde se traduit par une forme mathématique particulière de cette fonction. On étudiera le cas des ondes sinusoïdales qui sont périodiques dans le temps et dans l'espace.

2.2. Équation d'onde

L'équation des ondes est une équation différentielle à dérivées partielles. Pour un champ scalaire $u(x, y, z, t)$, elle s'écrit :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

La constante c est une vitesse. Cette équation est aussi appelée *équation de d'Alembert*. Une solution de cette équation est appelée *fonction d'onde*.

Une *onde plane* est par définition une onde qui ne dépend que d'une absisse x sur un axe. L'équation des ondes s'écrit alors :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Une propriété important de cette équation est sa linéarité : une combinaison linéaire de solutions est aussi solution de l'équation.

Il existe deux modes de propagation, c'est-à-dire deux façons de perturber ou de faire osciller les particules du milieu de propagation :

- dans une **onde transversale,** le déplacement des particules est perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.
- dans une **onde longitudinale**, le déplacement des particules est parallèle à la direction dans laquelle l'onde se propage.

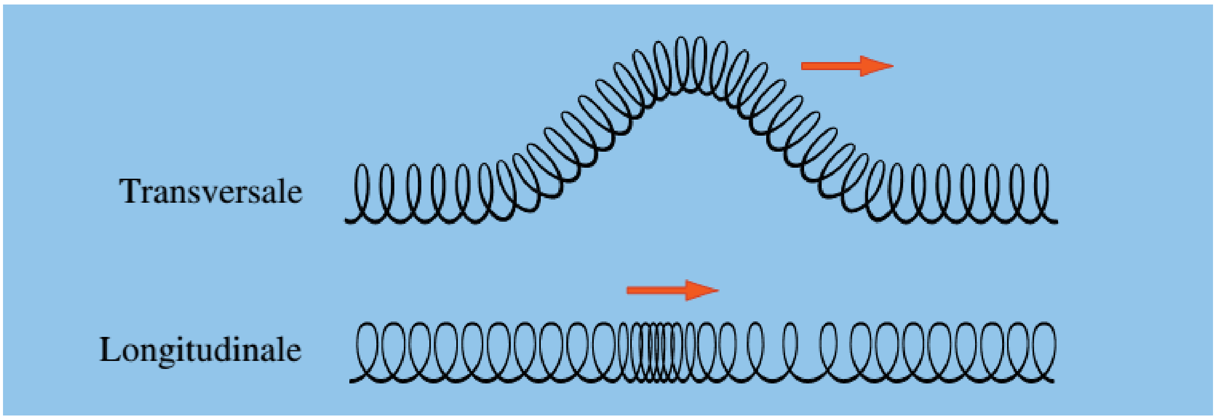

Figure 1 – Ondes transversale et longitudinale

Une onde est **longitudinale** quand l'amplitude de l'onde est orientée dans la même direction que sa direction de propagation.
Une onde est **transverse** quand l'amplitude de l'onde est orientée perpendiculairement à sa direction de propagation.

3. Onde plane progressive

Définition : Une **Onde** est dite **Plane** si à un instant t donné, la grandeur qui carectérise l'onde qui se propage est la même en tous les points d'un plan perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde.
Définition : Une **Onde Plane Progressive** est une onde plane qui se propage dans un sens et une direction bien déterminés. On la note en abrégé **OPP**.
Propriété : Les solutions de l'équation de D'ALEMBERT, qui est une équation différentielle linéaire, peuvent s'écrire comme la superposition de deux OPP se propageant dans des sens opposés, on obtient alors une onde plane non progressive :

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{\mathbf{v}}\right) + g\left(t + \frac{x}{\mathbf{v}}\right)$$

Une caractéristique essentielle d'une onde progressive est sa vitesse de propagation c (pour célérité). Elle dépend, pour un type d'onde donné, des caractéristiques du milieu de propagation. En physique le mot « milieu » désigne un espace, qu'il contienne ou non de la matière. On distingue deux types de milieux :

- les milieux matériels, qui contiennent de la matière (exemples : l'air, l'eau, etc.) ;
- le vide, qui est un milieu ne contenant aucune matière.

Il faut distinguer deux catégories d'ondes progressives :

- les ondes mécaniques
- les ondes électromagnétiques.

Une onde est mécanique si la perturbation met localement le milieu en mouvement. Ce sont les mouvements du milieu qui se transmettent de proche en proche et qui permettent la propagation de la perturbation. Une onde mécanique ne peut donc exister que dans un milieu matériel.

Exemples d'ondes mécaniques :

- ❖ les ondes sonores ;
- ❖ les vagues à la surface de l'eau.

Une onde est électromagnétique si la perturbation est une variation des propriétés électriques et magnétiques du milieu. Une onde électromagnétique peut exister dans tous les milieux : les milieux matériels et le vide.

Exemples d'ondes électromagnétiques :

- ❖ les ondes lumineuses
- ❖ les ondes radio
- ❖ les micro-ondes.

Les ondes électromagnétiques couvrent un très large spectre de fréquence, dont la lumière visible ($\lambda \in [400\,\mathrm{nm}, 800\,\mathrm{nm}]$) constitue une petite partie.

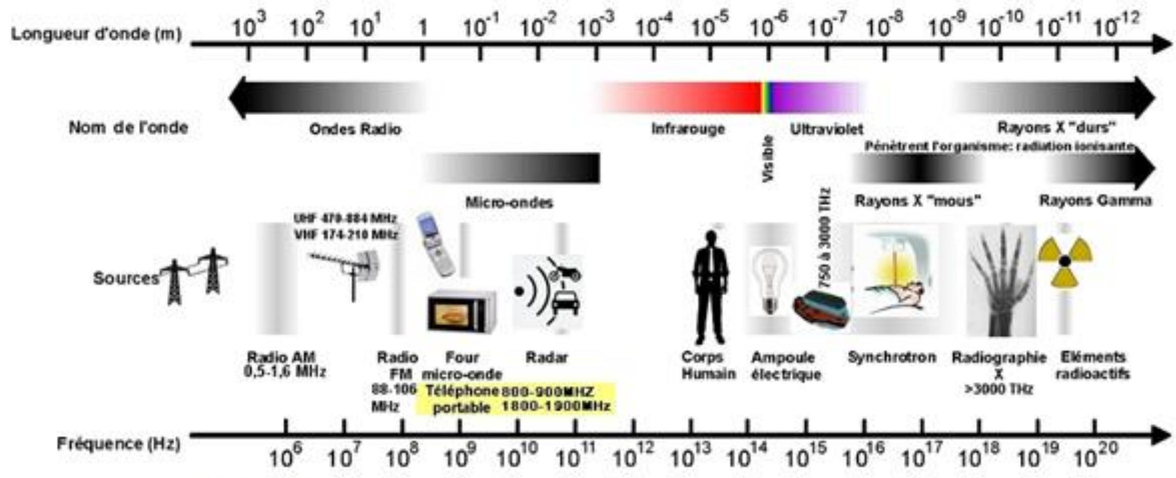

Figure 2 - Spectre des ondes électromagnétiques

4. Fonction d'onde

Quand une onde se propage dans la corde, on peut décrire quantitativement la perturbation qu'elle crée par une fonction d'onde où y est la variable dépendante. Cette fonction doit avoir deux variables indépendantes : elle mesure la perturbation d'une particule du milieu (ou d'un segment extrêmement court) en fonction du temps t et aussi en fonction de la position d'équilibre x où cette particule ou ce segment est situé le long du milieu. Elle a donc la forme :

$y = f(x,t)$ → fonction d'onde scalaire ;

$\vec{y} = f(x,t)$ → fonction d'onde vectorielle.

La fonction d'onde permet de décrire une onde en donnant le déplacement de chaque particule de son milieu de propagation en fonction de deux variables indépendantes : le temps et l'endroit où cette particule est située.

Une **fonction d'onde scalaire** est une fonction des coordonnées de l'espace et du temps qui est solution de l'équation d'onde.

Une **fonction d'onde vectorielle** est un vecteur dont les composantes sont des fonctions des coordonnées de l'espace et du temps qui sont solutions de l'équation d'onde.

Quel que soit le matériau dans lequel l'onde se propage, l'expérience montre que ce sont presque exclusivement les propriétés de ce milieu de propagation qui déterminent la vitesse des ondes qui s'y propagent, la source de ces ondes ayant généralement peu ou pas d'influence sur cette vitesse de propagation.

En général, la vitesse de propagation d'une onde mécanique dans un milieu est de la forme : $v = \sqrt{\dfrac{facteur\ \ de\ force\ de\ rétablissement}{facteur\ d'inertie}}$

Vitesse de propagation d'une onde le long d'une corde : $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ où F est la tension dans la corde et μ, sa densité de masse linéique.

Une onde qui se propage à la vitesse c dans le sens des x positifs sans changer de forme est décrite par une fonction d'onde de la forme :

$$y = f(x - vt)$$

alors que, si elle se déplace vers les x négatifs, la fonction d'onde a la forme :

$$y = f(x + vt)$$

La fonction d'onde d'une onde sinusoïdale progressive se propageant à la vitesse v est

$$y = A\sin(kx \pm \omega t + \phi)$$

où le nombre d'onde est $k = 2\pi/\lambda$, la fréquence angulaire est $\omega = 2\pi/T$ et le signe dépend du sens de propagation de l'onde. La longueur d'onde est déterminée par la vitesse de propagation de l'onde selon

$$\lambda = v\,T = \frac{v}{f}$$

Deux ondes sinusoïdales de même fréquence et de même amplitude se propageant dans le même sens ne peuvent se distinguer que par leur différence de

phase $\Delta\phi = \Delta\phi_{\delta} + \Delta\phi_{\Delta t}$, dont la cause peut être une différence de marche δ, un délai Δt ou une combinaison des deux :

$$\frac{\Delta\phi_{\delta}}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda}$$

$$\frac{\Delta\phi_{\Delta t}}{2\pi} = \frac{\Delta t}{T}$$

Leur amplitude résultante est donnée par

$$A_{\mathrm{T}} = 2A\cos(\frac{\Delta\phi}{2})$$

Cette amplitude est maximale si

$$\Delta\phi = n(2\pi)$$

où n est un entier positif, négatif ou nul, et elle est nulle si

$$\Delta\phi = (n + \frac{1}{2})(2\pi)$$

Deux ondes sinusoïdales de même fréquence et de même amplitude se propageant dans des sens opposés peuvent produire des ondes stationnaires dont la fonction d'onde est

$$y(x, t) = 2A\cos(\omega t)\sin(kx)$$

Dans un système de dimensions finies, comme une corde fixée à ses deux extrémités, les conditions aux limites imposent des limitations sur les fréquences possibles des ondes stationnaires résonantes :

$$f_n = \frac{nv}{2L} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

Une **onde monochromatique** est une onde qui est décrite par une pulsation unique ω correspondant à un nombre d'onde k. On peut représenter mathématiquement cette fonction d'onde par une écriture réelle :

$$A(x,\, t) = A_0\cos(kx \pm \omega t),$$

ou complexe :

$$A(x,\, t) = A_0 \mathrm{e}^{i(kx \pm \omega t)}.$$

Le signe + désigne une onde qui se propage dans le sens des x décroissants tandis que le signe $-$ désigne une propagation dans le sens des x croissants.

L'équation de d'Alembert impose une relation entre k et ω appelée relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2}{v^2}$$

Il y a 02 solutions possibles :

$$k = \frac{\omega}{v} \;\; ou \; k = -\frac{\omega}{v}$$

Avec k : vecteur d'onde ; ω : pulsation

5. Propagation d'onde à trois dimensions

Quand l'onde peut se propager dans les trois directions de l'espace, la direction de propagation est repérée par le vecteur unitaire $\vec{\kappa}$, et la position d'un point du plan ou de l'espace est repérée par $\vec{r}$. Le choix du système de coordonnées dépend des symétries du problème physique.

À deux ou trois dimensions, la propagation est désignée par un vecteur d'onde $\vec{k}$. En notant $\vec{r}$ le vecteur position, l'**onde monochromatique** est notée

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)$$

ou

$$A(\vec{r}, t) = A_0 \mathrm{e}^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t)}.$$

avec

$$\vec{k} = k\vec{\kappa}$$

le **vecteur d'onde**.

Où $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ et **V** est appelée la **célérité** de l'onde. Ainsi, $\psi(\vec{r}, t)$ désigne l'amplitude de l'onde au point M à l'instant t.

La phase de l'onde est $\phi = \vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t$ et l'ensemble des points de l'espace qui correspondent à la même valeur de ϕ est appelé un **front d'onde** ou une **surface d'onde**.
À un instant donné, par exemple $t = 0$, la phase vaut

$$\phi_0 = \vec{k} \cdot \vec{r} = k\vec{\kappa} \cdot \vec{r}.$$

Les points de l'espace qui sont associés à cette valeur de la phase sont donnés par

$$d\phi_0 = k\vec{\kappa} \cdot d\vec{r} = 0.$$

Cette relation montre que la phase est constante quand on se déplace perpendiculairement à la direction de propagation $\vec{\kappa}$ de l'onde. Les fronts d'ondes sont donc des surfaces en tout point perpendiculaires au vecteur d'onde $\vec{k}$.
La géométrie des fronts d'ondes est dépendante de la nature de la source de l'onde et de la nature du milieu dans lequel se fait la propagation. En général, on distingue trois types d'ondes caractéristiques des principales symétries : les ondes planes, cylindriques (ou circulaires) et sphériques.

6. Onde monochromatique plane

Une onde est **plane** quand les fronts d'ondes sont des surfaces planes. Cela correspond à un vecteur d'onde $\vec{k}$ orienté suivant une seule direction de l'espace. Les fronts d'ondes sont des plans parallèles entre eux séparés d'une distance $\lambda = 2\pi/k$ et tous perpendiculaires à la direction $\vec{\kappa}$. La position absolue de ces plans dépend du temps car cet ensemble se déplace à des vitesses $\pm\,\omega/k$.

Si le vecteur d'onde est orienté suivant la direction x, le vecteur propagation est $\vec{\kappa} = \vec{e}_x$ et l'onde plane monochromatique est notée

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t).$$

Si cette onde se propage dans un espace à trois dimensions, la valeur de l'amplitude de l'onde est constante dans tout plan (yz) perpendiculaire à x.

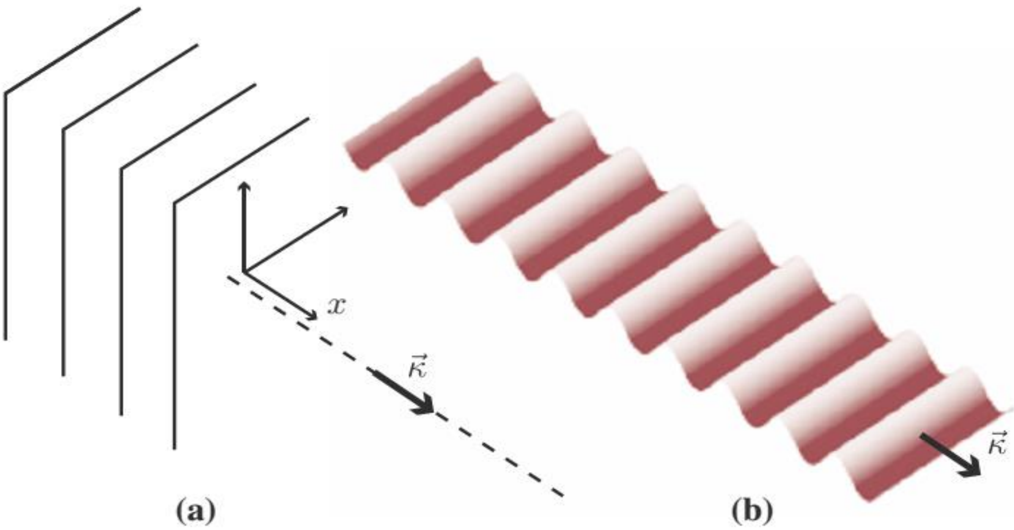

Figure 3 - Illustrations des fronts d'onde plane **(a)** et de l'amplitude d'une onde se propageant selon l'axe x **(b)**

7. Onde monochromatique sphérique

Quand la propagation admet une symétrie ponctuelle dans un espace **isotrope** à trois dimensions, l'équation d'onde admet comme solutions les combinaisons linéaires des ondes monochromatiques sphériques. La direction de propagation est donnée par

$$\vec{\kappa} = \kappa_r \vec{e}_r, \quad \kappa_\theta = 0, \quad \kappa_\varphi = 0,$$

et l'opérateur laplacien en coordonnées sphériques (voir annexe A) est tel que :

$$\Delta A = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA).$$

L'équation d'onde (3.10) s'écrit donc

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) - \frac{1}{\mathbf{V}^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rA) - \frac{1}{\mathbf{V}^2}\frac{\partial^2 (rA)}{\partial t^2} = 0.$$

On retrouve ici une équation d'onde à une dimension d'espace dont la solution rA se décompose sous la forme d'une somme $F(r - vt) + G(r + vt)$. La fonction d'onde sphérique est donc de la forme

$$A(r, t) = \frac{1}{r} F(r - vt) + \frac{1}{r} G(r + vt)$$

et l'onde monochromatique sphérique s'écrit sous la forme

$$A(\vec{r}, t) = \frac{A_0}{r} \cos(k\|\vec{r} - \vec{r}_0\| \pm \omega t),$$

avec $\vec{r}_0 = (r_0, \theta_0, \varphi_0)$ la position de la source ou du point d'absorption et $\vec{r} = (r, \theta, \varphi)$ les coordonnées sphériques du point considéré.
Les fronts d'onde ont la forme de sphères concentriques centrées sur $\vec{r}_0$ et on distingue les ondes divergente et convergente.

8. Théorème de Poynting

Si une onde est incidente sur un conducteur, les électrons sont forcés de bouger (va et vient) et de l'énergie est dissipée en chaleur. Cette énergie provient de l'onde.

À partir des équations de Maxwell, le théorème de Poynting est :

$$\oint (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = -\int \vec{J} \cdot \vec{E} dv - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \epsilon E^2 dv - \frac{\partial}{\partial t} \int \frac{1}{2} \mu H^2 dv$$

Le premier terme à droite est l'équivalent de la loi de Joule pour la puissance instantanée dissipée dans un volume. Les deux prochains termes sont les densités d'énergie des champs statiques (pour $\vec{E}$ et $\vec{H}$). La partie à gauche de l'équation est une densité de puissance, qui donne la puissance totale qui sort d'une surface fermée. Le théorème de Poynting est une expression de la conservation d'énergie : il exprime le fait que le taux de diminution d'énergie stockée dans les champs électriques et magnétiques d'un volume, moins l'énergie dissipée en chaleur, doit être égal à la puissance qui sort de la surface qui recouvre le volume.

On peut définir le vecteur de Poynting :

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$$

Ce vecteur représente la densité et la direction de la puissance, en W/m^2.

Pour une onde plane uniforme, on peut définir une expression semblable à celle des circuits ($P = VI$) pour calculer la puissance moyenne. Pour des circuits à sources sinusoïdales, la puissance moyenne est :

$$P_{avg} = \frac{1}{2} \mathfrak{Re}\{VI^*\}$$

De la même façon, pour une onde plane on a (remarquez que c'est un vecteur) :

$$\vec{P}_{avg} = \frac{1}{2} \mathfrak{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\}$$

et la puissance qui traverse une surface est :

$$P = \int \vec{P}_{avg} \cdot d\vec{s}$$

Dans le cas générale d'une onde de la forme :

$$\vec{E}(z,t) = E_{x0} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \phi)\, \hat{\mathbf{a}}_x \;\; [\mathrm{V/m}]$$

l'équation de la puissance moyenne devient :

$$\vec{P}_{avg} = \frac{1}{2} \frac{E_{x0}^2}{|\eta|} e^{-2\alpha z} \cos(\theta_\eta)\, \hat{\mathbf{a}}_z$$

où θ_η est l'angle de l'impédance intrinsèque.