L2 MASS

2012/2013

Aide-mémoire
et exercices corrigés.

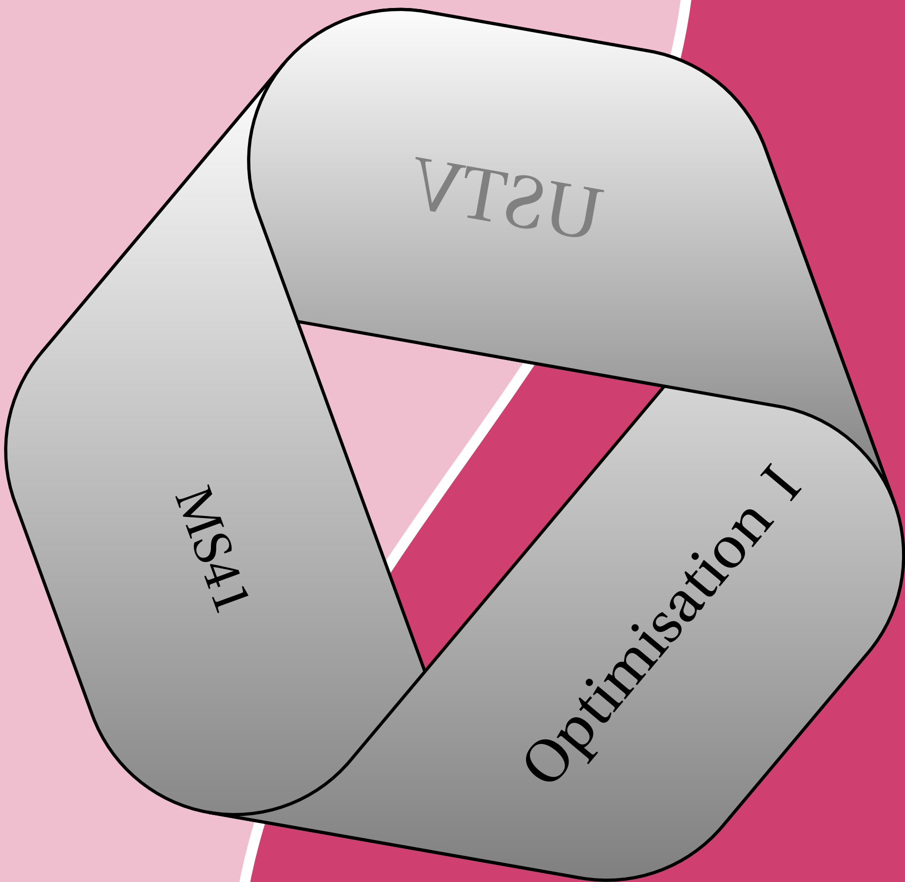


Table des matières

G. FACCANONI

Dernière mise-à-jour
Lundi 11 février 2013

Ce cours s'adresse à des étudiants de la deuxième année d'une Licence MASS. Il a pour objectif de donner les bases en calcul différentiel pour des fonctions de plusieurs variables indispensables à toute formation en mathématiques appliquées à l'économie. Les notions supposées connues correspondent au programme de la première année.

L'objet de ce aide-mémoire est de proposer une explication succincte des concepts vu en cours. De nombreux livres, parfois très fournis, existent. Ici on a cherché, compte tenu des contraintes de volume horaire, des acquis des étudiants à la première année et des exigences pour la suite du cursus, à dégager les points clés permettant de structurer le travail personnel de l'étudiant voire de faciliter la lecture d'autres ouvrages. Ce polycopiée ne dispense pas des séances de cours et de TD ni de prendre des notes complémentaires. Il est d'ailleurs important de comprendre et apprendre le cours au fur et à mesure. Ce polycopié est là pour éviter un travail de copie qui empêche parfois de se concentrer sur les explications données oralement mais **ce n'est pas un livre auto-suffisant (il est loin d'être exhaustif) !** De plus, ne vous étonnez pas si vous découvrez des erreurs (merci de me les communiquer).

On a inclus dans ce texte nombreux exercices corrigés. Ceux-ci, de difficulté variée, répondent à une double nécessitée. Il est important de jongler avec les différents concepts introduits en cours et même de faire certaines erreurs une fois pour bien identifier les pièges. Les exercices permettent d'orienter les raisonnements vers d'autres domaines (physique, économie, etc.), cela afin d'exhiber l'intérêt et l'omniprésence des fonctions de plusieurs variables et de l'optimisation. Cependant, veuillez noter que vous n'obtiendrez pas grande chose si vous vous limité à choisir un exercice, y réfléchir une minute et aller vite voir le début de la correction en passant tout le temps à essayer de comprendre la correction qui va paraitre incompréhensible. Pour que la méthode d'étude soit vraiment efficace, il faut d'abord vraiment essayer de chercher la solution. En particulier, il faut avoir un papier brouillon à coté de soi et un crayon. La première étape consiste alors à traduire l'énoncé (pas le recopier), en particulier s'il est constitué de beaucoup de jargon mathématique. Ensuite il faut essayer de rapprocher les hypothèses de la conclusion souhaitée, et pour cela faire quelques calculs ou transformer les hypothèses pour appliquer un théorème dont on aura vérifier que les hypothèses sont bien satisfaite. C'est ici que l'intuition joue un grand rôle et il ne faut pas hésiter à remplir des pages pour s'apercevoir que l'idée qu'on a eu n'est pas la bonne. Elle pourra toujours resservir dans une autre situation. Quand finalement on pense tenir le bon bout, il faut rédiger soigneusement en s'interrogeant à chaque pas sur la validité (logique, mathématique) de ce qu'on a écrit. Si l'étape précédente ne donne rien, il faut chercher de l'aide (voir le début de la correction, en parler à un autre étudiant, interroger les tuteurs).

Gloria FACCANONI

IMATH Bâtiment U-318
Université du Sud Toulon-Var
Avenue de l'université
83957 LA GARDE - FRANCE

☎ 0033 (0)4 94 14 23 81

✉ gloria.faccanoni@univ-tln.fr
ℹ http://faccanoni.univ-tln.fr

1 Fonctions de plusieurs variables

Qu'il s'agisse de traiter des questions relatives à la biologie, la chimie, la physique, la production, la consommation ou encore l'environnement, etc. une modélisation adéquate s'exprime le plus souvent à l'aide de fonctions de plusieurs variables. Ce chapitre introduit les fonctions de plusieurs variables réelles en élargissant les définitions énoncées dans le module M11 pour les fonctions d'une variable réelle. Évidemment, la représentation géométrique devient plus lourde : une fonction de n variables se visualise à priori dans un espace à $n+1$ dimensions (n pour les variables, 1 pour la fonction), alors que les pages d'un livre sont, par nature, bidimensionnelles. Pour contourner cette impossibilité technique, nous nous limiterons aux représentations des fonctions de deux variables, soit sous forme de dessins en perspective, soit sous forme de coupes par des plans horizontaux ou verticaux qui donnent des informations souvent utiles, quoique parcellaires. Ce problème de visualisation introduit une rupture nette par rapport aux fonctions d'une variable étudiées antérieurement. Nous prenons le parti de privilégier les thèmes qui s'écartent des notions vues pour les fonctions d'une seule variable. À l'opposé, les définitions et les propriétés qui apparaissent comme des généralisations évidentes sont évoquées ou présentées brièvement.

Définition *Fonction de plusieurs variables*

- ▷ Une *fonction* f, définie sur une partie $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^n$ et à valeurs réelles, fait correspondre à tout point $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathscr{D}$ un réel unique $f(\mathbf{x})$.
- ▷ Le *domaine de définition* de f est l'ensemble $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$.
- ▷ L'*image* par f de $\mathscr{D}$ est l'ensemble $\operatorname{Im}_f(\mathscr{D}) = \left\{ r \in \mathbb{R} \,\middle|\, r = f(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \right\} \subset \mathbb{R}$.
- ▷ L'ensemble des points $S = \left\{ (\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \,\middle|\, \mathbf{x} \in \mathscr{D} \right\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ est la *surface représentative* de f ; c'est l'analogue de la courbe représentative d'une fonction d'une variable.

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ se note aussi $\vec{x}$ ou $\underline{x}$. Si $n = 2$, on utilise souvent la notation (x, y), si $n = 3$ la notation (x, y, z).

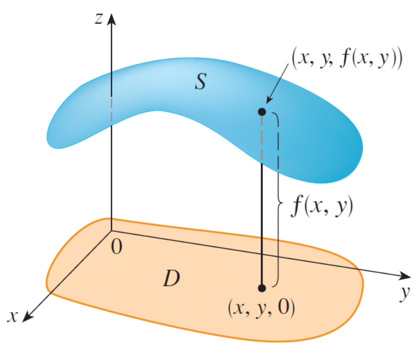
Exemple *d'applications à la gestion*

1. La production P d'une entreprise est souvent exprimée en fonction de deux facteurs synthétiques, le capital, noté K, et le travail, noté W : $P = f(K, W)$.
2. L'utilité U d'un consommateur dépend de ses quantités consommées. En présence de n biens, la fonction d'utilité s'exprime sous la forme $U = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, où x_i désigne la quantité consommée du i-ème bien disponible ($i = 1, \dots, n$).
3. Le coût C d'une brochure publicitaire dépend de son format F, du nombre m de couleurs utilisées, de la surface s consacrée aux photographies : $C = f(F, m, s)$. Le format F dépend quant à lui de la longueur p, de la largeur q et du nombre de pages n : $F = g(p, q, n)$. Ainsi $C = f(F(p, q, n), m, s) = h(p, q, n, m, s)$.

Lorsque $n = 2$, le graphe

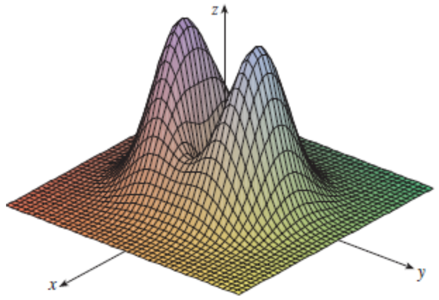
$$\mathscr{G}_f \equiv \left\{ (x, y, z = f(x, y)) \,\middle|\, (x, y) \in \mathscr{D} \right\}$$

est tridimensionnel. Les axes relatifs aux variables, x et y, sont conventionnellement situés dans un plan horizontal (le domaine $\mathscr{D}$ apparaît alors comme un sous-ensemble de ce plan), tandis que la dimension verticale est réservée aux valeurs de z. Ainsi, à tout $(a, b) \in \mathscr{D}$, dont l'image est $f(a, b) \in \mathbb{R}$, correspond le point suivant du graphe : $(a, b, f(a, b)) \in \mathbb{R}^3$. Une mise en perspective permet la visualisation des surfaces à trois dimensions. Dans ce cas, l'axe z est toujours placé verticalement. Toutefois, pour des raisons de lisibilité, les axes x et y ne sont pas toujours présentés selon la même orientation.

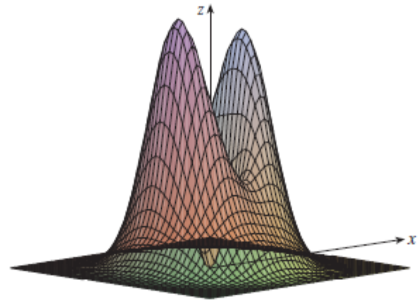


Pour $n > 2$, la représentation plane devient malheureusement impraticable.

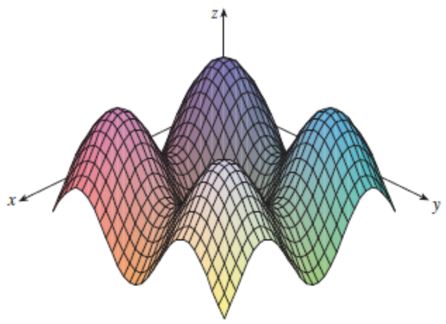
Exemple



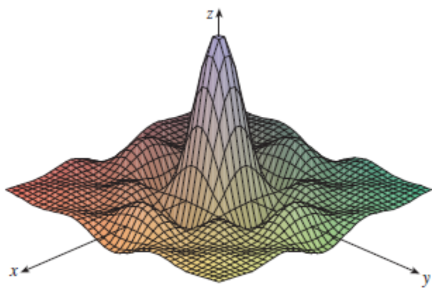
(a) $f(x,y) = (x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}$



(b) $f(x,y) = (x^2+3y^2)e^{-x^2-y^2}$



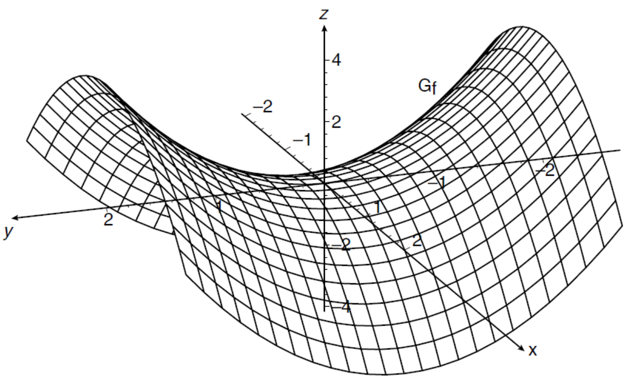
(c) $f(x,y) = \sin x + \sin y$



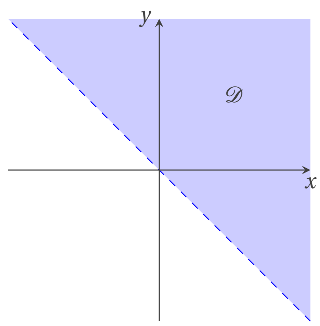
(d) $f(x,y) = \dfrac{\sin x \, \sin y}{xy}$

Exemple

Le graphe de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x^2 - y^2$ est une surface de $\mathbb{R}^3$ qui a la forme d'une selle de cheval, comme l'indique la représentation en perspective de la figure ci-dessous.



Le domaine de la fonction $f(x,y) = \sqrt{x+y}$ est donné par $\mathscr{D} = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x+y=0 \right\}$. Il se représente donc naturellement comme une portion du plan $\mathbb{R}^2$. En outre, les valeurs prises par la fonction parcourent tout l'ensemble des réels positifs ou nuls : $\operatorname{Im}_f(\mathscr{D}) = \mathbb{R}^+$.

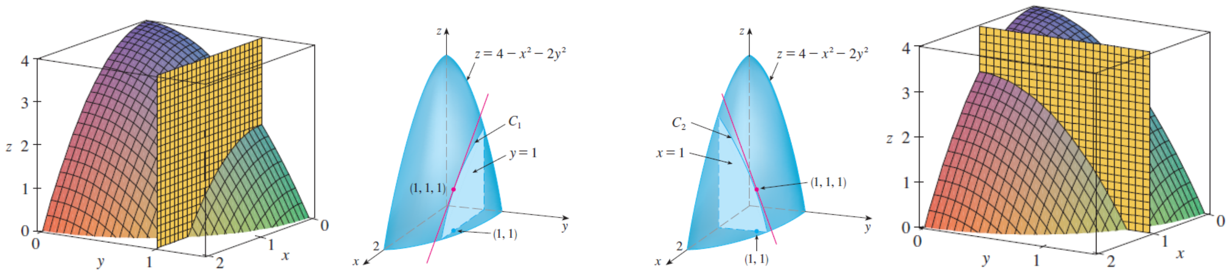


Définition *Fonctions partielles*

Soit f une fonction de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et (a,b) un point intérieur de $\mathscr{D}$. Les fonctions

$$f_b\colon x \mapsto f(x,b) \qquad \text{et} \qquad f_a\colon y \mapsto f(a,y)$$

définies sur un intervalle ouvert contenant respectivement a et b, sont appelées les fonctions partielles associées à f au point (a,b).



De la même manière, on peut considérer des coupes horizontales du graphe d'une fonction de deux variables et on obtient, de façon générale, des courbes planes, dites *courbes de niveau*. En pratique, on représente simultanément différentes courbes de niveau pour visualiser la progression du graphe. Cette représentation s'apparente aux cartes géographiques où le niveau correspond à l'altitude.

Définition *Lignes de niveau*

Soit $k \in \mathbb{R}$ et f une fonction de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$; l'ensemble $\left\{ (x, y) \in \mathscr{D} \;\middle|\; f(x, y) = k \right\}$ est la courbe de niveau k de la fonction f. Les courbes de niveau d'une fonction $f(x, y)$ fournissent une représentation géométrique de f sur le plan, alors que son graphe en donne une dans l'espace. La courbe de niveau k est la projection sur le plan d'équation $z = 0$ de l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal $z = k$.

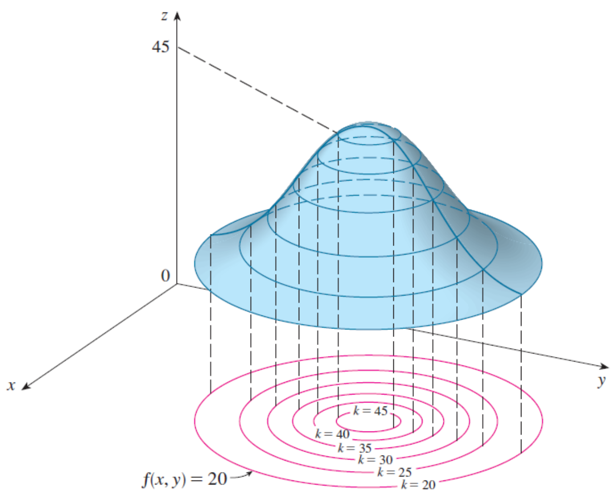
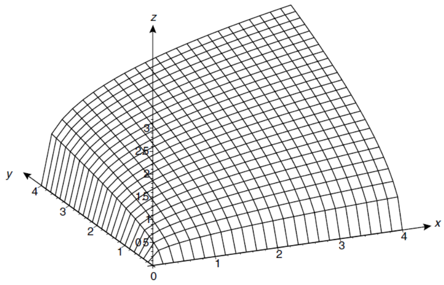
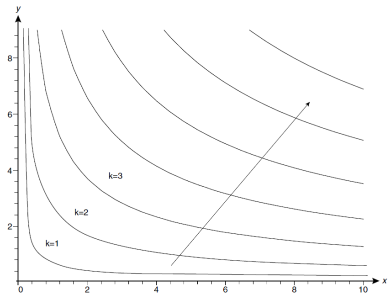


FIGURE 1.1: Relation entre le graphe d'une fonction et ses courbes de niveau. Géométriquement, la ligne de niveau est la projection sur le plan (x, y) de l'intersection de la surface représentative de f avec le plan d'équation $z = k$. Par exemple, si f représente la hauteur d'un point de la surface terrestre, ses courbes de niveau sont celles apparaissant sur les cartes topographiques.

Exemple

La fonction de production de COBB-DOUGLAS $f\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ s'écrit $f(x, y) = x^\alpha y^\beta$ (avec $\alpha, \beta > 0$). Les courbes de niveau d'une telle fonction sont nommées isocantes ou courbes d'isoproduction. Pour un niveau fixé $k > 0$ de production, l'équation $x^\alpha y^\beta = k$ détermine les points du plan (x, y) donnant toutes les combinaisons des quantités de facteurs qui permettent de produire ce niveau k.





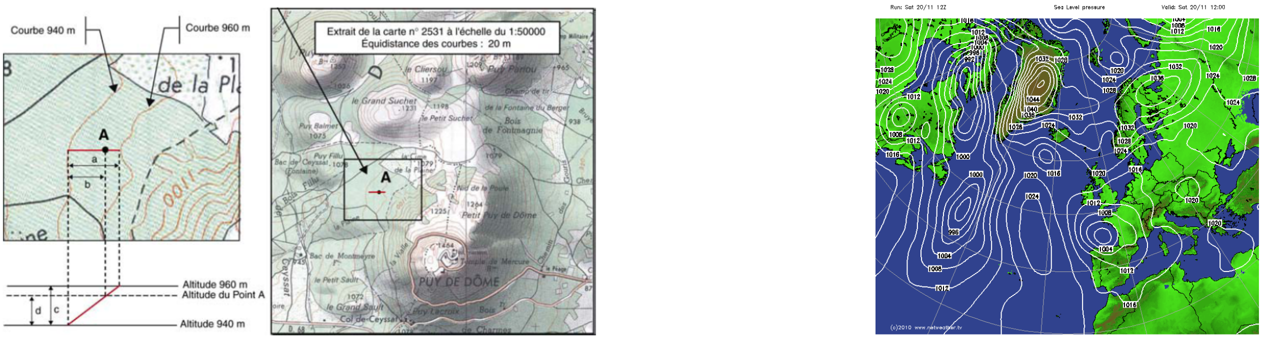
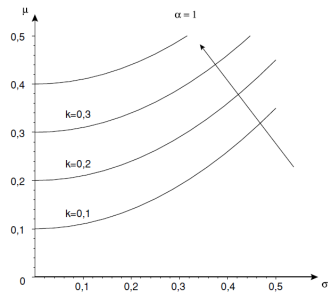


FIGURE 1.2: Les lignes de niveau reflètent souvent une réalité physique. Sur une carte topographique, elles désignent les points de même altitude (ici, l'altitude du point A est $940+d = 940+cb/a$). Sur une carte météorologique, elles sont les isothermes (lignes reliant les points d'égale température) ou les isobares (lignes reliant les points d'égale pression).

Exemple

Soit $\alpha > 0$ et considérons la fonction $f(\mu,\sigma) = \mu - \alpha\sigma^2$. Cette fonction est souvent utilisée en gestion de portefeuille : μ désigne la rentabilité attendue du portefeuille et σ sa volatilité (écart-type de la rentabilité). La fonction f représente l'utilité attendue d'un investisseur qui présente de l'aversion vis-à-vis du risque (σ^2 est affecté d'un coefficient négatif). Les courbes de niveau pour α fixé sont ici appelées courbes d'indifférence ou courbes d'iso-utilité puisqu'elles caractérisent les rentabilités attendues et les volatilités des portefeuilles qui atteignent, pour l'investisseur considéré, un niveau fixé d'utilité attendue.

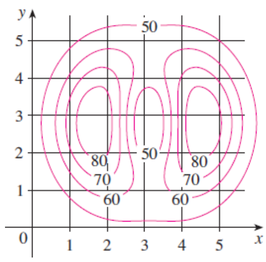


Cartes topographiques

On peut considérer le relief d'une région comme étant le graphe d'une fonction de deux variables (par exemple, l'altitude en fonction de la longitude et de la latitude). Une courbe de niveau nous indique les points de même altitude (ou de même niveau). En dessinant les courbes de niveau avec leur altitude correspondante, on obtient la *carte topographique du relief.* La lecture d'une carte topographique permet non seulement d'obtenir des mesures quantitatives du relief, mais aussi de faire rapidement des observations qualitatives sur sa nature. Par exemple, localiser les points de plus haute et de plus basse altitude ; les crêtes, les fonds, les vallées, les cols, etc. ; les endroits du relief où les pentes sont plus escarpées ou plus douces, puisqu'ils correspondent respectivement aux courbes de niveau très rapprochées ou très distantes.

Exemple

L'image ci-contre montre les courbes de niveaux d'une fonction f. On peut alors se faire une idée de l'allure de la fonction. Par exemple $f(1,3) \approx 72$, $f(4,5) \approx 56$, $f(3,3) < 50$ etc.



Exemple

Alice se rend chez son épicier pour y acheter des grappes de raisin et du fromage à la coupe. Le prix du raisin est fixé à 5 euros le Kg, celui du fromage considéré est de 18 euros le Kg. Si Alice décide d'acheter x Kg de raisin et y Kg de fromage, sa dépense en euros est de

$$D(x,y) = 5x + 18y.$$

Cette dépense constitue donc une fonction linéaire $D\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}_+$ des variables x et y. Le graphe obtenu est une portion de plan.

Si Alice décide de payer en liquide et dispose de L euros seulement, elle ne peut envisager que des budgets (x, y) tels que $D(x, y) \le L$. Graphiquement, ceci revient essentiellement à envisager une intersection de la surface S avec des plans horizontaux d'équation $z = k \in [0; L]$.

Exemple

Le nombre de voitures produites annuellement par une usine dépend du nombre x d'heures de travail et du capital y à disposition de la manière suivante :

$$N(x, y) = 2x^{2/3}y^{1/3}.$$

On suppose par ailleurs que le coût de production de q voitures s'élève à

$$C(q) = 1 + 3q + q^2$$

et l'on définit aussi une fonction bénéfice $B\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}$ par

$$B(q, p) = qp - C(q).$$

où p est le prix. N et B sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}^2_+$, à valeurs réelles, non linéaires : les surfaces ne sont plus des portions de plan ! On peut envisager d'étudier le comportement de la fonction B à prix fixé, c'est-à-dire lorsque p est fixé à une certaine valeur p_0. Graphiquement cela correspond à considérer l'intersection de la surface avec le plan vertical d'équation $p = p_0$. On peut aussi s'intéresser à l'ensemble des couples (q, p) permettant de réaliser le bénéfice B_0. Graphiquement cela correspond à considérer l'intersection de la surface avec le plan horizontal d'équation $z = B_0$. On peut de plus envisager la fonction $\widetilde{B}\colon \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ donnant le bénéfice annuel réalisé en fonction du nombre d'heures de travail, du capital et du prix unitaire fixé : $\widetilde{B}(x, y, p) = B(N(x, y), p)$. $\widetilde{B}$ est une fonction de 3 variables, son graphe se situe donc dans $\mathbb{R}^4$. Cependant les surfaces de niveaux peuvent être visualisées, ainsi que les variation de $\widetilde{B}$ en fonction de x lorsque les variables y et p sont fixées.

Exercices

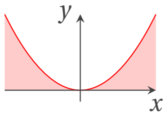
Exercice 1.1

Dans chaque cas, déterminez et représentez le domaine de définition des fonctions données.

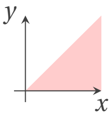
1. $f(x,y)=\frac{\sqrt{-y+x^2}}{\sqrt{y}}$
2. $f(x,y)=\frac{\ln(y)}{\sqrt{x-y}}$
3. $f(x,y)=\ln(x+y)$
4. $f(x,y,z)=\frac{\ln(x^2+1)}{yz}$

Correction.

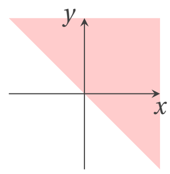
1. $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\le x^2 \text{ et } y>0\right\}$



2. $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0 \text{ et } x>y\right\}$



3. $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>-x\right\}$



4. $\mathscr{D}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid y\ne 0 \text{ et } z\ne 0\right\}$

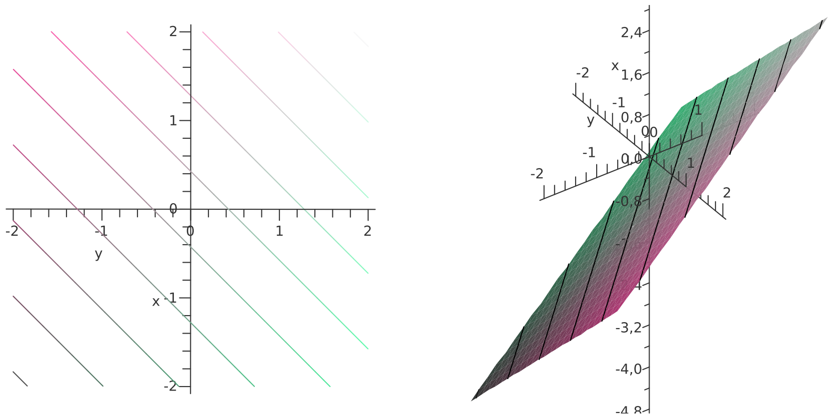
Exercice 1.2

Dans chaque cas, déterminez les courbes de niveau des fonctions de deux variables données. Esquissez ensuite leurs graphes (le graphe peut être vu comme un empilement de courbes de niveau qui forment une surface dans $\mathbb{R}^3$).

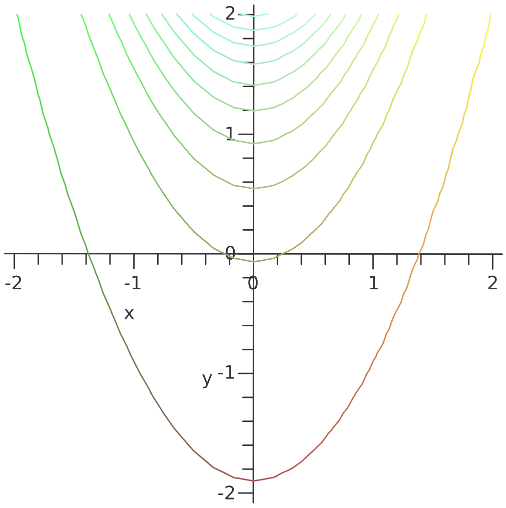
1. $f(x,y)=x+y-1$
2. $f(x,y)=e^{y-x^2}$
3. $f(x,y)=y-\cos(x)$

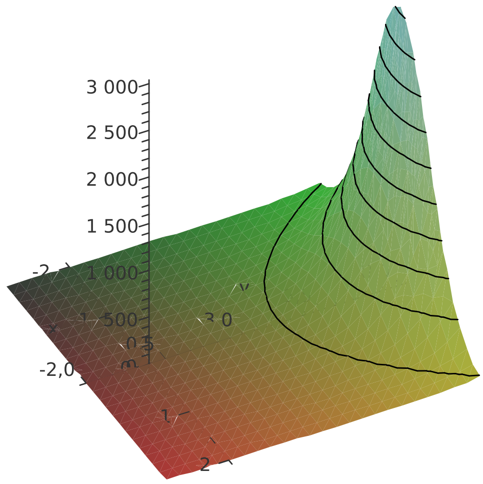
Correction.

1. $f(x,y)=x+y-1$: $f(x,y)=\kappa$ ssi $y=1-x-\kappa$, les courbes de niveau sont donc des droites et le graphe de f est un plan.

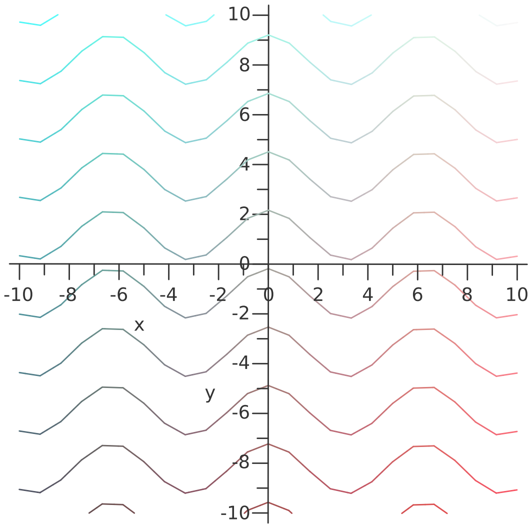


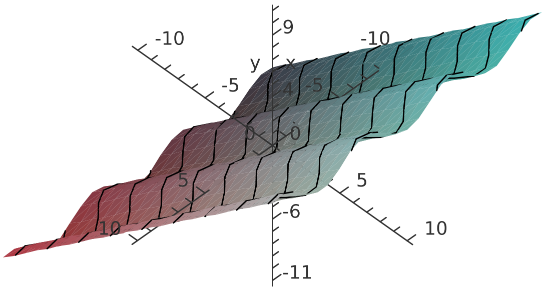
2. $f(x,y)=e^{y-x^2}$: $f(x,y)=\kappa$ ssi $y=x^2+\ln(\kappa)$, les courbes de niveau sont donc des paraboles. On observe notamment la croissance exponentielle marquée lorsque les valeurs prises par y sont grandes et celles prises par $|x|$ sont petites.





3. $f(x, y) = y - \cos(x)$: $f(x, y) = \kappa$ ssi $y = \cos(x) + \kappa$



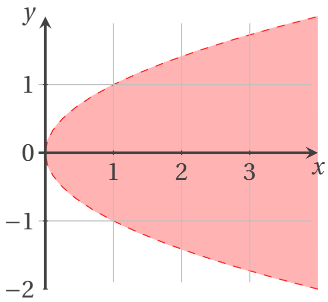


Exercice 1.3 *Domaine de définition, courbes de niveau*

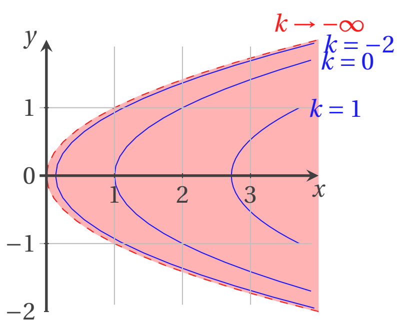
1. Déterminer et représenter le domaine de définition de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = \ln(x - y^2)$.
2. Déterminer et représenter ses courbes de niveau.

Correction.

$$\mathscr{D}_f = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y^2 > 0 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 < x \right\}$$



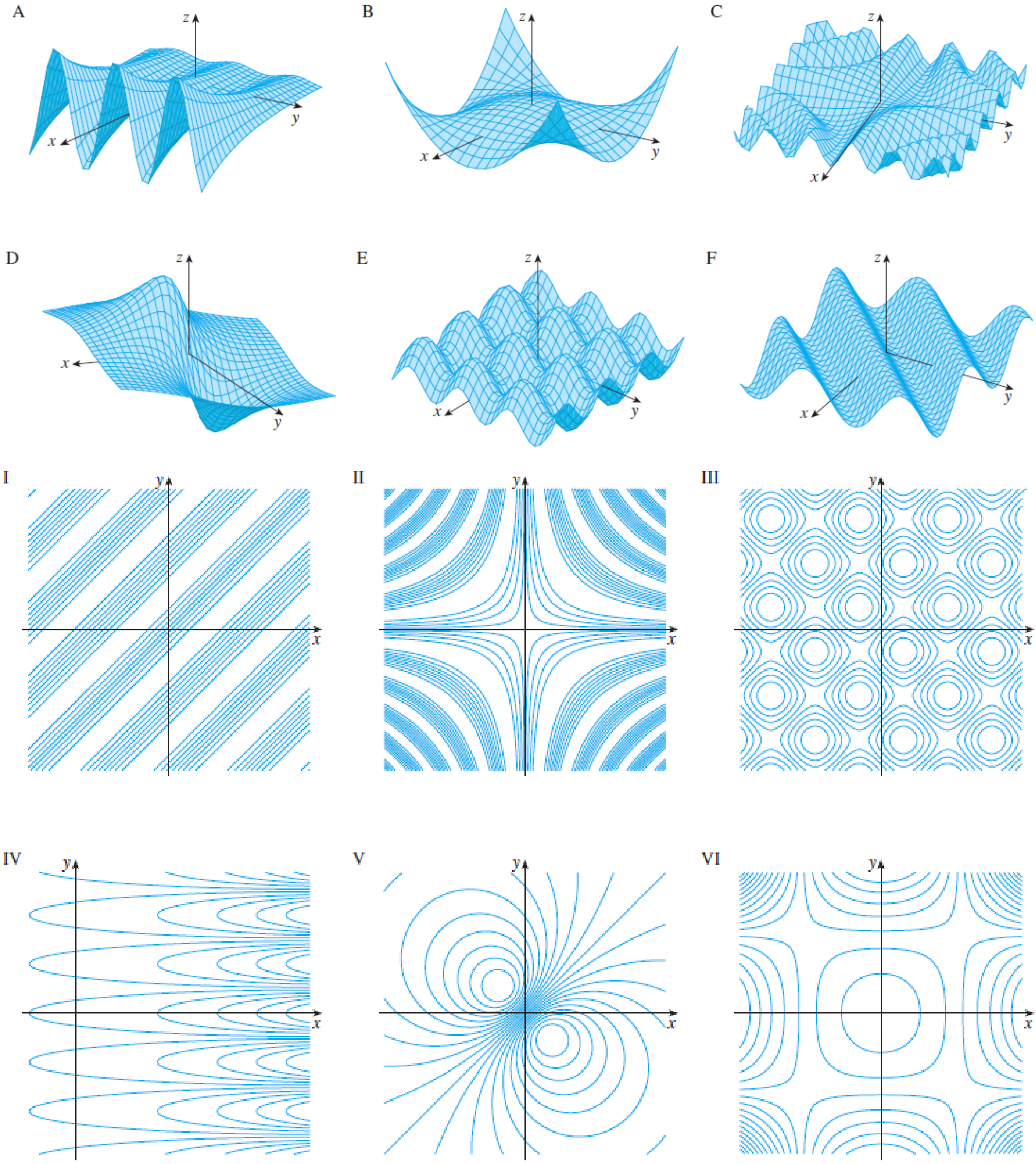
$$f(x, y) = k \iff x - y^2 = e^k \iff x = y^2 + e^k$$



Exercice 1.4

Associer chaque fonction (1-6) à sa surface (A-F) et à ses courbes de niveau (I-VI) :

1. $f(x, y) = \sin(xy)$
2. $f(x, y) = \sin(x - y)$
3. $f(x, y) = (1 - x^2)(1 - y^2)$
4. $f(x, y) = \frac{x-y}{1+x^2+y^2}$
5. $f(x, y) = e^x \cos(y)$
6. $f(x, y) = \sin(x) - \sin(y)$

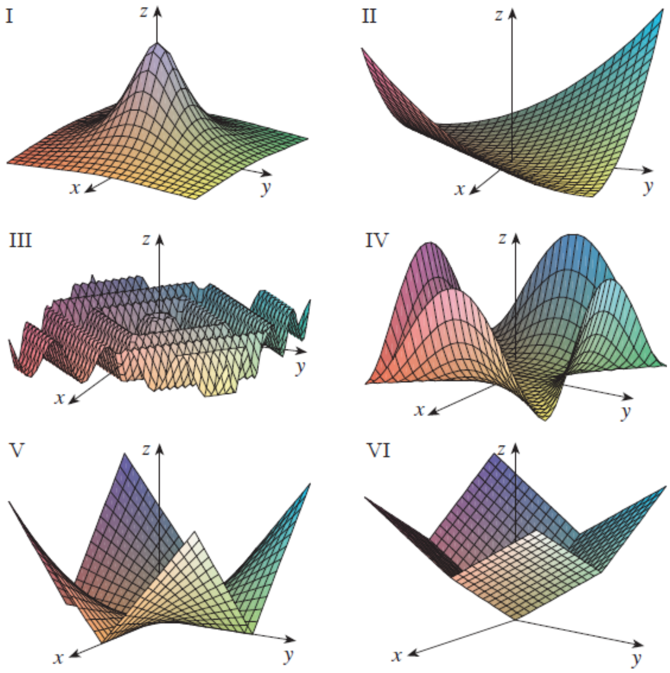


Correction. 1-C-II, 2-F-I, 3-B-VI, 4-D-V, 5-A-IV, 6-E-III.

Exercice 1.5

Associer chaque fonction (1-6) à sa surface (I-VI).

1. $f(x,y) = |x| + |y|$
2. $f(x,y) = |xy|$
3. $f(x,y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$
4. $f(x,y) = (x^2 - y^2)^2$
5. $f(x,y) = (x-y)^2$
6. $f(x,y) = \sin(|x| + |y|)$

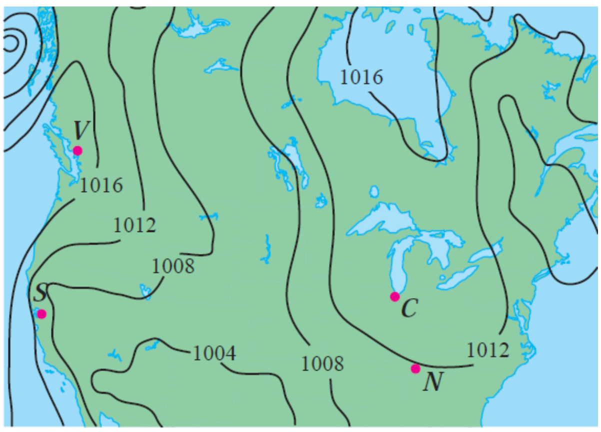


Correction. 1-VI, 2-V, 3-I, 4-IV, 5-II, 6-III.

Exercice 1.6

Dans la figure ci-contre on a tracé les isobares de l'Amérique du Nord au 12 août 2008. La pressione indiquée est mesurée en millibars (mbar).

1. Donner une estimation de la pression à Chicago (point C), à Nashville (point N), à San Francisco (point S) et à Vancouver (point V).
2. Dans quelle ville le vent est le plus fort ?



Correction. Au point C la pression est de 1013 mbar environ, au point N la pression est de 1012 mbar environ, au point S la pression est de 1010 mbar environ, au point V la pression est supérieure à 1016 mbar. Le vent est plus fort à San Francisco car le gradient de pression est plus fort que dans les autres villes.

2 Limites et continuité des fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

La notion de limite pour une fonction de plusieurs variables généralise naturellement la notion correspondante dans le cas des fonctions d'une seule variable. Toutefois, un nouvel élément entre en jeu : les limites unilatérales (*i.e.* de la gauche et de la droite) perdent leur sens et sont remplacées par les nombreuses limites directionnelles possibles. En effet, dès que le domaine se situe dans un espace à deux dimensions au moins, les chemins qui mènent à un point donné peuvent suivre divers axes. Ainsi, l'ensemble des points en lesquels une limite peut être considérée, doit être défini en tenant compte de toutes les possibilités d'accès (voir par exemple la figure 2.1). Une façon commode de procéder s'appuie sur la notion de *boule ouverte dans* $\mathbb{R}^n$ qui généralise celle d'intervalle ouvert dans $\mathbb{R}$. Pour cela il faut d'abord introduire la notion de *norme dans* $\mathbb{R}^n$ qui généralise la notion de distance dans $\mathbb{R}$.

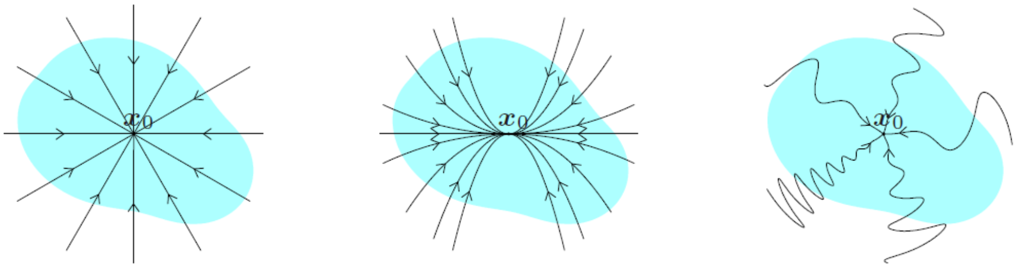


FIGURE 2.1: Différents façons de s'approcher du point $\mathbf{x}_0$.

Définition *Norme*

On appelle norme sur $\mathbb{R}^n$ toute application N de $\mathbb{R}^n$ dans $[0;+\infty[$ possédant les propriétés suivantes :

$N(\mathbf{x})=0 \iff \mathbf{x}=\mathbf{0}$	pour tout $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$	(séparation),
$N(\lambda\mathbf{x})=\lvert\lambda\rvert N(\mathbf{x})$	pour tout $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, pour tout $\lambda\in\mathbb{R}$	(homogénéité),
$N(\mathbf{x}+\mathbf{y})\le N(\mathbf{x})+N(\mathbf{y})$	pour tout $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$	(inégalité triangulaire).

On emploie généralement la notation $\|\mathbf{x}\|$ pour $N(\mathbf{x})$, qui rappelle l'analogie avec la valeur absolue dans $\mathbb{R}$ ou le module dans $\mathbb{C}$.

Propriété

Pour tout $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$

$$\Big|\|\mathbf{x}\|-\|\mathbf{y}\|\Big| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\|+\|\mathbf{y}\|.$$

Définition *Boules*

Dans $\mathbb{R}^n$ muni d'une norme on appelle
- ▷ *Boule ouverte* de centre $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^n$ et de rayon $r>0$ l'ensemble $\mathscr{B}(\mathbf{A},r)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\mathbf{x}-\mathbf{A}\|<r\}$;
- ▷ *Boule fermée* de centre $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^n$ et de rayon $r>0$ l'ensemble $\mathscr{B}(\mathbf{A},r)=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \text{ tel que } \|\mathbf{x}-\mathbf{A}\|\le r\}$.

Normes classiques

Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Dans $\mathbb{R}^n$, on utilise les normes classiques suivantes définies pour $\mathbf{x}=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ par :

$$\|\mathbf{x}\|_p=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}, \qquad \|\mathbf{x}\|_\infty=\sup\big\{|x_1|,|x_2|,\dots,|x_n|\big\}.$$

Si $p=2$, on parle de *norme euclidienne*.

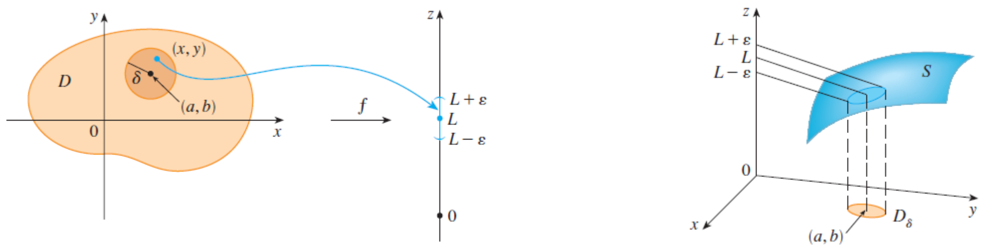


FIGURE 2.2: $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

Exemple

On veut dessiner les boules fermées de centre $(0,0)$ et de rayon $r>0$ relatives aux trois normes classiques de $\mathbb{R}^2$: $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$.
La boule fermée de centre $(0,0)$ et rayon $r>0$ est l'ensemble de points

$$\mathscr{B}((0,0),r) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)-(0,0)\| \le r\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \|(x,y)\| \le r\}.$$

▷ Pour la norme $\|\cdot\|_\infty$ on a

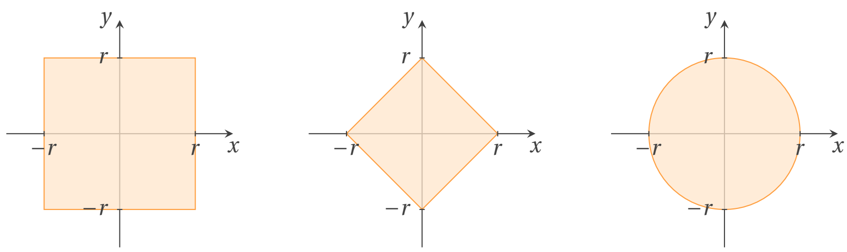
$$\|(x,y)\|_\infty < r \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup\{|x|,|y|\} \le r.$$

▷ Pour la norme $\|\cdot\|_1$ on a

$$\|(x,y)\|_1 < r \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x|+|y| \le r.$$

▷ Pour la norme $\|\cdot\|_2$ on a

$$\|(x,y)\|_1 < r \qquad \Longleftrightarrow \qquad |x|^2+|y|^2 \le r^2.$$



$\max\{|x|,|y|\} \le r$ $\qquad |x|+|y| \le r$ $\qquad x^2+y^2 \le r$

La mot «boule» a donc ici un sens plus générale que dans la vie courante !

Définition *Limite en un point*

Soit $\mathscr{D}$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{A}\in\mathscr{D}$ et f une fonction définie sur $\mathscr{D}$, éventuellement non définie en $\mathbf{A}$, à valeurs réelles.

▷ On dit que f a pour limite ℓ au point $\mathbf{A}$, ce que l'on écrit $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = \ell$, si pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que

$$\mathbf{x}\in\mathscr{D}\setminus\{\mathbf{A}\} \text{ et } \|\mathbf{x}-\mathbf{A}\|<\delta \implies |f(\mathbf{x})-\ell|<\varepsilon,$$

autrement dit

$$\mathbf{x}\in\mathscr{D}\cap\mathscr{B}(\mathbf{A},\delta) \implies |f(\mathbf{x})-\ell|<\varepsilon.$$

Voir la figure 2.2 pour un exemple avec une fonction de deux variables et la norme euclidienne.

▷ On dit que f tend vers $+\infty$ quand $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{A}$, ce que l'on écrit $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = +\infty$, si pour tout $M>0$ il existe $\delta>0$ tel que

$$\mathbf{x}\in\mathscr{D}\setminus\{\mathbf{A}\} \text{ et } \|\mathbf{x}-\mathbf{A}\|<\delta \implies f(\mathbf{x})>M,$$

autrement dit

$$\mathbf{x}\in\mathscr{D}\cap\mathscr{B}(\mathbf{A},\delta) \implies |f(\mathbf{x})-\ell|>M.$$

▷ On dit que f tend vers $-\infty$ quand $\mathbf{x}$ tend vers $\mathbf{A}$, ce que l'on écrit $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = -\infty$, si pour tout $M<0$ il existe $\delta>0$ tel que

$$\mathbf{x}\in\mathscr{D}\setminus\{\mathbf{A}\} \text{ et } \|\mathbf{x}-\mathbf{A}\|<\delta \implies f(\mathbf{x})<M,$$

autrement dit

$$\mathbf{x}\in\mathscr{D}\cap\mathscr{B}(\mathbf{A},\delta) \implies |f(\mathbf{x})-\ell|<M.$$

Propriété

L'existence et la valeur éventuelle de la limite sont indépendantes de la norme choisie dans $\mathbb{R}^2$. Lorsqu'elle existe, la limite est unique.

Propriété

Si f a pour limite ℓ en $\mathbf{A}$, la restriction de f à *toute courbe continue* (non seulement les droites !) passant par $\mathbf{A}$ admet la même limite ℓ.

Astuce

En pratique, pour prouver qu'une fonction de plusieurs variables n'admet pas de limite en $\mathbf{A}$, il suffit d'expliciter une restriction à une courbe continue passant par $\mathbf{A}$ qui n'admet pas de limite, ou deux restrictions qui conduisent à des limites différentes. Mais pour prouver l'existence d'une limite, il faut considérer le cas général.

Attention

Si la restriction à toute droite passant par $\mathbf{A}$ admet la même limite, on ne peut pas conclure que la limite existe !

Définition *Continuité*

Soit f une fonction de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que f est continue en $\mathbf{A} \in \mathscr{D}$ si f possède en $\mathbf{A}$ une limite égale à $f(\mathbf{A})$. Si f est continue en chaque point de $\mathscr{D}$, on dit que f est continue sur $\mathscr{D}$.

Définition *Prolongement par continuité*

Soit f une fonction de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{A}\}$ dans $\mathbb{R}$. Si $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{A}} f(\mathbf{x}) = \ell$, la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\mathscr{D} \cup \{\mathbf{A}\}$ par $\tilde{f}(\mathbf{A}) = \ell$ et $\tilde{f}(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})$ pour $\mathbf{x} \in \mathscr{D}$ est la seule fonction continue en $\mathbf{A}$ dont la restriction à $\mathscr{D}$ soit f. On l'appelle le prolongement par continuité de f à $\mathbf{A}$.

Propriété *Opérations algébriques*

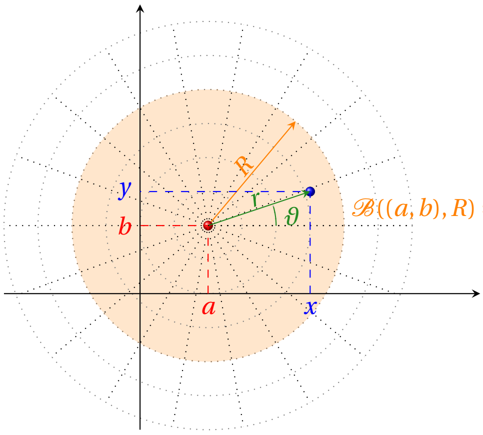
Les fonctions continues de plusieurs variables jouissent des mêmes propriétés que les fonctions continues d'une seule variable. Les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont continues dans leurs domaines de définition respectifs. La continuité des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, le quotient (lorsque le dénominateur ne s'annule pas) etc., de fonctions continues.

Exemple

1. $f(x, y) = x^2 + y^2 - xy + y$ est continue dans $\mathbb{R}^2$ (polynôme du second degré à deux variables).
2. $f(x, y, z) = e^y + xy^2 - z$ est continue dans $\mathbb{R}^3$ (somme d'une exponentielle et d'un polynôme).
3. $f(x, y) = \ln(x + y^2) - 3$ est continue dans $\mathscr{D} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y^2 > 0\right\}$ comme somme du logarithme d'un polynôme (fonction composée) et d'une constante.

Astuces

En pratique, lorsque $n = 2$, il est souvent utile de passer aux coordonnées polaires pour ramener le calcul de la limite d'une fonction de deux variables à celui de la limite d'une fonction d'une seule variable. En effet, tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(a, b)\}$ peut être représenté par ses coordonnées polaires centrées autour d'un point (a, b) grâce aux relations : $x = a + r\cos(\vartheta)$, $y = b + r\sin(\vartheta)$ avec $r > 0$ et $\vartheta \in [0; 2\pi[$.



Dans cette écriture, r représente la distance entre (a,b) et (x,y) de sorte que

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\vartheta}} f(a+r\cos(\vartheta), b+r\sin(\vartheta))$$

On peut alors utiliser la condition suffisante suivante :

Proposition

S'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ et une fonction $r \mapsto s = s(r)$ telle que au voisinage de (a,b) on a

$$|f(a+r\cos(\vartheta), b+r\sin(\vartheta)) - \ell| \le s(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0,$$

alors

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = \ell.$$

Exemple

Montrons de deux manières que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ avec $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

Première méthode. La première méthode utilise la définition de limite. En effet, le long de l'axe horizontal qui a équation $y=0$, on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

tandis que, le long de l'axe vertical qui a équation $x=0$, on a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x=0}} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^2}{y^2} = -1$$

de sorte que les deux limites ne coïncident pas.

Deuxième méthode. La seconde manière est basée sur les coordonnées polaires. En posant $x = r\cos(\vartheta)$ et $y = r\sin(\vartheta)$, on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0,\forall\vartheta} f(r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta)) = \lim_{r\to 0,\forall\vartheta} \frac{r^2(\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta))}{r^2(\cos^2(\vartheta)+\sin^2(\vartheta))} = \lim_{r\to 0,\forall\vartheta} (\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta)) = \cos(2\vartheta).$$

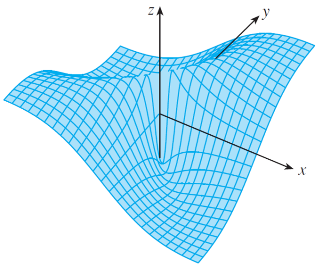
Le résultat varie selon la direction ϑ, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

Exemple

▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}.$$

Comme $f(0,t) = 0$ et $f(t,t) = \frac{1}{2}$ alors f ne peut pas être prolongée par continuité en $(0,0)$.



▷ Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Pour trouver la valeur de la limite, si elle existe, il suffit de calculer la limite d'une restriction à une courbe continue passant par $(0,0)$: comme $f(0,t)=0$ pour tout t, si la limite existe elle est 0. Pour vérifier que c'est bien la limite on passe en coordonnées polaires : on pose $x = r\cos(\vartheta)$ et $y = r\sin(\vartheta)$ pour $r>0$ et $\vartheta \in [0,2\pi]$; on obtient

$$f(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta)) = \frac{r^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)}{\sqrt{r^2(\cos^2(\vartheta)+\sin^2(\vartheta))}} = r\cos(\vartheta)\sin(\vartheta) = \frac{r}{2}\sin(2\vartheta).$$

Comme $|\sin(2\vartheta)| \le 1$, alors $|f(x,y)| \le \frac{r}{2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ indépendamment de ϑ, donc

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0.$$

f peut donc être prolongée par continuité en $(0,0)$ par la valeur 0.

✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎ Exercices ✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎✎

Exercice 2.1

Ces limites existent-elles dans $\mathbb{R}$?

1. $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$;
2. $\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2}$;
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$.

CORRECTION.

1. La limite $\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{1}{x-y}$ n'existe pas car $f(1,y) = \frac{1}{1-y} \xrightarrow[y\to1^+]{} -\infty$ et $f(1,y) = \frac{1}{1-y} \xrightarrow[y\to1^-]{} +\infty$.
2. En polaire $x = 1 + r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$: $f(r,\vartheta) = r\sin^3\vartheta$ et $|r\sin^3\vartheta| \le r$ ainsi $\lim_{r\to0} f(r,\vartheta) = 0$ et finalement
$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{y^3}{(x-1)^2+y^2} = 0.$$
On peut également utiliser le théorème du pincement sans passer par les coordonnées polaires, grâce aux inégalités suivantes :
$$x^2+y^2 \ge y^2 \implies \left|\frac{y^3}{x^2+y^2}\right| \le \frac{|y|^3}{y^2} = |y| \qquad \forall y \ne 0.$$
3. La limite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas car $f(x,x) = \frac{1}{2}$ et $f(x,0) = 0$.

Exercice 2.2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4-2x^2y+3y^2} & \text{si } (x,y) \ne (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
Montrer que la restriction de f à toute droite passant par l'origine est continue mais que f n'est pas continue à l'origine.

CORRECTION. Remarquons tout d'abord que la fonction est bien définie dans $\mathbb{R}^2$ puisque
$$x^4-2x^2y+3y^2 = (x^2-y)^2+2y^2$$
ne s'annule qu'en $(0,0)$.

La restriction de f aux droites $x = 0$ et $y = 0$ est la fonction nulle. De plus, la restriction de f à la droite $y = mx$, avec $m \ne 0$, donne
$$f(x,mx) = \frac{mx}{x^2-2mx+3m^2}$$
et tend vers 0 quand x tend vers 0. Comme $f(0,0) = 0$, la restriction de f à toute droite passant par l'origine est donc continue.

Considérons la restriction de f à la parabole $y = x^2$. On a
$$f(x,x^2) = \frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}.$$
Par conséquent, $f(x,x^2)$ ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0.

Exercice 2.3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ par
$$f(x,y) = \frac{x\ln(1+x^3)}{y(x^2+y^2)}.$$
Calculer, si elle existe, la limite de f pour (x,y) qui tend vers $(0,0)$.

CORRECTION. Pour $m \neq 0$ on a $f(x,mx) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{m(1+m^2)x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ mais $f(x,x^2) = \dfrac{\ln(1+x^3)}{x^3(1+x^2)} = \xrightarrow[x\to 0]{} 1$. La limite n'existe donc pas.

Exercice 2.4

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?

CORRECTION. On utilise les coordonnées polaires : $x = r\cos(\vartheta)$, $y = r\sin(\vartheta)$; alors $f(r,\vartheta) = r(\cos^3\vartheta + \sin^3\vartheta)$ et comme $|f(r,\vartheta)| \leq |2r| \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, on en déduit que $\lim_{r\to 0} f(r,\vartheta) = 0$ indépendamment de ϑ, ce qui prouve que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$, i.e. que f est continue en $(0,0)$. De plus elle est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Nous pouvons donc conclure que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2.5

Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}$$

n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

CORRECTION. Pour que f soit prolongeable par continuité en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$. Pour prouver que cette limite n'existe pas il suffit d'expliciter deux restrictions à deux courbes continues passant par $(0,0)$ qui conduisent à des limites différentes. La restriction de f à la courbe continue $y = x$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(x,x) = \frac{x^3}{x^2+y^4} = \frac{x}{1+x^2}$. La restriction de f à la courbe continue $x = y^2$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(y^2,y) = \frac{y^4}{y^4+y^4} = \frac{1}{2}$. Comme $f(x,x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ mais $f(y^2,y) = \frac{1}{2}$, la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Exercice 2.6

Montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2) - \sin(y^2)}{x^2+y^2}$$

n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

CORRECTION. Pour que f soit prolongeable par continuité en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ell \in \mathbb{R}$. Pour prouver que cette limite n'existe pas il suffit d'expliciter deux restrictions à deux courbes continues passant par $(0,0)$ qui conduisent à des limites différentes. La restriction de f à la courbe continue $y = 0$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(x,0) = \frac{\sin(x^2)}{x^2}$. La restriction de f à la courbe continue $x = 0$ qui passe par le point $(0,0)$ est la fonction $f(0,y) = -\frac{\sin(y^2)}{y^2}$. Comme $f(x,0) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$ mais $f(0,y) = -1$, la fonction n'est pas prolongeable par continuité en $(0,0)$.

Exercice 2.7

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = \frac{6x^2y}{x^2+y^2}$. Montrer que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ de trois façons :

1. d'après la définition,
2. d'après le théorème de pincement,
3. en utilisant les coordonnées polaires.

Correction.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Il faut trouver $r >$ tel que
$$\left|\sqrt{x^2+y^2}-0\right| < r \implies \left|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}-0\right| < \varepsilon.$$
Comme on a
$$x^2+y^2 \ge x^2 \implies \left|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}\right| \le \frac{6x^2|y|}{x^2} = 6|y| \le \sqrt{x^2+y^2} \qquad \forall (x,y) \ne (0,0),$$
il suffit de choisir $r = \varepsilon/6$.
2. Pour tout $(x,y) \ne (0,0)$ on a
$$0 \le \left|\frac{6x^2y}{x^2+y^2}\right| \le 6|y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$
3. Posons $x = r\cos(\vartheta)$ et $y = r\sin(\vartheta)$. On obtient
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{6x^2y}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{r\to 0\\ \forall\vartheta}} (6r\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)).$$
Or, $0 \le |6r\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)| \le 6r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Exercice 2.8

Calculer la limite si elle existe ou montrer qu'elle n'existe pas :

a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2}$;

b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2}$;

c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$;

d) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$;

e) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{y\sin(x+1)}{x^2-2x+1}$;

f) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

g) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2+3xy+y^2}{x^2+5y^2}$;

h) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$;

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin^2 y}{x^2+3y^2}$;

j) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan((x+y)^2)}{x^2}$;

k) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;

l) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}$;

m) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

n) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}$;

o) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} xe^{x/y}$;

p) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{x\ln y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}$;

q) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x^2y}{x^2+y^2}$;

r) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$;

s) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$;

t) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

u) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}$;

v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x+y}$;

w) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)+5$.

Correction.

a) Comme $|f(x,y)| \le \frac{(x^2+y^2)^2}{x^2+y^2} = x^2+y^2$ et en polaire $x^2+y^2 = r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = 0$.

b) Comme $f(x,y) \ge \frac{1}{x^2+y^2}$ et en polaire $x^2+y^2 = r^2 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|+|y|}{x^2+y^2} = +\infty$.

c) En polaire : $f(r,\vartheta) = r\cos^3\vartheta$ et $|r\cos^3\vartheta| \le r$. Comme $\lim_{r\to 0} f(r,\vartheta) = 0$ alors $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2} = 0$.

d) Comme $f(x,0) = 0$ et $f(x,x-2) = \frac{1}{2}$ la limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(2,0)} \frac{xy-2y}{x^2+y^2-4x+4}$ n'existe pas.

e) Comme $f(x,2)=\frac{2}{x-1}\frac{\sin(x+1)}{x+1}\xrightarrow[x\to1]{}\infty$ alors $\lim_{(x,y)\to(1,2)}\frac{y\sin(x+1)}{x^2-2x+1}$ n'existe pas.

f) En polaires : $f(r,\vartheta)=\frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}-1}$ qui ne dépend que de r. Comme $\lim_{r\to0}f(r,\vartheta)=2$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}=2$.

g) Comme $f(x,0)=2$ et $f(0,y)=\frac{1}{5}$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2+3xy+y^2}{x^2+5y^2}$ n'existe pas.

h) Comme $f(x,x)=2$ et $f(x,-x)=0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

i) En polaires : $f(r,\vartheta)=\frac{\cos^2(\vartheta)\sin^2(r\sin(\vartheta))}{1+2\sin^2(\vartheta)}$ et $|f(r,\vartheta)|\le\sin^2(r\sin(\vartheta))$. Comme $\lim_{r\to0}f(r,\vartheta)=0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2\sin^2y}{x^2+3y^2}=0$.

j) Comme $f(x,x)=\frac{\arctan((2x)^2)}{x^2}\xrightarrow[x\to0]{}4$ et $f(x,0)=\frac{\arctan(x^2)}{x^2}\xrightarrow[y\to0]{}1$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arctan((x+y)^2)}{x^2}$ n'existe pas.

k) Comme $f(x,0)=1$ et $f(0,y)=-1$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

l) En polaires : $f(r,\vartheta)=r^3\frac{\cos^2(\vartheta)\sin^3\vartheta}{1+\cos^2(\vartheta)}$ et $|f(r,\vartheta)|\le\frac{r^3}{1+\cos^2(\vartheta)}$ car $|\cos^2(\vartheta)\sin^3\vartheta|\le1$. Comme $\lim_{r\to0}f(r,\vartheta)=0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^3}{2x^2+y^2}=0$.

m) En polaires : $f(r,\vartheta)=\frac{\sin(r^2)}{r^2}$. Comme $\lim_{r\to0}f(r,\vartheta)=1$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=1$.

n) Comme $f(x,0)=x\xrightarrow[x\to0]{}0$ mais $f(0,y)=1\xrightarrow[y\to0]{}1$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^2}{x^2+y^2}=0$ n'existe pas.

o) Comme $f(x,x)=xe\xrightarrow[x\to0]{}0$ mais $f(x,x^2)=xe^{1/x}\xrightarrow[x\to0^+]{}+\infty$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}xe^{x/y}$ n'existe pas.

p) En polaire : $f(r,\vartheta)=\cos(\vartheta)\ln(1+r\sin(\vartheta))$ et $|\cos(\vartheta)\ln(1+r\sin(\vartheta))|\le|\ln(1+r\sin(\vartheta))|$. Comme on calcule la limite pour $r\to0$, on peut supposer $r<\frac{1}{2}$; dans ce cas $|\ln(1+r\sin(\vartheta))|<|\ln(1+r)|\xrightarrow[r\to0]{}0$ et comme $\lim_{r\to0}f(r,\vartheta)=0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,1)}\frac{x\ln y}{\sqrt{x^2+(y-1)^2}}=0$.

q) En polaire : $f(r,\vartheta)=3r\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta)$ et $|3r(\cos^2(\vartheta)\sin(\vartheta))|\le3r$. Comme $\lim_{r\to0}f(r,\vartheta)=0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{3x^2y}{x^2+y^2}=0$.

r) Comme $f(x,x)=\frac{x^3}{x^4+x^2}=\frac{x}{x^2+1}\xrightarrow[x\to0]{}0$ mais $f(x,x^2)=\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2}$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ n'existe pas.

s) Comme $f(x,x,x)=\frac{x^2+2x^3}{2x^2+x^4}=\frac{1+2x}{2+x^2}\xrightarrow[x\to0]{}\frac{1}{2}$ mais $f(x,0,x)=\frac{x^3}{x^2+x^4}=\frac{x}{1+x^2}\xrightarrow[x\to0]{}0$ alors $\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xy+yz^2+xz^2}{x^2+y^2+z^4}$ n'existe pas.

t) En polaire : $f(r,\vartheta)=r\cos^2(\vartheta)$ et $|r\cos^2(\vartheta)|\le r$. Comme $\lim_{r\to0}f(r,\vartheta)=0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$.

u) $\frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}=1+\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}$. Si on définit $g(x,y)=\frac{y^3-x^3}{x^2+y^2}$, en polaire $g(r,\vartheta)=r(\sin^3\vartheta-\cos^3\vartheta)$ et $|r(\sin^3\vartheta-\cos^3\vartheta)|\le2r$. Comme $\lim_{r\to0}f(r,\vartheta)=0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2-x^3+y^2+y^3}{x^2+y^2}=1$.

v) Comme $f(x,0)=1$ et $f(0,y)=-1$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x-y}{x+y}$ n'existe pas.

w) En polaire : $f(r,\vartheta)=r^2\ln(r^2)+5\xrightarrow[x\to0]{}5$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)+5=5$.

3 Dérivabilité et différentiabilité, fonctions implicites

3.1 Dérivées partielles

L'unique dérivée d'une fonction d'une variable réelle, lorsqu'elle existe, est liée aux variations de la fonction tandis que la variable parcourt l'axe des abscisses. Pour une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dont le graphe est une surface de $\mathbb{R}^3$, la situation est très différente. En effet, l'axe réel n'offre que deux types de mouvements possibles : de gauche à droite et de droite à gauche tandis que le plan $\mathbb{R}^2$ possède une infinité de directions. Il peut s'avérer intéressant d'étudier comment une fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ évolue lorsque la variable suit l'une ou l'autre direction du plan. À cet égard, considérons d'abord la direction horizontale. Prenons le point (x_0, y_0) du domaine de f. Son image est $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$ et le graphe de la fonction, qui est la surface d'équation $z = f(x, y)$ de $\mathbb{R}^3$, comporte le point $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. L'intersection du graphe de f avec le plan vertical $y = y_0$ est la courbe d'équation $z = f(x, y_0)$ de $\mathbb{R}^3$. Le point (x_0, y_0) étant fixé, on peut alors interpréter cette courbe comme le graphe de la fonction f_{y_0} d'une seule variable définie par $f_{y_0}(x) = f(x, y_0)$. Si f_{y_0} est dérivable en x_0, alors sa dérivée nous renseigne sur la variation de la fonction f lorsque (x, y) se déplace le long de la droite horizontale de $\mathbb{R}^2$ passant par le point (x_0, y_0).

Lorsqu'on pose toutes les variables d'une fonction égales à une constante, sauf une, on obtient alors une fonction d'une seule variable, qui peut être dérivée suivant les règles habituelles.

Définition *Dérivées partielles premières*

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$. Les dérivées partielles de f en (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions partielles f_{y_0} et f_{x_0} évaluées en (x_0, y_0), *i.e.* les fonctions

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = f'_{y_0}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}, \qquad \text{dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } x \text{ au point } (x_0, y_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = f'_{x_0}(y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}, \qquad \text{dérivée partielle de } f \text{ par rapport à } y \text{ au point } (x_0, y_0).$$

Il s'agit de limites d'une fonction réelle de variable réelle !
Si f admet toutes les dérivées partielles premières, on dit que f est *dérivable*.

Remarque *Notation*

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ se note aussi $\partial_x f$ ou $f_{,x}$. (Attention à ne pas confondre $f_{,x}$ la dérivée de f par rapport à x avec f_{x_0} la fonction partielle associée à f.)

Définition *Vecteur gradient*

Le gradient de f en (x_0, y_0), noté $\nabla f(x_0, y_0)$ ou encore $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$, est le vecteur dont les composantes sont les dérivées partielles premières. Il est orthogonal à la courbe de niveau de f passant par (x_0, y_0).

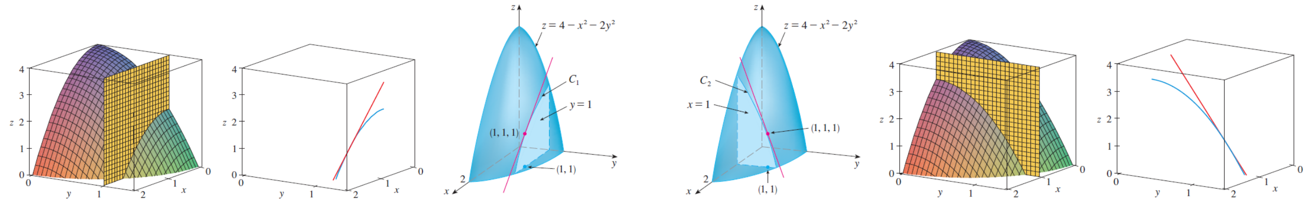
Astuce

En pratique, pour calculer la dérivée partielle $\partial_x f$ (resp. $\partial_y f$), on dérive f comme si elle était une fonction de la seule variable x (resp. y) et que l'autre variable, y (resp. x), était une constante.

Ces définitions se généralisent de manière naturelle à toute fonction de n variables.

Exemple

Soit $f(x, y) = 4 - x^2 - 2y^2$. On a $\partial_x f(x, y) = -2xy$ et $\partial_y f(x, y) = -4y$. Le graphe de f est le paraboloïde $z = 4 - x^2 - 2y^2$ et le plan vertical $y = 1$ l'intersecte dans la parabole $z = 2 - x^2$, $y = 1$ (et on appelle cette courbe C_1 comme dans la figure à gauche). La pente de la droite tangente à cette parabole au point $(1, 1, 1)$ est $\partial_x f(1, 1) = -2$. De la même façon, le plan vertical $x = 1$ intersecte le paraboloïde dans la parabole $z = 2 - 2y^2$, $x = 1$ (et on appelle cette courbe C_2 comme dans la figure à droite). La pente de la droite tangente à cette parabole au point $(1, 1, 1)$ est $\partial_y f(1, 1) = -4$.



Les dérivées partielles jouissent des mêmes propriétés que les dérivées de fonctions d'une seule variable. En particulier, les fonctions élémentaires telles que les polynômes, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont dérivables dans leur domaine respectif. La dérivabilité (partielle) des autres fonctions s'établit, le cas échéant, en tant que somme, produit, composée, etc., de fonctions dérivables. Les règles de dérivation sont également similaires, à l'exception de celle relative à la *dérivation des fonctions composées*. En effet, lorsque $n > 1$, il est impossible de réaliser un produit de composition entre deux fonctions de $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Exemple

1. Soit la fonction $f(x, y) = 3x^2 + xy - 2y^2$. Alors $\mathscr{D} \equiv \mathbb{R}^2$, f est continue, $\partial_x f(x, y) = 6x + y$ (car y est considérée constante) et $\partial_y f(x, y) = x - 4y$ (car x est considérée constante).
2. Soit la fonction $f(x, y, z) = 5xz\ln(1+7y)$. Alors $\mathscr{D} \equiv \{(x, y, z) \mid y > -1/7\}$, f est continue et $\partial_x f(x, y, z) = 5z\ln(1+7y)$, $\partial_y f(x, y, z) = \frac{35xz}{1+7y}$ et $\partial_z f(x, y, z) = 5x\ln(1+7y)$.
3. Considérons l'entropie d'un gaz parfait en fonction de l'énergie interne spécifique ε et du volume spécifique τ : $s(\tau, \varepsilon) = c_v \ln\left(\varepsilon\tau^{\gamma-1}\right) = c_v \ln(\varepsilon) + c_v(\gamma-1)\ln(\tau)$ (avec c_v et $\gamma > 1$ deux constantes). Comme la température et la pression sont définies respectivement par $T = 1/s_\varepsilon$ et $P = Ts_\tau$, on obtient $T = \frac{1}{s_\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{c_v}$ et $P = Ts_\tau = \frac{\varepsilon}{c_v}\frac{c_v(\gamma-1)\tau^{\gamma-2}}{\varepsilon\tau^{\gamma-1}} = (\gamma-1)\frac{\varepsilon}{\tau}$. On retrouve ainsi la relation bien connue $P\tau = RT$ avec $R = c_v(\gamma-1)$.
4. La résistance totale R d'un conducteur produite par trois conducteurs de résistances R_1, R_2 R_3, connectés en parallèle, est données par la formule
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}.$$
On a alors $\partial_{R_i} R(R_1, R_2, R_3) = R^2/R_i^2$.

Fonction de production de Cobb-Douglas

Cobb et Douglas ont cherché une fonction, définie et dérivable dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$, qui caractérise la production en fonction du travail w et du capital k :
$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 &\to \mathbb{R}_+^* \\ (w, k) &\mapsto f(w, k) \end{aligned}$$
La dérivée partielle $\partial_w f$ est la vitesse à laquelle la production change en fonction des variations du travail. On appelle cela *production marginale par rapport au travail* ou *productivité marginale du travail*. De la même manière, la dérivée partielle $\partial_k f$ est la vitesse à laquelle la production change en fonction des variations du capital. On appelle cela *production marginale par rapport au capital* ou *productivité marginale du capital*. Cobb et Douglas ont fait les hypothèses suivantes :

▷ si le travail ou le capital s'annulent, la production aussi s'annule :
$$\lim_{\substack{w\to 0\\ \forall k}} f(w, k) = 0, \qquad \lim_{\substack{k\to 0\\ \forall w}} f(w, k) = 0;$$

▷ la productivité marginale du travail est proportionnelle à la production par unité de travail :
$$\exists \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \partial_w f(w, k) = \frac{\alpha}{w} f(w, k);$$
pour $k = k_0$ fixé, on a une EDO dont la solution est $f(w, k) = g(k_0)\,w^\alpha$ où g est une fonction qui ne dépend que de k_0 ;

▷ la productivité marginale du capital est proportionnelle à la production par unité de capital :
$$\exists \beta \in \mathbb{R} \quad \text{tel que} \quad \partial_k f(w, k) = \frac{\beta}{k} f(w, k).$$

pour $w = w_0$ fixé, on a une EDO dont la solution est $f(w,k) = h(w_0)k^\beta$ où h est une fonction qui ne dépend que de w_0.

On obtient alors la fonction $f(w,k) = cw^\alpha k^\beta$, où c est une constante. De plus, on a fait l'hypothèse que si le travail ou le capital s'annulent alors la production aussi s'annule, par conséquent $\alpha, \beta > 0$ et l'on a bien

$$\partial_w f(w,k) = \alpha w^{\alpha-1}k^\beta = \frac{\alpha}{w} f(w,k), \qquad \partial_k f(w,k) = \beta w^\alpha k^{\beta-1} = \frac{\beta}{k} f(w,k).$$

Remarquons que si le travail et le capital augment en même temps d'un facteur m alors

$$f(mw, mk) = c(mw)^\alpha (mk)^\beta = m^{\alpha+\beta} f(w,k).$$

Pour que la production augmente elle aussi d'un facteur m il faut alors imposer $\alpha + \beta = 1$.

Dans certaines applications, on est amené à considérer des fonctions de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ qui peuvent être vues comme des empilements de fonctions de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

De telles fonctions s'étudient comme s'il s'agissait de m fonctions de $\mathscr{D} \to \mathbb{R}$. On obtiendra ainsi un vecteur gradient pour chaque fonction f_j, $j = 1, \dots, m$. La matrice de n lignes et m colonnes dont la colonne j contient le vecteur ∇f_j est appelée *matrice jacobienne* de f.

Une des propriétés les plus usitées dans la pratique, la règle de dérivation en chaîne ou *chain rule*, est relative aux dérivées partielles des fonctions composées.

Définition *Dérivées des fonctions composées : règle de dérivation en chaîne (chain rule)*

Cas $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières et x et y deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto x(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto y(y) \end{aligned}$$

Alors la fonction g

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (x = x(t), y = y(t)) \longmapsto g(t) = f(x(t), y(t)) \end{aligned}$$

est dérivable et

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \times x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \times y'(t).$$

Cas $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ Soit f une fonction de deux variables x et y elles-même fonctions des deux variables u et v.

$$\begin{aligned} f\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\mapsto f(x,y) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto x(u,v) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (u,v) &\mapsto y(u,v) \end{aligned}$$

On peut définir la fonction composée $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$:

$$\begin{aligned} g\colon \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (u,v) &\longmapsto (x = x(u,v), y = y(u,v)) \longmapsto g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v)) \end{aligned}$$

Lorsque les dérivées partielles premières qui interviennent sont définies, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u,v), \\ \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v), y(u,v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u,v). \end{aligned}$$

Exemple

La pression P (en kilopascals), le volume V (en litres) et la température (en kelvins) d'une mole d'un gaz parfait sont lié par l'équation $PV = RT$ avec $R = 8.31$. On veut déterminer la vitesse à laquelle la pression change quand la température est de 300 K et est en train d'augmenter à raison de $0.1\,\mathrm{K\,s^{-1}}$ et quand le volume est de 100 L et est en train de croître à raison de $0.2\,\mathrm{L\,s^{-1}}$. Soit f une fonction de deux variables admettant des dérivées partielles premières et x et y deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (T,V) &\mapsto P(T,V) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} T\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto T(t) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} V\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto V(y) \end{aligned}$$

Alors la fonction P

$$\begin{aligned} P\colon \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto (T(t),V(t)) \longmapsto P(T(t),V(t)) = R\tfrac{T(t)}{V(t)} \end{aligned}$$

est dérivable et

$$P'(t) = \frac{\partial P}{\partial T}(T(t),V(t))T'(t) + \frac{\partial P}{\partial V}(T(t),V(t))V'(t).$$

À l'instant considéré, $T = 300$ et $dT/dt = 0.1$, $V = 100$ et $dV/dt = 0.2$, donc

$$\frac{dP}{dt} = \frac{\partial P}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial P}{\partial V}\frac{dV}{dt} = \frac{R}{V}\frac{dT}{dt} - \frac{RT}{V^2}\frac{dV}{dt} = \frac{3.81}{100}0.1 - \frac{3.81\times 300}{100^2}0.2 = -0.04155.$$

La pression est donc en train de diminuer d'environ $0.042\,\mathrm{kPa\,s^{-1}}$.

Exemple

La température en un point (x,y) est notée $T(x,y)$ et mesurée en degrés Celsius. Un insecte en train de ramper se trouve après t secondes en $x = \sqrt{1+t}$, $y = 2+t/3$, où x et y sont mesurés en centimètres. La fonction température satisfait à $\partial_x T(2,3) = 4$ et $\partial_y T(2,3) = 3$. À quelle vitesse croît la température sur la trajectoire de l'insecte après 3 secondes ?
Comme x et y sont chacune fonction du temps t, la fonction $T(x,y)$ est aussi fonction du temps et l'on a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{dt} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{1}{2\sqrt{1+t}} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{1}{3}.$$

Après 3 secondes, $x = 2$ et $y = 3$ et

$$\frac{dT}{dt}(2,3) = 4\frac{1}{2\times 2} + 3\frac{1}{3} = 2.$$

Ainsi la température croît de $2\,\mathrm{°C\,s^{-1}}$.

Exemple

Le consommateur dont la fonction d'utilité est donnée par $U(x,y)$ est soumis à la contrainte de budget $Px+Qy = R$, où $P > 0$ et $Q > 0$ sont les prix des deux biens et $R > 0$ le montant dévolu à l'achat des ces deux bien. La quantité consommée du second bien devient ainsi fonction de celle du premier : $y = f(x)$ avec $f(x) = \frac{R-Px}{Q}$, de sorte que, sous la contrainte de budget, la fonction d'utilité peut être exprimée sous la forme d'une fonction d'une seule variable : $V(x) = U(x, f(x))$, qui est la composée des fonctions

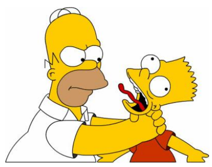
$$\begin{aligned} y\colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} U\colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto U(x,y) \end{aligned}$$

Grâce à la *chain rule*, on a

$$V'(x) = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} = \partial_x U - \partial_y U \frac{P}{Q}.$$

Attention

Une fonction f peut *admettre des dérivées partielles* en tout point d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et *ne pas être continue* en tout point de cet ouvert.

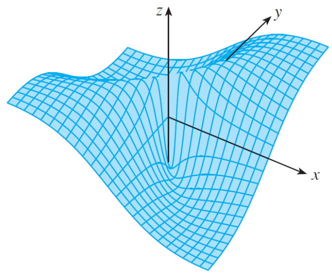


Exemple

La fonction

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,x)=1/2\neq f(0,0)$, cependant elle admet des dérivées partielles en $(0,0)$ car $\partial_x f(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=0$ et $\partial_y f(0,0)=\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=0$.



Les directions correspondant aux dérivées partielles sont celles des axes. D'autres dérivées directionnelles sont aussi envisageables :

Définition *Dérivée directionnelle*

Les dérivées partielles d'une fonction de deux variables décrivent le taux de variation de cette fonction lorsqu'une de ses variable varie, l'autre restant constante. De manière plus générale, on peut s'intéresser au taux de variation de f lorsque ses arguments (x,y) varient dans une direction fixée. La dérivée de f en (x_0,y_0) selon la direction $\mathbf{v}=(a,b)$ est définie par

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+ha,y_0+hb)-f(x_0,y_0)}{h}.$$

Lorsque f est différentiable (voir plus bas), cette limite vaut $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\cdot\mathbf{v}=\partial_x f(x_0,y_0)a+\partial_y f(x_0,y_0)b$.

Exemple

Calculons la dérivée de $f=x^2-y^2$ en $(1,2)$ selon la direction $\mathbf{v}=(3,5)$:

- ▷ en appliquant la définition on a $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,2)=\lim_{h\to 0}\frac{((1+3h)^2-(2+5h)^2)-(1^2-2^2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-16h^2-14h}{h}=-14$;
- ▷ comme f est différentiable, on a $\partial_x f(1,2)=2$ et $\partial_y f(1,2)=-4$ donc $\frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}}(1,2)=\nabla f(1,2)\cdot\mathbf{v}=3\partial_x f(1,2)+5\partial_y f(1,2)=6-20=-14$.

Définition *Élasticité*

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0)\in\mathscr{D}$ et supposons f dérivable par rapport à x (resp. y) en (x_0,y_0) avec $x_0\neq 0$ (resp. $y_0\neq 0$) et $f(x_0,y_0)\neq 0$. L'élasticité de f par rapport à x (resp. y) en (x_0,y_0) est donnée par

$$E_f^x(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}}{\frac{h}{x_0}},\qquad E_f^y(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{f(x_0,y_0)}}{\frac{h}{y_0}}.$$

Par conséquent

$$E_f^x(x_0,y_0)=\frac{x_0}{f(x_0,y_0)}\partial_x f(x_0,y_0),\qquad E_f^y(x_0,y_0)=\frac{y_0}{f(x_0,y_0)}\partial_y f(x_0,y_0).$$

Exemple

La fonction de production de Cobb-Douglas $f\colon(\mathbb{R}_+^*)^2\to\mathbb{R}$ s'écrit $f(x,y)=x^\alpha y^\beta$ (avec $\alpha,\beta>0$). Elle est dérivable dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et on obtient :

$$E_f^x(x,y)=\frac{x}{f(x,y)}\partial_x f(x,y)=\frac{x}{x^\alpha y^\beta}\alpha x^{\alpha-1}y^\beta=\alpha,$$
$$E_f^y(x,y)=\frac{y}{f(x,y)}\partial_y f(x,y)=\frac{y}{x^\alpha y^\beta}\beta x^{\alpha}y^{\beta-1}=\beta.$$

En conséquence, toutes les fonctions de Cobb-Douglas bénéficient d'élasticités constantes, ce qui contribue à expliquer l'attrait qu'elles représentent pour le modélisateur.

Définition *Fonction de classe $\mathscr{C}^1$*

Si les fonctions dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues sur $\mathscr{D}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathscr{D}$ et on note $f \in \mathscr{C}^1(\mathscr{D})$.

3.2 Différentiabilité

La différentiabilité d'une fonction f en un point $\mathbf{x}_0$ correspond à l'existence d'une approximation linéaire de la fonction au voisinage du point $(\mathbf{x}_0, f(\mathbf{x}_0))$ du graphe de la fonction.

Pour les fonctions d'une seule variable, cette approximation linéaire est fournie par la droite tangente d'équation $y = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$, impliquant directement l'équivalence entre la dérivabilité et la différentiabilité. Il n'était donc pas nécessaire d'ajouter une définition.

Dans le cas des fonctions de deux variables et plus, l'équivalence disparaît entre l'existence des dérivées partielles, d'une part, et celle d'un plan tangent, d'autre part. Cela provient du fait que la dérivabilité repose seulement sur des limites le long de directions particulières. La dérivabilité apparaît donc comme un concept trop faible pour garantir l'existence d'un plan tangent et la notion de différentiabilité va combler ce déficit.

Pour les fonctions de deux variables, l'intuition géométrique peut encore servir de guide. Ainsi, si la fonction f est dérivable en (x_0, y_0), on peut affirmer l'existence de deux droites tangentes, chacune par rapport à la trace verticale du graphe dans les plans d'équation $x = x_0$ et $y = y_0$. Dans le meilleur des cas, ces deux droites, nécessairement concourantes en $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, forment un plan qui est tangent au graphe. Toutefois, certaines irrégularités peuvent surgir (par exemple, la présence d'une discontinuité en (x_0, y_0)) qui excluent l'existence d'un plan tangent. Dans pareil cas, les deux droites existent et définissent un plan qui n'est pas un plan tangent, parce qu'un tel plan n'existe pas. Ces deux droites déterminent donc un «candidat plan tangent», dont l'existence doit encore être vérifiée.

Plus généralement, la différentiabilité d'une fonction de n variables, dérivable au point $\mathbf{x}_0$, s'étudie en deux étapes. La première consiste à introduire la «candidate différentielle». La seconde teste si cette candidate constitue effectivement une approximation locale de l'accroissement de la fonction. Les définitions suivantes précisent ces notions.

Définition *Fonction différentiable*

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$. On dit que f *est différentiable* en (x_0, y_0) s'il existe deux constantes réelles A et B telles que

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = hA + kB + \|(h, k)\|\varepsilon(h, k)$$

avec $\lim_{(h,k)\to(0,0)} \varepsilon(h, k) = 0$ et $\|\cdot\|$ une norme quelconque de $\mathbb{R}^2$.

La différentiabilité est une notion plus forte que la continuité et que la dérivabilité :

Théorème

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathscr{D}$. Si f est différentiable en (x_0, y_0), alors f est continue et dérivable en (x_0, y_0). Dans ce cas on a $A = \partial_x f(x_0, y_0)$ et $B = \partial_y f(x_0, y_0)$ et on peut définir la fonction

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)} \colon \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R} \\ (h,k) &\mapsto h\partial_x f(x_0, y_0) + k\partial_y f(x_0, y_0), \end{aligned}$$

appelée *différentielle de f au point* (x_0, y_0). On générale on note

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = \lim_{(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\to(0,0)} \Big(f(x_0 + \mathrm{d}x, y_0 + \mathrm{d}y) - f(x_0, y_0) \Big) = \partial_x f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}x + \partial_y f(x_0, y_0)\,\mathrm{d}y.$$

Exemple

En pratique, on utilise la contraposée :
- ▷ si une fonction n'est pas continue, alors elle n'est pas différentiable ;
- ▷ si une fonction n'est pas dérivable (*i.e.* elle n'admet pas toutes les dérivées partielles d'ordre 1), alors elle n'est pas différentiable.

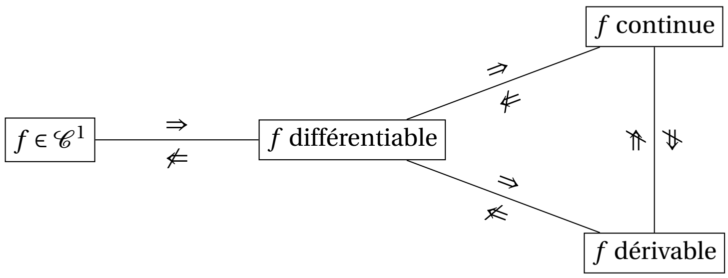
1. La fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
est non continue en $(0,0)$ puisque $\lim_{y\to 0} f(y^2,y)=\frac{1}{2}\neq f(0,0)$. Elle n'est donc pas différentiable en $(0,0)$.
2. La fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=|x|+|y|$ est non dérivable en $(0,0)$, donc non différentiable en $(0,0)$.

Théorème

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0)\in\mathscr{D}$. Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de (x_0,y_0), alors f est différentiable en (x_0,y_0). La réciproque est fausse.

Astuce

Pour répondre à la question “la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est-elle différentiable en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$?” il est utile de se rappeler le schéma suivant :



Contrexemples

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par
$$f(x,y)=\begin{cases}g(x,y) & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

- ▷ Si $g(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$, f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$
- ▷ Si $g(x,y)=(x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ alors f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ mais elle est différentiable
- ▷ Si $g(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, f n'est pas différentiable mais elle est continue et dérivable
- ▷ Si $g(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, f n'est ni différentiable ni continue mais elle est dérivable
- ▷ Si $g(x,y)=|x|+|y|$, f n'est ni différentiable ni dérivable mais elle est continue
- ▷ Si $g(x,y)=\dfrac{y}{x^2+y^2}$, f n'est ni dérivable ni continue

Théorème

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0,y_0)\in\mathscr{D}$ un point en lequel f est dérivable. Elle est différentiable en (x_0,y_0) ssi
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)-h\partial_x f(x_0,y_0)-k\partial_y f(x_0,y_0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=0.$$

Notons que les fonctions élémentaires telles que les polynôme, les fonctions exponentielles, logarithmiques et trigonométriques sont automatiquement différentiables dans leur domaine respectif et que les propriétés de différentiabilité relatives aux sommes, produits, etc., existent.

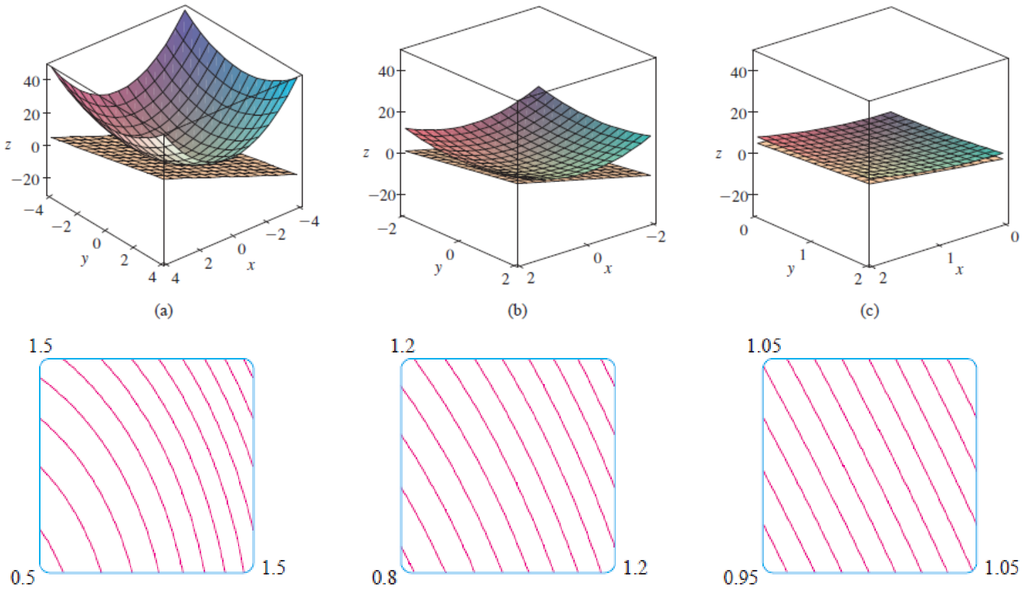


FIGURE 3.1: La fonction $f(x,y)=2x^2+y$ semble coïncider avec son plan tangent au point $(1,1,f(1,1))$ lorsque on zoom vers ce point. Si on regarde les courbes de niveau, lorsque on zoom vers ce point les courbes tendent vers des droites parallèles toutes à la même distance les unes des autres.

Exemple

1. La fonction $f(x,y)=xy-2x+3y$ est différentiable en $(0,0)$ car
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-h\partial_x f(0,0)-k\partial_y f(0,0)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk-2h+3k-h(-2))-k(3)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}=0$$
puisque $\frac{hk}{\sqrt{h^2+k^2}}=r\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)$ et $|r\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)|\le r\xrightarrow[r\to0]{}0$.
2. Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y)=x^2+y^2$. Si f est différentiable, alors sa différentielle est la fonction
$$\begin{aligned}\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}\colon \mathbb{R}^n&\to\mathbb{R}\\ (h,k)&\mapsto 2hx_0+2ky_0.\end{aligned}$$
Afin de voir s'il s'agit effectivement d'une différentielle, on calcul
$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{(x_0+h)^2+(y_0+k)^2-x_0^2-y_0^2-2hx_0^2-2ky_0^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{h^2+k^2}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\sqrt{h^2+k^2}=0.$$
Par conséquent, la fonction f est différentiable dans $\mathbb{R}^2$ et pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a $\mathrm{d}f=2x\,\mathrm{d}x+2y\,\mathrm{d}y$.

À l'approche analytique, correspond la vision géométrique d'un plan tangent. En effet, lorsque f est différentiable en (x_0,y_0), on peut, dans un voisinage de (x_0,y_0), approcher la différence $f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0,y_0)$ par $\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$, donc aussi approcher $f(x_0+h,y_0+k)$ par $f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(h,k)$ (approximation locale linéaire ou du premier ordre).

Définition *Plan tangent et linéarisation*

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur une partie ouverte $\mathscr{D}$ de $\mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0)\in\mathscr{D}$ et f est différentiable en (x_0,y_0). L'équation du plan tangent au graphe de la fonction $f(x,y)$ en (x_0,y_0) est
$$g(x,y)=f(x_0,y_0)+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0).$$
Si on approche une fonction f au voisinage d'un point (x_0,y_0) au moyen d'une fonction affine $L(x,y)=a+bx+cy$, il est naturel de choisir la fonction L dont le graphe est tangent au graphe de la fonction f en (x_0,y_0). C'est ce qu'on appelle la linéarisation de f en (x_0,y_0) (voir la figure 3.1).

Cette notion se généralise naturellement pour $n>2$: il s'agit en fait d'un plan tangent pour $n=2$ et d'un hyperplan tangent pour $n>2$. Dans un espace de dimension n, un hyperplan est une variété linéaire de dimension $n-1$.

Exemple

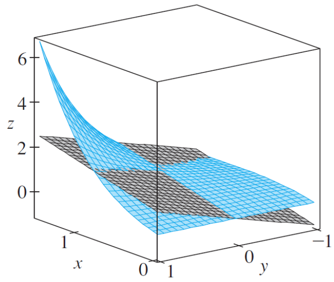
On veut montrer que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = xe^{xy}$ est différentiable en $(1,0)$ et utiliser sa linéarisation pour approcher $f(1.1,-0.1)$. On a

$$\partial_x f(x,y) = e^{xy} + xye^{xy} \qquad \partial_x f(1,0) = 1$$
$$\partial_y f(x,y) = x^2 e^{xy} \qquad \partial_y f(1,0) = 1$$

Les deux fonctions $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont continues, donc f est différentiable. Sa linéarisation donne

$$f(x,y) \simeq f(1,0) + (x-1)\partial_x f(1,0) + (y-0)\partial_y f(1,0) = x + y,$$

autrement dit $xe^{xy} \simeq x + y$ lorsque $(x,y) \simeq (1,0)$, ainsi $f(1.1,-0.1) \simeq 1.1 - 0.1 = 1$. En effet, $f(1.1,-0.1) = 1.1e^{-0.11} \approx 0.98542$



Définition *Fonction homogènes*

Soit la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Elle est dite homogène de degré k si

$$f(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}), \qquad \forall (\mathbf{x}, \lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+^*.$$

Les fonctions homogènes bénéficient de la propriété suivante qui découle de la *chain rule*.

Théorème *d'*EULER

Si la fonction $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est homogène de degré k et différentiable dans $\mathbb{R}^n$, alors

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \partial_{x_i} f(\mathbf{x}) = k f(\mathbf{x}), \qquad \forall \in \mathbb{R}^n.$$

Exemple

La fonction de production de COBB-DOUGLAS à rendements constants s'écrit $f(x,y) = x^\alpha y^{1-\alpha}$, où $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$, est homogène de degré 1 puisque $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^\alpha (\lambda y)^{1-\alpha} = \lambda (x^\alpha y^{1-\alpha}) = \lambda f(x,y)$. Dans ce cas, la formule d'Euler s'écrit

$$x\partial_x f(x,y) + y\partial_y f(x,y) = f(x,y).$$

Le résultat $f(x,y)$ de la production obtenue avec les quantités respectives x et y de facteurs permet donc de rémunérer ces facteurs au niveau de leur productivité marginale.

3.3 Dérivées partielles d'ordres supérieurs et matrice hessienne

Si les fonctions dérivées partielles admettent elles-mêmes des dérivées partielles en (x_0, y_0), ces dérivées sont appelées dérivées partielles secondes, ou dérivées partielles d'ordre 2, de f en (x_0, y_0). On peut, de la même façon, introduire les dérivées partielles d'ordres supérieurs. Les définitions suivantes s'énoncent dans des ensembles ouverts pour éviter les problèmes liés au calcul de limites au bord du domaine.

Définition *Dérivées partielles d'ordre 2 pour une fonction de deux variables*

Soit la fonction $f\colon \mathscr{D}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ où $\mathscr{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a 2 dérivées partielles d'ordre 1 et donc 4 dérivées partielles d'ordre 2 ainsi notées :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{xx}f(x_0,y_0)\text{)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{xy}f(x_0,y_0)\text{)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(x_0,y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{yx}f(x_0,y_0)\text{)},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(x_0,y_0) && \text{(notée aussi } \partial_{yy}f(x_0,y_0)\text{)}.
\end{aligned}$$

Les dérivées partielles d'ordre supérieur à 2 se définissent par récurrence de façon analogue.

La linéarisation d'une fonction f en un point (x_0,y_0) est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 tel que

$$\begin{cases}
L(x_0,y_0)=f(x_0,y_0),\\
\partial_x L(x_0,y_0)=\partial_x f(x_0,y_0),\\
\partial_y L(x_0,y_0)=\partial_y f(x_0,y_0).
\end{cases}$$

Les polynômes de TAYLOR généralisent cette construction pour des polynômes de degrés quelconques. Ici on va se limiter aux polynômes de degré au plus 2.

Définition *Polynôme de* TAYLOR

Si f est de classe $\mathscr{C}^2$ au voisinage de (x_0,y_0), alors

$$\begin{aligned}
f(x,y) = f(x_0,y_0)&\\
&+(x-x_0)\partial_x f(x_0,y_0)+(y-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)\\
&+\frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2\partial_{xx}f(x_0,y_0)+2(x-x_0)(y-y_0)\partial_{xy}f(x_0,y_0)+(y-y_0)^2\partial_{yy}f(x_0,y_0)\right]\\
&+o((x-x_0)^2+(y-y_0)^2).
\end{aligned}$$

Définition *Matrice Hessienne*

Soit la fonction $f\colon \mathscr{D}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ où $\mathscr{D}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. La matrice Hessienne de f en (x_0,y_0) est la matrice de taille 2×2 dont les entrées sont les dérivées partielles secondes :

$$H_f(x_0,y_0)=\begin{pmatrix}\partial_{xx}f(x_0,y_0) & \partial_{xy}f(x_0,y_0)\\ \partial_{yx}f(x_0,y_0) & \partial_{yy}f(x_0,y_0)\end{pmatrix}.$$

Son déterminant est le réel $\Delta H_f(x_0,y_0)=\partial_{xx}f(x_0,y_0)\partial_{yy}f(x_0,y_0)-\partial_{xy}f(x_0,y_0)\partial_{yx}f(x_0,y_0)$.

Définition *Fonction de classe $\mathscr{C}^k$*

Si les fonctions dérivées partielles d'ordre k sont continues sur $\mathscr{D}$, on dit que f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $\mathscr{D}$. Si les dérivées partielles de tout ordre existent, f est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathscr{D}$.

Exemple

Les dérivées premières et secondes de la fonction $f(x,y)=-2x^2+3xy^2-y^3$ sont

$$\partial_x f(x,y)=-4x+3y^2, \qquad \partial_y f(x,y)=6xy-3y^2,$$

$$\partial_{xx} f(x,y) = -4, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 6y, \qquad \partial_{yx} f(x,y) = 6y, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = 6x - 6y.$$

La matrice hessienne est donnée par

$$\begin{pmatrix} -4 & 6y \\ 6y & 6x-6y \end{pmatrix}.$$

Dans cet exemple, on remarque que la matrice hessienne de f est symétrique du fait que les dérivées secondes mixtes, $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$, sont égales. Le théorème suivant garantit cette égalité sous des conditions légères.

Théorème *Théorème de* SCHWARZ

Si au moins une des dérivées partielles $\partial_{xy} f$ et $\partial_{yx} f$ est continue en (x_0, y_0) alors $\partial_{xy} f(x_0, y_0) = \partial_{yx} f(x_0, y_0)$.

Comme la dérivée seconde pour les fonctions d'une seule variable, la matrice hessienne permet d'étudier la convexité des fonctions de plusieurs variables et joue, dès lors, un rôle important dans leur optimisation.

Définition *Convexité*

Soit la fonction $f : \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $\mathscr{D}$ est un *sous-ensemble convexe* de $\mathbb{R}^n$.

- ▷ f est concave dans $\mathscr{D}$ si
$$f\big((1-t)(x_0,y_0) + t(x_1,y_1)\big) \ge (1-t) f(x_0,y_0) + t f(x_1,y_1) \qquad \forall (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in \mathscr{D} \text{ et } \forall t \in [0;1];$$
- ▷ f est strictement concave dans $\mathscr{D}$ si
$$f\big((1-t)(x_0,y_0) + t(x_1,y_1)\big) > (1-t) f(x_0,y_0) + t f(x_1,y_1) \qquad \forall (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in \mathscr{D} \text{ et } \forall t \in]0;1[;$$
- ▷ f est convexe dans $\mathscr{D}$ si
$$f\big((1-t)(x_0,y_0) + t(x_1,y_1)\big) \le (1-t) f(x_0,y_0) + t f(x_1,y_1) \qquad \forall (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in \mathscr{D} \text{ et } \forall t \in [0;1];$$
- ▷ f est strictement convexe dans $\mathscr{D}$ si
$$f\big((1-t)(x_0,y_0) + t(x_1,y_1)\big) < (1-t) f(x_0,y_0) + t f(x_1,y_1) \qquad \forall (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in \mathscr{D} \text{ et } \forall t \in]0;1[;$$

Comme pour les fonctions d'une variable, la concavité et la convexité des fonctions de n variables suffisamment régulières peuvent être caractérisées à l'aide des dérivées d'ordres 1 ou 2.

Propriété

Soit $f : \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, où $\mathscr{D}$ est un *sous-ensemble convexe* de $\mathbb{R}^2$, une fonction différentiable dans $\mathscr{D}$. Alors

1. f est concave dans $\mathscr{D}$ $\iff$ $\forall (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in \mathscr{D}$, $f(x_1,y_1) \le f(x_0,y_0) + (x_1-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y_1-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$;
2. f est convexe dans $\mathscr{D}$ $\iff$ $\forall (x_0,y_0),(x_1,y_1) \in \mathscr{D}$, $f(x_1,y_1) \ge f(x_0,y_0) + (x_1-x_0)\partial_x f(x_0,y_0) + (y_1-y_0)\partial_y f(x_0,y_0)$.

Si, de plus, $f \in \mathscr{C}^2(\mathscr{D})$, alors

1. f est concave dans $\mathscr{D}$ $\iff$ $\forall (x,y) \in \mathscr{D}$, $H_f(x,y)$ est semi-définie négative (*i.e.* $\Delta H_f(x,y) \ge 0$ et $\partial_{xx} f(x,y) \le 0$) ;
2. f est convexe dans $\mathscr{D}$ $\iff$ $\forall (x,y) \in \mathscr{D}$, $H_f(x,y)$ est semi-définie positive (*i.e.* $\Delta H_f(x,y) \ge 0$ et $\partial_{xx} f(x,y) \ge 0$) ;
3. $\forall (x,y) \in \mathscr{D}$ $H_f(x,y)$ est définie négative (*i.e.* $\Delta H_f(x,y) > 0$ et $\partial_{xx} f(x,y) < 0$) $\implies$ f est strictement concave dans $\mathscr{D}$;
4. $\forall (x,y) \in \mathscr{D}$ $H_f(x,y)$ est définie positive (*i.e.* $\Delta H_f(x,y) > 0$ et $\partial_{xx} f(x,y) < 0$) $\implies$ f est strictement convexe dans $\mathscr{D}$.

Les deux premiers énoncés expriment que tout plan tangent au graphe d'une fonction concave (resp. convexe) se trouve au-dessus (resp. au-dessous) de ce graphe. Les deux derniers, relatifs à la matrice hessienne, rappellent celui qui fait référence au signe de la dérivée seconde d'une fonction d'une seule variable. De la même manière, la condition stricte ne s'applique que dans un seul sens. Dès lors, une fonction peut être strictement convexe sans que sa matrice hessienne soit définie positive en tout point.

Exemple

1. Soit $f(x,y) = x^2 + y^2$. On a
   - ▷ $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$,
   - ▷ $H_f(x,y) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
   - ▷ $\Delta H_f(x,y) = 4 > 0$ et $\partial_{xx} f(x,y) = 2 > 0$ donc $H_f(x,y)$ est définie positive pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   Il s'en suit que f est strictement convexe dans $\mathbb{R}^2$.

2. Soit $f(x,y)=x^4+y^4$. On a
   - ▷ $f\in\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$,
   - ▷ $H_f(x,y)=\begin{pmatrix}12x^2 & 0\\ 0 & 12y^2\end{pmatrix}$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,
   - ▷ $\Delta H_f(x,y)=144x^2y^2\ge 0$ et $\partial_{xx}f(x,y)=12x^2\ge 0$ donc $H_f(x,y)$ est définie positive pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^*)^2$ et semi-définie positive en $(0,0)$.

   On peut cependant montrer à l'aide de la définition que la fonction est strictement convexe dans $\mathbb{R}^2$.

3.4 Fonctions implicites

Si $b\neq 0$, l'équation $ax+by+c=0$ définit une fonction $y=-(ax+c)/b$. Nous allons généraliser ce fait aux équations du type $f(x,y)=0$ où f est fonction différentiable : une fonction $\varphi(x)$ est définie implicitement près de $x=a$ par l'équation $f(x,y)=0$ si toutes les solutions de cette équation dans un voisinage de $(a,\varphi(a))$ sont sur le graphe $\{(x,y)\mid y=\varphi(x)\}$ de φ.

Exemple

Si $f(x,y)=x^2+y^2-1$, l'équation $f(x,y)=0$ est celle d'un cercle de rayon 1 centré en $(0,0)$. Ce cercle n'est pas globalement le graphe d'une fonction, cependant l'équation $f(x,y)=0$ peut être résolue explicitement pour y. On trouve les deux solutions $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. Les fonctions $\varphi_1(x)=\sqrt{1-x^2}$ et $\varphi_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$ sont définies implicitement par l'équation $f(x,y)=0$ près de $x=1$.

Théorème *de la fonction implicite (cas d'une fonction à deux variables)*

Soit $f\colon\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $(x_0,y_0)\in\mathscr{D}$. Si $f(x_0,y_0)=k$ (k constante réelle) et $\partial_y f(x_0,y_0)\neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que $\varphi(x_0)=y_0$ et pour tout $x\in I$

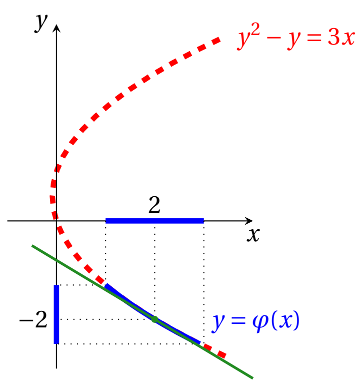
$$f(x,\varphi(x))=k \qquad\text{et}\qquad \varphi'(x)=-\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$$

et la droite tangente à $y=\varphi(x)$ en $x=x_0$ a pour équation $y=\varphi'(x_0)(x-x_0)+y_0$.

Exemple

La fonction $y^2-y=3x$ défini implicitement au voisinage de $(2,-2)$ une fonction $y=\varphi(x)$. La droite tangente au graphe de la courbe d'équation $y=\varphi(x)$ a équation

$$y=(x-2)\frac{-\partial_x f(2,\varphi(2))}{\partial_y f(2,\varphi(2))}+(-2)=(x-2)\frac{3}{2\varphi(2)-1}-2=-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}.$$



Formules

- ▷ On calcule $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ de $f(x,\varphi(x))=k$. On obtient
$$\partial_x f(x,\varphi(x))+\partial_y f(x,\varphi(x))\times\varphi'(x)=0$$
d'où
$$\varphi'(x)=-\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}.$$
- ▷ On calcule $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ de $\partial_x f(x,\varphi(x))+\partial_y f(x,\varphi(x))\times\varphi'(x)=0$. On obtient
$$\partial_{xx}f(x,\varphi(x))+\Big(\partial_{xy}f(x,\varphi(x))+\partial_{yy}f(x,\varphi(x))\times\varphi'(x)\Big)\times\varphi'(x)+\partial_y f(x,\varphi(x))\times\varphi''(x)=0$$
d'où
$$\varphi''(x)=-\frac{\partial_{xx}f(x,\varphi(x))+\big(\partial_{xy}f(x,\varphi(x))+\partial_{yy}f(x,\varphi(x))\times\varphi'(x)\big)\times\varphi'(x)}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$$

$$= -\frac{\partial_{xx} f(x,\varphi(x)) - \left(\partial_{xy} f(x,\varphi(x)) - \partial_{yy} f(x,\varphi(x)) \frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}\right) \frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$$

$$= -\frac{\partial_{xx} f(x,\varphi(x)) - \partial_{xy} f(x,\varphi(x)) \frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} + \partial_{yy} f(x,\varphi(x)) \frac{(\partial_x f(x,\varphi(x)))^2}{(\partial_y f(x,\varphi(x)))^2}}{\partial_y f(x,\varphi(x))}$$

$$= -\frac{(\partial_{xx} f(x,\varphi(x))) \times (\partial_y f(x,\varphi(x)))^2 - (\partial_{xy} f(x,\varphi(x))) \times (\partial_x f(x,\varphi(x))) \times (\partial_y f(x,\varphi(x))) + (\partial_{yy} f(x,\varphi(x))) \times (\partial_x f(x,\varphi(x)))^2}{(\partial_y f(x,\varphi(x)))^3}$$

Théorème *de la fonction implicite (cas d'une fonction à trois variables)*

Soit $f\colon \mathscr{D} \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ au voisinage de $(x_0, y_0, z_0) \in \mathscr{D}$. Si $f(x_0, y_0, z_0) = k$ et $\partial_z f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, alors il existe un ouvert $I \subset \mathbb{R}^2$ contenant (x_0, y_0) et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que $\varphi(x_0, y_0) = z_0$ et pour tout $(x, y) \in I$

$$f(x, y, \varphi(x, y)) = k, \qquad \partial_x \varphi(x, y) = -\frac{\partial_x f(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z f(x, y, \varphi(x, y))}, \qquad \partial_y \varphi(x, y) = -\frac{\partial_y f(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z f(x, y, \varphi(x, y))}.$$

Exercices

Calcul de dérivées partielles

Exercice 3.1

Calculer toutes les dérivées partielles d'ordre 1 des fonctions données :

1. $f(x, y) = y^5 - 3xy$
2. $f(x, y) = x^2 + 3xy^2 - 6y^5$
3. $f(x, y) = x\cos(e^{xy})$
4. $f(x, y) = x/y$
5. $f(x, y) = x^y$
6. $f(x, y, z) = x\cos(xz) + \ln(2 - \sin^2(y + z))$

Correction.

1. $\partial_x f(x, y) = -3y$ et $\partial_y f(x, y) = 5y^4 - 3x$
2. $\partial_x f(x, y) = 2x + 3y^2$ et $\partial_y f(x, y) = 6xy - 30y^4$
3. $\partial_x f(x, y) = \cos(e^{xy}) - xye^{xy}\sin(e^{xy})$ et $\partial_y f(x, y) = -x^2e^{xy}\sin(e^{xy})$
4. $\partial_x f(x, y) = 1/y$ et $\partial_y f(x, y) = -x/y^2$
5. $\partial_x f(x, y) = yx^y/x$ et $\partial_y f(x, y) = \ln(x)x^y$
6. $\partial_x f(x, y, z) = x\cos(xz) - xz\sin(xz)$, $\partial_y f(x, y) = \dfrac{-2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$ et $\partial_z f(x, y) = -x^2\sin(xz) + \dfrac{-2\sin(y+z)\cos(y+z)}{2-\sin^2(y+z)}$

Exercice 3.2

1 mole de gaz parfait qui occupe le volume V à la température T et à la pression P vérifie la relation $PV = RT$ où R est une constante. Montrer que

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -1, \qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = R.$$

Correction. On a

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -R\frac{T}{V^2} \qquad \frac{\partial V}{\partial T} = \frac{R}{P} \qquad \frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V}{R} \qquad \frac{\partial P}{\partial T} = \frac{R}{V}$$

donc

$$\frac{\partial P}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial P} = -R\frac{T}{V^2}\frac{R}{P}\frac{V}{R} = -1, \qquad T\frac{\partial P}{\partial T}\frac{\partial V}{\partial T} = T\frac{R}{V}\frac{R}{P} = R.$$

Exercice 3.3

La loi de Van der Waals pour n moles d'un gaz s'écrit

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

où P est la pression, V le volume, T la température du gaz, R la constant universelle des gaz et a et b deux constantes positives. Calculer $\frac{\partial T}{\partial P}$ et $\frac{\partial P}{\partial V}$.

Correction.

$$\frac{\partial T}{\partial P} = \frac{V - nb}{nR}, \qquad \frac{\partial P}{\partial V} = \frac{n(2naV^2 - 4n^2abV - RTv^3 + 2n^3ab^2)}{V^3(nb - V)^2}.$$

Exercice 3.4

Une étude des glaciers a montré que la température T à l'instant t (mesuré en jours) à la profondeur x (mesurée en pied) peut être modélisée par la fonction
$$T(x,t) = T_0 + T_1 e^{-\lambda x}\sin(\omega t - \lambda x)$$
où $\omega = 2\pi/365$ et λ sont deux constantes positives.

1. Calculer $\partial_x T$ et $\partial_t T$.
2. Montrer que T satisfait l'équation de la chaleur $\partial_t T = k\partial_{xx} T$ pour une certaine constante k.

Correction.

1. $\partial_x T = -\lambda T_1 e^{-\lambda x}(\sin(\omega t - \lambda x) + \cos(\omega t - \lambda x))$ et $\partial_t T = \omega T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$.
2. On a $\partial_{xx} T = 2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t - \lambda x)$ donc $\frac{\partial_t T}{\partial_{xx} T} = \frac{\omega T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t-\lambda x)}{2\lambda^2 T_1 e^{-\lambda x}\cos(\omega t-\lambda x)} = \frac{\omega}{2\lambda^2}$.

Chain rule

Exercice 3.5

Calculer $z'(t)$ ou $w'(t)$:

1. $z(t) = f(x(t),y(t))$, $f(x,y) = x^2+y^2+xy$, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = e^t$;
2. $z(t) = f(x(t),y(t))$, $f(x,y) = \cos(x+4y)$, $x(t) = 5t^4$, $y(t) = 1/t$;
3. $w(t) = f(x(t),y(t),z(t))$, $f(x,y,z) = xe^{y/z}$, $x(t) = t^2$, $y(t) = 1-t$, $z(t) = 1+2t$;
4. $w(t) = f(x(t),y(t),z(t))$, $f(x,y,z) = \ln(\sqrt{x^2+y^2+z^2})$, $x(t) = \sin(t)$, $y(t) = \cos(t)$, $z(t) = \tan(t)$.

Correction.

1. $z'(t) = (2x(t)+y(t))x'(t) + (2y(t)+x(t))y'(t) = (2\sin(t)+e^t)\cos(t) + (2e^t+\sin(t))e^t$;
2. $z'(t) = -\sin(x(t)+4y(t))x'(t) - 4\sin(x(t)+4y(t))y'(t) = \left(\frac{4}{t^2} - 20t^3\right)\sin\left(5t^4 + \frac{4}{t}\right)$;
3. $w'(t) = e^{y(t)/z(t)}x'(t) + \frac{x(t)}{z(t)}e^{y(t)/z(t)}y'(t) - \frac{x(t)y(t)}{z^2(t)}e^{y(t)/z(t)}z'(t) = \left(2t - \frac{t^2}{1+2t} - 2\frac{t^2(1-t)}{(1+2t)^2}\right)e^{(1-t)/(1+2t)} = \frac{8t^2+5t+2}{(1+2t)^2}te^{(1-t)/(1+2t)}$;
4. $w'(t) = \frac{2x(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}x'(t) + \frac{2y(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}y'(t) + \frac{2z(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+z^2(t)}}z'(t) = -\frac{2\sin(t)\cos(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+\tan^2(t)}} + \frac{2\cos(t)\sin(t)}{\sqrt{x^2(t)+y^2(t)+\tan^2(t)}} + \frac{2\tan(t)}{\sqrt{\sin^2(t)+\cos^2(t)+\tan^2(t)}}\frac{1}{\cos^2(t)} = \frac{2\sin(t)}{\cos(t)}$.

Exercice 3.6

La production annuelle de blé B dépend de la température moyenne T et des précipitations R. Les scientifiques estiment que la température moyenne est en train de croître de $0.15\,°\mathrm{C}\,\mathrm{an}^{-1}$ et que les précipitations diminuent à raison de $0.1\,\mathrm{cm}\,\mathrm{an}^{-1}$. Ils pensent aussi qu'aux niveaux de production actuels $\partial_T B = -2$ et $\partial_R B = 8$. Que signifient les signes de ces dérivées partielles ? Estimez le taux actuel de variation de la production de blé dB/dt.

Correction. Comme $\partial_T B$ est négative, une augmentation de la température moyenne (tout en gardant les précipitations annuelles constant) entraîne une diminution de la production de blé aux niveaux de production actuels. Puisque $\partial_R B$ est positive, une augmentation de la pluviosité annuelle (tout en gardant la température moyenne constante) provoque une augmentation de la production de blé.

Puisque la température moyenne augmente à un taux de $0.15\,°\mathrm{C}\,\mathrm{an}^{-1}$, nous savons que $dT/dt = 0.15$. Comme les précipitations diminuent à raison de $0.1\,\mathrm{cm}\,\mathrm{an}^{-1}$, nous savons que $dR/dt = 0.1$. Par conséquent,
$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial T}\frac{dT}{dt} + \frac{\partial B}{\partial R}\frac{dR}{dt} = (-2)\times(0.15) + (8)\times(-0.1) = -1.1.$$
Ainsi, nous estimons que la production de blé diminuera à raison de 1.1 unités par an.

Exercice 3.7

La longueur ℓ, la largeur w et la hauteur h d'une boite changent en fonction du temps t. À un instant donné les dimensions sont $\ell = 1\,\mathrm{m}$, $w = h = 2\,\mathrm{m}$, et ℓ et w augmentent au taux de $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ tandis que h diminue au taux de $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Calculer les taux de variation du volume, de la surface et de la longueur de la diagonale.

Correction. On a

$$\begin{aligned}
V(t) &= V(\ell(t), w(t), h(t)) = \ell(t) \times w(t) \times h(t),\\
S(t) &= S(\ell(t), w(t), h(t)) = 2\big(w(t) \times h(t) + w(t) \times \ell(t) + h(t) \times \ell(t)\big),\\
d(t) &= d(\ell(t), w(t), h(t)) = \sqrt{\ell^2(t) + w^2(t) + h^2(t)},
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial t} &= \partial_\ell V \times \ell' + \partial_w V \times w' + \partial_h V \times h' = w(t) \times h(t) \times \ell'(t) + \ell(t) \times h(t) \times w'(t) + w(t) \times \ell(t) \times h'(t) = 6\,\mathrm{m^3\,s^{-1}},\\
\frac{\partial S}{\partial t} &= \partial_\ell S \times \ell' + \partial_w S \times w' + \partial_h S \times h' = 2\Big((w(t)+h(t)) \times \ell'(t) + (h(t)+\ell(t)) \times w'(t) + (w(t)+\ell(t)) \times h'(t)\Big) = 10\,\mathrm{m^2\,s^{-1}},\\
\frac{\partial d}{\partial t} &= \partial_\ell d \times \ell' + \partial_w d \times w' + \partial_h d \times h' = \frac{\ell\ell'(t) + ww'(t) + hh'(t)}{\sqrt{\ell^2(t) + w^2(t) + h^2(t)}} = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}},
\end{aligned}$$

Linéarisation

Exercice 3.8

Sachant que la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable et que

$$f(2,5) = 6, \qquad \partial_x f(2,5) = 1, \qquad \partial_y f(2,5) = -1,$$

donner une valeur approchée de $f(2.2, 4.9)$.

Correction. On approche $f(2.2, 4.9)$ par $L_{(2,5)}(2.2, 4.9)$ ou $L_{(2,5)}$ est l'équation du plan tangent à f au point $(2,5)$:

$$L_{(2,5)}(x,y) = f(2,5) + (x-2)\partial_x f(2,5) + (y-5)\partial_y f(2,5) = 6 + (x-2) - (y-5) = x - y + 9$$

donc $f(2.2, 4.9) \approx 6.3$.

Exercice 3.9

Calculer les différentielles des fonctions suivantes :

$$m = p^5 q^3 \qquad u = \sqrt{x^2 + 3y^2} \qquad R = \alpha\beta^2\cos(\gamma) \qquad T = \frac{v}{1+uvw} \qquad L = xze^{-y^2-z^2}$$

Correction.

1. $m = 5p^4q^3\,\mathrm{d}p + 3p^5q^2\,\mathrm{d}q$
2. $\mathrm{d}u = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+3y^2}}\,\mathrm{d}x + \dfrac{3y}{\sqrt{x^2+3y^2}}\,\mathrm{d}y$
3. $R = \beta^2\cos(\gamma)\,\mathrm{d}\alpha + 2\alpha\beta\cos(\gamma)\,\mathrm{d}\beta - \alpha\beta^2\sin(\gamma)\,\mathrm{d}\gamma$
4. $T = -\dfrac{v^2w}{(1+uvw)^2}\,\mathrm{d}u + \dfrac{1}{(1+uvw)^2}\,\mathrm{d}v - \dfrac{v^2u}{(1+uvw)^2}\,\mathrm{d}w$
5. $L = ze^{-y^2-z^2}\,\mathrm{d}x - 2xyze^{-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y - x(2z^2-1)e^{-y^2-z^2}\,\mathrm{d}z$

Exercice 3.10

La fonction de production d'un entrepreneur est donné par $\sqrt{K}\sqrt[4]{L}$, où K représente le capital utilisé et L le travail. Actuellement, il utilise 9 unités de capital et 16 unités de travail. Déterminez par approximation linéaire la production obtenue s'il augmente d'une unité le capital et de deux unités le facteur travail.

Correction. La fonction $f(K,L)=\sqrt{K}\sqrt[4]{L}$ est différentiable dans $(\mathbb{R}_+^*)^2$ et

$$\partial_K f(K,L)=\frac{\sqrt[4]{L}}{2\sqrt{K}},\qquad \partial_L f(K,L)=\frac{\sqrt{K}}{4\sqrt[4]{L^3}},$$

par conséquent

$$f(9+1,16+2)\approx f(9,16)+1\partial_K f(9,16)+2\partial_L f(9,16)=\sqrt{9}\sqrt[4]{16}+\frac{\sqrt[4]{16}}{2\sqrt{9}}+\frac{\sqrt{9}}{4\sqrt[4]{16^3}}\times 2=3\times 2+\frac{2}{2\times 3}+\frac{3}{4\times 8}\times 2=\frac{313}{48}.$$

Exercice 3.11

On mesure un rectangle et on obtient une largeur de 30 cm et une longueur de 24 cm, avec une erreur d'au plus 0.1 cm pour chaque mesure. Estimer l'aire du rectangle.

Correction. L'aire du rectangle est donnée par la fonction $f(x,y)=xy$ avec x la largeur et y la longueur (en cm). Lorsque $(h,k)\simeq(0,0)$, on a

$$f(x+h,y+k)\simeq f(x,y)+h\partial_x f(x,y)+k\partial_y f(x,y)$$

donc, pour $h,k\in[-0.1,0.1]$, on a

$$\begin{aligned} f(30+0.1,24+0.1)&\simeq 30\times 24+0.1\times 24+0.1\times 30=725.4,\\ f(30-0.1,24-0.1)&\simeq 30\times 24-0.1\times 24-0.1\times 30=714.6,\end{aligned}$$

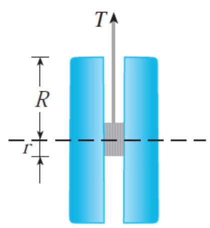
donc l'aire est comprise entre $714.6\,\mathrm{cm}^2$ et $725.4\,\mathrm{cm}^2$.

Exercice 3.12

La tension T de la cordelette du yo-yo en figure est décrite par la fonction

$$T=\frac{mgR}{2r^2+R^2}$$

où m est la masse du yo-yo et g l'accélération due à la gravité. Donner une estimation de la variation de T lorsque R passe de 3 cm à 3.1 cm et r passe de 0.7 cm à 0.8 cm.



Correction.

$$\mathrm{d}T=\partial_R T\,\mathrm{d}R+\partial_r T\,\mathrm{d}r=\frac{mg(2r^2-R^2)}{(2r^2+R^2)^2}\,\mathrm{d}R+\frac{-4mgrR}{(2r^2+R^2)^2}\,\mathrm{d}r=\frac{(-8.02-8.4)\times 0.1}{99.6004}mg\approx -0.0165mg<0.$$

Différentiabilité

Exercice 3.13 *Différentiabilité*

Vérifier, en utilisant la définition, que les fonctions $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ suivantes sont différentiables dans le point indiqué :

a) $f(x,y)=xy-3x^2$ en $(1;2)$,
b) $f(x,y)=xy-3y^2$ en $(2;1)$,
c) $f(x,y)=xy+3y^2$ en $(2;1)$,
d) $f(x,y)=xy-2y^2$ en $(-2;3)$,
e) $f(x,y)=y\sqrt{x}$ en $(4;1)$,
f) $f(x,y)=|y|\ln(1+x)$ en $(0;0)$.

CORRECTION. Une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

a) On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy-3x^2 & f(1,2) &= -1,\\ \partial_x f(x,y) &= y-6x & \partial_x f(1,2) &= -4,\\ \partial_y f(x,y) &= x & \partial_y f(1,2) &= 1, \end{aligned}$$

donc
$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{xy-3x^2+1+4(x-1)-(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 1 + r\cos\theta$ et $y = 2 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy-3x^2+1+4(x-1)-(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = \frac{(1+r\cos\theta)(2+r\sin\theta)-3(1+r\cos\theta)^2+1+4r\cos\theta-r\sin\theta}{r} = r\cos\theta(\sin\theta-3\cos\theta)$$

On a alors
$$\left|\frac{xy-3x^2+1+4(x-1)-(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}}\right| \le 4r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

d'où
$$\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{xy-3x^2+1+4(x-1)-(y-2)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(1,2)$.

b) On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy-3y^2 & f(2,1) &= -1,\\ \partial_x f(x,y) &= y & \partial_x f(2,1) &= 1,\\ \partial_y f(x,y) &= x-6y & \partial_y f(2,1) &= -4, \end{aligned}$$

donc
$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{xy-3y^2+1-(x-2)+4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 2 + r\cos\theta$ et $y = 1 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy-3y^2+1-(x-2)+4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = \frac{(2+r\cos\theta)(1+r\sin\theta)-3(1+r\sin\theta)^2+1-r\cos\theta+4r\sin\theta}{r} = r\sin\theta(\cos\theta-3\sin\theta).$$

On a alors
$$\left|\frac{xy-3y^2+1-(x-2)+4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}\right| \le 4r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

d'où
$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{xy-3y^2+1-(x-2)+4(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(2,1)$.

c) On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy+3y^2 & f(2,1) &= 5,\\ \partial_x f(x,y) &= y & \partial_x f(2,1) &= 1,\\ \partial_y f(x,y) &= x+6y & \partial_y f(2,1) &= 8, \end{aligned}$$

donc
$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{xy+3y^2-5-(x-2)-8(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 2 + r\cos\theta$ et $y = 1 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy+3y^2-5-(x-2)-8(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = \frac{(2+r\cos\theta)(1+r\sin\theta)+3(1+r\sin\theta)^2-5-r\cos\theta-8r\sin\theta}{r} = r\sin\theta(3\sin\theta+\cos\theta).$$

On a alors

$$\left|\frac{xy+3y^2-5-(x-2)-8(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}}\right| \le 4r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(2,1)} \frac{xy+3y^2-5-(x-2)-8(y-1)}{\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(-2,3)$.

d) On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= xy-2y^2 & f(-2,3) &= -24,\\ \partial_x f(x,y) &= y & \partial_x f(-2,3) &= 3,\\ \partial_y f(x,y) &= x-4y & \partial_y f(-2,3) &= -14, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{xy-2y^2+24-3(x+2)+14(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = -2 + r\cos\theta$ et $y = 3 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit

$$\frac{xy-y^2+24-3(x+2)+14(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}} = \frac{(-2+r\cos\theta)(3+r\sin\theta)-2(3+r\sin\theta)^2-24-3r\cos\theta+14r\sin\theta}{r} = r\sin\theta(\cos\theta-2\sin\theta).$$

On a alors

$$\left|\frac{xy-y^2+24-3(x+2)+14(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}}\right| \le 3r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(-2,3)} \frac{xy-y^2+24-3(x+2)+14(y-3)}{\sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(-2,3)$.

e) On a

$$\begin{aligned} f(x,y) &= y\sqrt{x} & f(4,1) &= 2,\\ \partial_x f(x,y) &= \frac{y}{2\sqrt{x}} & \partial_x f(4,1) &= \frac{1}{4},\\ \partial_y f(x,y) &= \sqrt{x} & \partial_y f(4,1) &= 2, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \frac{y\sqrt{x}-2-\frac14(x-4)-2(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}}.$$

Avec le changement de variables $x = 4 + r\cos\theta$ et $y = 1 + r\sin\theta$ ce rapport se réécrit

$$\begin{aligned} \frac{y\sqrt{x}-2-\frac14(x-4)-2(y-1)}{\sqrt{(x-4)^2+(y-1)^2}} &= \frac{(1+r\sin\theta)\sqrt{4+r\cos\theta}-2-\frac{r\cos\theta}{4}-2r\sin\theta}{r}\\ &= \frac{2(1+r\sin\theta)\sqrt{1+\frac{r\cos\theta}{4}}-2-\frac{r\cos\theta}{4}-2r\sin\theta}{r}\\ &= \frac{2(1+r\sin\theta)\left(1+\frac{r\cos\theta}{8}+o(r)\right)-2-\frac{r\cos\theta}{4}-2r\sin\theta}{r}\\ &= \frac{r}{4}\cos\theta\sin\theta+\frac{o(r)}{r} \xrightarrow[r\to 0]{} 0 \end{aligned}$$

où on a utilisé l'approximation $\sqrt{1+t} \simeq 1+\frac{t}{2}+o(t)$ lorsque $x \simeq 0$. Par conséquent

$$\lim_{(x,y)\to(4,1)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = 0.$$

La fonction est donc différentiable en $(4,1)$.

f) Comme $f(x,0)=f(0,y)$ alors $\partial_x f(0,0)=\partial_y f(0,0)=0$ donc

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}}=\frac{|y|\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Avec le changement de variables $x=r\cos\theta$ et $y=r\sin\theta$ on a

$$\left|\frac{|y|\ln(1+x)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|=|\sin(\vartheta)\ln(1+r\cos(\vartheta))|\le 2r|\sin(\vartheta)\cos(\vartheta)|\le 2r\xrightarrow[r\to0]{}0.$$

La fonction est donc différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.14

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ une application. Dire si les affirmations suivantes sont $\boxed{\text{V}}$raies ou $\boxed{\text{F}}$ausses.

- ☐ 1. Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est différentiable en tout point.
- ☐ 2. Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors il existe ∇f en tout point.
- ☐ 3. Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est continue.
- ☐ 4. Si f est différentiable en tout point alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- ☐ 5. S'il existe ∇f en tout point alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- ☐ 6. Si f est continue alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- ☐ 7. Si f est différentiable en (x_0,y_0) alors il existe $\nabla f(x_0,y_0)$.
- ☐ 8. Si f est différentiable alors f est continue.
- ☐ 9. S'il existe $\nabla f(x_0,y_0)$ alors f est différentiable en (x_0,y_0).
- ☐ 10. Si f est continue alors f est différentiable.
- ☐ 11. Si f est continue alors il existe ∇f en tout point.
- ☐ 12. S'il existe ∇f en tout point alors f est continue.

CORRECTION.

1. $\boxed{\text{V}}$ Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est différentiable en tout point.
2. $\boxed{\text{V}}$ Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors il existe ∇f en tout point.
3. $\boxed{\text{V}}$ Si $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ alors f est continue.
4. $\boxed{\text{F}}$ Si f est différentiable en tout point alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
5. $\boxed{\text{F}}$ S'il existe ∇f en tout point alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
6. $\boxed{\text{F}}$ Si f est continue alors $f\in\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
7. $\boxed{\text{V}}$ Si f est différentiable en (x_0,y_0) alors il existe $\nabla f(x_0,y_0)$.
8. $\boxed{\text{V}}$ Si f est différentiable alors f est continue.
9. $\boxed{\text{F}}$ S'il existe $\nabla f(x_0,y_0)$ alors f est différentiable en (x_0,y_0).
10. $\boxed{\text{F}}$ Si f est continue alors f est différentiable.
11. $\boxed{\text{F}}$ Si f est continue alors il existe ∇f en tout point.
12. $\boxed{\text{F}}$ S'il existe ∇f en tout point alors f est continue.

Exercice 3.15 *Exemple de* PEANO

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $\nabla f(x,y)$. Montrez que f admet des dérivées partielles secondes en tout point. Que pouvez-vous déduire du calcul de $\partial_{xy} f(0,0)$ et de $\partial_{yx} f(0,0)$?

CORRECTION. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} |f(x,y)| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left| \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} \right| = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \rho^2 |\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)(\cos^2\theta - \sin^2\theta)| \le \lim_{\rho\to 0} 2\rho^2 = 0 = f(0,0).$$

f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

On a

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} y\dfrac{x^4+4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad \partial_y f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^4-4x^2y^2-y^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

On en déduit

$$\partial_{xx} f(x,y) = \begin{cases} \frac{4xy^3(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial_x f(x,0)-\partial_x f(0,0)}{x} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad \partial_{xy} f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\partial_y f(x,0)-\partial_y f(0,0)}{x} = 1 & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

$$\partial_{yx} f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^6+9x^4y^2-9x^2y^4-y^6}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial_x f(0,y)-\partial_x f(0,y)}{y} = -1 & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad \partial_{yy} f(x,y) = \begin{cases} \frac{4x^3y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{\partial_y f(0,y)-\partial_y f(0,0)}{y} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases}$$

Comme $\partial_{xy} f(0,0) \neq \partial_{yx} f(0,0)$, le théorème de SCHWARZ permet de conclure que les dérivées secondes $\partial_{xy} f(x,y)$ et $\partial_{yx} f(x,y)$ ne sont pas continue en $(0,0)$.

Exercice 3.16 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

CORRECTION.

1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$ il faut alors que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0) = 0$. Passons on coordonnées polaires : $x = 0 + r\cos(\vartheta)$, $y = 0 + r\sin(\vartheta)$,
$$\tilde{f}(r,\vartheta) = f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r\cos^2\vartheta\sin(\vartheta).$$
Comme $|\tilde{f}(r,\vartheta)| \le r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. $\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_x f(x,y)\\ \partial_y f(x,y) \end{pmatrix}$ avec
$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy^3}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases} \qquad \partial_y f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0 & \text{si } (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

3. Comme f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ alors f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$. Pour qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$ il faut que les dérivées partielles soient continues sur $\mathbb{R}^2$, autrement dit il faut que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \partial_x f(0,0) \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \partial_y f(0,0)$$
Comme $\partial_x f(x,x) = \frac{1}{2} \neq 0 = \partial_x f(0,0)$ on conclut que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(0,0)$, donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
4. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Pour qu'elle soit différentiable sur $\mathbb{R}^2$ il faut que
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = 0.$$
Si on note $h(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}$, comme $h(x,x) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.17 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ existent et les calculer le cas échéant.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

CORRECTION.

1. On étudie la limite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$. On a
$$\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2} = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} = r^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\left(\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta)\right) \xrightarrow[\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}]{} 0$$
car $\left|r^2\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\left(\cos^2(\vartheta)-\sin^2(\vartheta)\right)\right| \le 2r^2$. On en déduit que la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ est $0 = f(0,0)$. La fonction est donc continue en $(0,0)$. De plus, f est continue sur $(\mathbb{R}^*_+)^2$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Attention : il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point puisque la fonction au point $(0,0)$ n'est pas définie de la même façon que sur le reste du domaine.
   ▷ Calcul de $\partial_x f(0,0)$:
$$\partial_x f(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{(0+t)0\frac{(0+t)^2-0^2}{(0+t)^2+0^2}-0}{t} = \lim_{t\to0}\frac{0}{t} = \lim_{t\to0} 0 = 0.$$
   La dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ existe et est égale à 0.
   ▷ Calcul de $\partial_y f(0,0)$:
$$\partial_y f(0,0) = \lim_{t\to0} \frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t} = \lim_{t\to0} \frac{0(0+t)\frac{0^2-(0+t)^2}{0^2+(0+t)^2}-0}{t} = \lim_{t\to0}\frac{0}{t} = \lim_{t\to0} 0 = 0.$$
   La dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ existe et est égale à 0.
3. Ici on doit calculer les dérivées partielles sur le reste du domaine et vérifier si elles sont continues ou non en $(0,0)$ qui est le seul point qui peut poser des problèmes.
   ▷ Calcul de $\partial_x f(x,y)$ pour $(x,y) \neq (0,0)$:
$$\partial_x\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2x)}{(x^2+y^2)^2} = y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

On a
$$y\frac{x^4-y^4+4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=r\sin(\vartheta)\Big(\cos^4(\vartheta)-\sin^4(\vartheta)+4\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\Big)\xrightarrow[\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}]{}0$$
car $\left|r\sin(\vartheta)\Big(\cos^4(\vartheta)-\sin^4(\vartheta)+4\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\Big)\right|\le 6r$. On en déduit que la limite de $\partial_x f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ est $0=\partial_x f(0,0)$. La fonction $\partial_x f$ est donc continue en $(0,0)$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

▷ Calcul de $\partial_y f(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$:
$$\partial_y\left(\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}\right)=\frac{(x^3-3xy^2)(x^2+y^2)-(x^3y-xy^3)(2y)}{(x^2+y^2)^2}=x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$
On a
$$x\frac{x^4-y^4-4x^2y^2}{(x^2+y^2)^2}=r\cos(\vartheta)\Big(\cos^4(\vartheta)-\sin^4(\vartheta)-4\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\Big)\xrightarrow[\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}]{}0$$
car $\left|r\cos(\vartheta)\Big(\cos^4(\vartheta)-\sin^4(\vartheta)-4\cos^2(\vartheta)\sin^2(\vartheta)\Big)\right|\le 6r$. On en déduit que la limite de $\partial_y f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ est $0=\partial_y f(0,0)$. La fonction $\partial_y f$ est donc continue en $(0,0)$. De plus, elle est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

La fonction f est continues sur $\mathbb{R}^2$, elle admets des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$ et ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On conclut que la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

4. La fonction f est différentiable en $(0,0)$ car elle est de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 3.18 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction ainsi définie
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Est-elle dérivable sur $\mathbb{R}^2$?
3. Est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Correction.

1. Étude de la continuité sur $\mathbb{R}^2$

   Étude sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ **:** f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.

   Étude en $(0,0)$ **:** pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0)=0$. Passons on coordonnées polaires : $x=0+r\cos(\vartheta)$, $y=0+r\sin(\vartheta)$,
   $$\tilde f(r,\vartheta)=f(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r\cos(\vartheta)\sin^2(\vartheta).$$
   Comme $|\tilde f(r,\vartheta)|\le r\xrightarrow[r\to0]{}0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$.

   Donc f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Étude de la dérivabilité sur $\mathbb{R}^2$

   f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$ si les deux dérivées partielles $\partial_x f$ et $\partial_y f$ sont définie pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$:
   $$\partial_x f(x,y)=\begin{cases}\frac{y^4-x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}\qquad \partial_y f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ \lim\limits_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$
   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

3. Étude de la régularité sur $\mathbb{R}^2$

   f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2$.

Étude sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ **:** les dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$

Étude en $(0,0)$ **:** les dérivées partielles sont continues en $(0,0)$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_x f(x,y)=\partial_x f(0,0) \qquad\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_y f(x,y)=\partial_y f(0,0)$$

Comme $\partial_y f(x,x)=\frac{1}{2}\neq 0=\partial_y f(0,0)$ on conclut que $\partial_y f$ n'est pas continue en $(0,0)$

f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ mais n'est pas de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. ÉTUDE DE LA DIFFÉRENTIABILITÉ SUR $\mathbb{R}^2$

Étude sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ **:** comme f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

Étude en $(0,0)$ **:** pour que f soit différentiable en $(0,0)$ il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0.$$

Si on note $h(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\frac{xy^2}{\sqrt{(x^2+y^2)^3}}$, comme $h(x,x)=\frac{1}{2^{3/2}}\neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mais n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.19

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0).\end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ *:*
   1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$;
   1.2. calculer le gradient de f pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$;
   1.3. montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$;
   1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$?
2. *Étude de la fonction en* $(1,0)$ *:*
   2.1. montrer que f est continue en $(1,0)$;
   2.2. calculer le gradient de f en $(1,0)$;
   2.3. montrer que f n'est pas différentiable en $(1,0)$;
   2.4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $(1,0)$?

CORRECTION.

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$.
   1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   1.2. Le gradient de f pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x,y)=-y^2\frac{(x-1)^2-y^2}{((x-1)^2+y^2)^2},\qquad \partial_y f(x,y)=\frac{2(x-1)^3y}{((x-1)^2+y^2)^2}.$$

   1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\})$.
   1.4. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$.
2. *Étude de la fonction en* $(1,0)$.
   2.1. Pour que f soit continue en $(1,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(1,0)}f(x,y)=f(1,0)$. Passons en coordonnées polaires : $x=1+r\cos(\vartheta)$, $y=0+r\sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r,\vartheta)=f(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r\cos(\vartheta)\sin^2\vartheta.$$

   Comme $|\tilde{f}(r,\vartheta)|\le r\xrightarrow[r\to0]{}0$ alors $\lim_{(x,y)\to(1,0)}f(x,y)=0$ donc f est continue en $(1,0)$.
   2.2. Le gradient de f en $(1,0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(1,0)=\lim_{x\to1}\frac{f(x,0)-f(1,0)}{x-1}=0,\qquad \partial_y f(1,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(1,0)}{y-0}=0.$$

2.3. Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(1,0)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \frac{f(x,y)-f(1,0)-\partial_x f(1,0)(x-1)-\partial_y f(1,0)(y-0)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}} \neq 0.$$

Notons $h(x,y)=\frac{f(x,y)-f(1,0)-\partial_x f(1,0)(x-1)-\partial_y f(1,0)(y-0)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-0)^2}}=\frac{(x-1)y^2}{((x-1)^2+y^2)^{3/2}}$; comme $h(x,x-1)=\frac{1}{2^{3/2}}\neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(1,0)$.

2.4. Comme f n'est pas différentiable en $(1,0)$, elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(1,0)$. Si on a oublié ce théorème on peut le prouver directement : pour qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^1$ en $(1,0)$ il faut que les dérivées partielles soient continues, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(1,0)} \partial_x f(x,y)=\partial_x f(1,0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,0)} \partial_y f(x,y)=\partial_y f(1,0).$$

Comme $\partial_y f(x,x-1)=\frac{1}{2}\neq\partial_y f(1,0)=0$ on conclut que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(1,0)$, donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(1,0)$.

Exercice 3.20

Soit $f\colon \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2(y+1)}{x^2+(y+1)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,-1),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,-1).\end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$ *:*
   1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$;
   1.2. calculer le gradient de f pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$;
   1.3. montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$;
   1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$?
2. *Étude de la fonction en* $(0,-1)$ *:*
   2.1. montrer que f est continue en $(0,-1)$;
   2.2. calculer le gradient de f en $(0,-1)$;
   2.3. montrer que f n'est pas différentiable en $(0,-1)$;
   2.4. f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,-1)$?

Correction.

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$.
   1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   1.2. Le gradient de f pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x,y)=\frac{2x(y+1)^3}{(x^2+(y+1)^2)^2}, \qquad \partial_y f(x,y)=x^2\frac{x^2-(y+1)^2}{(x^2+(y+1)^2)^2}.$$

   1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\})$.
   1.4. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$.
2. *Étude de la fonction en* $(0,-1)$.
   2.1. Pour que f soit continue en $(0,-1)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y)=f(0,-1)$. Passons en coordonnées polaires : $x=0+r\cos(\vartheta)$, $y=-1+r\sin(\vartheta)$,

$$\tilde f(r,\vartheta)=f(x(r,\vartheta),y(r,\vartheta))=r\cos^2\vartheta\sin(\vartheta).$$

   Comme $|\tilde f(r,\vartheta)|\le r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,-1)} f(x,y)=0$ donc f est continue en $(0,-1)$.
   2.2. Le gradient de f en $(0,-1)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(0,-1)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,-1)}{x-1}=0, \qquad \partial_y f(0,-1)=\lim_{y\to -1}\frac{f(0,y)-f(0,-1)}{y+1}=0.$$

2.3. Pour prouver que f n'est pas différentiable en $(0,-1)$ il faut montrer que

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \frac{f(x,y)-f(0,-1)-\partial_x f(0,-1)(x-0)-\partial_y f(0,-1)(y+1)}{\sqrt{x^2+(y+1)^2}} \neq 0.$$

Notons $h(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,-1)-\partial_x f(0,-1)(x-0)-\partial_y f(0,-1)(y+1)}{\sqrt{(x-0)^2+(y+1)^2}}=\frac{x^2(y+1)}{(x^2+(y+1)^2)^{3/2}}$; comme $h(y+1,y)=\frac{1}{2^{3/2}}\neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0,-1)$.

2.4. Comme f n'est pas différentiable en $(0,-1)$, elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,-1)$. Si on a oublié ce théorème on peut le prouver directement : pour qu'elle soit de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,-1)$ il faut que les dérivées partielles soient continues, autrement dit il faut que

$$\lim_{(x,y)\to(0,-1)} \partial_x f(x,y)=\partial_x f(0,-1) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,-1)} \partial_y f(x,y)=\partial_y f(0,-1).$$

Comme $\partial_y f(y+1,y)=\frac{1}{2}\neq\partial_y f(0,-1)=0$ on conclut que $\partial_x f$ n'est pas continue en $(0,-1)$, donc f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,-1)$.

Exercice 3.21 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Correction.

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{\rho\to0\\ \forall\theta}}\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta\le\lim_{\rho\to0}\rho^2=0=f(0,0).$$

   f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour $(x,y)\neq(0,0)$ on a

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y)\\ \partial_y f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}.$$

   Pour $(x,y)=(0,0)$ on a

$$\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}\partial_x f(0,0)\\ \partial_y f(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\\ \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

3. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\partial_x f(x,y)=\begin{cases}\frac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_x f(x,y)=\lim_{\substack{\rho\to0\\ \forall\theta}}\frac{2\rho^5(\cos\theta\sin^4\theta)}{\rho^4}=\lim_{\rho\to0}2\rho=0=\partial_x f(0,0)$$

$$\partial_y f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x^4y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_y f(x,y)=\lim_{\substack{\rho\to0\\ \forall\theta}}\frac{2\rho^5(\cos^4\theta\sin\theta)}{\rho^4}=\lim_{\rho\to0}2\rho=0=\partial_y f(0,0),$$

   la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.22 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Correction.

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \rho^3\cos^3\theta\sin^2\theta = \lim_{\rho\to 0}\rho^3 = 0 = f(0,0).$$

f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour $(x,y) \neq (0,0)$ on a

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}\partial_x f(x,y)\\ \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}.$$

Pour $(x,y) = (0,0)$ on a

$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix}\partial_x f(0,0)\\ \partial_y f(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\\ \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

3. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases}\frac{x^2y^2(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0),\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{\rho^6\cos^2\theta\sin^2\theta(\cos^2\theta+3\sin^2\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 4\rho^2 = 0 = \partial_x f(0,0)$$

$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases}\frac{2x^5y}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{2\rho^6(\cos^5\theta\sin\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho^2 = 0 = \partial_y f(0,0),$$

la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.23 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0).\end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$?

4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Correction.

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \rho^3\cos^2\theta\sin^3\theta = \lim_{\rho\to 0}\rho^3 = 0 = f(0,0).$$
f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Pour $(x,y)\neq(0,0)$ on a
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix}\partial_x f(x,y)\\ \partial_y f(x,y)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2}\\ \frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}.$$
Pour $(x,y)=(0,0)$ on a
$$\nabla f(0,0) = \begin{pmatrix}\partial_x f(0,0)\\ \partial_y f(0,0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\\ \lim_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$
3. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a
$$\partial_x f(x,y) = \begin{cases}\frac{2xy^5}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{2\rho^6(\cos\theta\sin^5\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 2\rho^2 = 0 = \partial_x f(0,0)$$
$$\partial_y f(x,y) = \begin{cases}\frac{x^2y^2(3x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \frac{\rho^6(3\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{\rho^4} = \lim_{\rho\to 0} 4\rho^2 = 0 = \partial_y f(0,0),$$
la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
4. Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.24 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie
$$f(x,y) = \begin{cases}(x^2+y^2)^3\cos\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. Est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
4. Sans faire de calculs, que peut-on conclure sur la différentiabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}^2$?

Correction.

1. La fonction est clairement continue dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Elle est aussi continue en $(0,0)$ car
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{\substack{\rho\to 0\\ \forall\theta}} \rho^6\cos\frac{1}{\rho^2} = 0 = f(0,0).$$
f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. Pour $(x,y)\neq(0,0)$ on a

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\partial_x f(x,y)\\ \partial_y f(x,y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6x(x^2+y^2)^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}+2x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\\ 6y(x^2+y^2)^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}+2y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\end{pmatrix}.$$

Pour $(x,y)=(0,0)$ on a

$$\nabla f(0,0)=\begin{pmatrix}\partial_x f(0,0)\\ \partial_y f(0,0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}\\ \lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

3. On a déjà vérifié que la fonction est continue sur $\mathbb{R}^2$. Vérifions si ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2$. On a

$$\partial_x f(x,y)=\begin{cases}6x(x^2+y^2)^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}+2x(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_x f(x,y)=\lim_{\substack{\rho\to0\\ \forall\theta}}6\rho^5\cos\theta\cos\frac{1}{\rho^2}+2\rho^3\cos\theta\sin\frac{1}{\rho^2}=0=\partial_x f(0,0)$$

$$\partial_y f(x,y)=\begin{cases}6y(x^2+y^2)^2\cos\frac{1}{x^2+y^2}+2y(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\partial_y f(x,y)=\lim_{\substack{\rho\to0\\ \forall\theta}}6\rho^5\sin\theta\cos\frac{1}{\rho^2}+2\rho^3\sin\theta\sin\frac{1}{\rho^2}=0=\partial_y f(0,0),$$

la fonction est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

4. Puisque toute fonction de classe $\mathscr{C}^1(\Omega)$ est différentiable sur Ω, on conclut que f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.25 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$; calculer ensuite $\nabla f(0,0)$. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$?
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

CORRECTION.

1. La fonction est clairement continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. De plus

$$\frac{y^4}{x^2+y^2}=\frac{(r\sin\theta)^4}{(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2}=r^2\sin^4\theta\le r^2\xrightarrow[r\to0]{}0$$

d'où

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0).$$

f est donc continue sur $\mathbb{R}^2$.

2. $\vec{\nabla}f(x,y)$ est le vecteur de composantes $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ et on a :

$$\partial_x f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \displaystyle\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0}=0, & \text{sinon;}\end{cases}$$

$$\partial_y f(x,y)=\begin{cases}2y^3\dfrac{2x^2+y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \displaystyle\lim_{y\to0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0}=0, & \text{sinon.}\end{cases}$$

Étant donné que

$$\left|\frac{-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2\left|\frac{(r\cos\theta)(r\sin\theta)^4}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^2}\right| \le 2r \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

et

$$\left|\frac{2y^3(2x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2}\right| = 2\left|\frac{(r\sin\theta)^3(2(r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^2}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^2}\right| \le 18r^3 \xrightarrow[r\to 0]{} 0$$

on a

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0 = \partial_x f(0,0),$$
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0 = \partial_y f(0,0).$$

La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

3. Étant de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2)$, f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$. Si on ne se rappelle pas du théorème on peut le vérifier directement par la définition : une application $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2$ ssi

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

On a bien

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-\partial_x f(x_0,y_0)(x-x_0)-\partial_y f(x_0,y_0)(y-y_0)}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = 0$$

car

$$\frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} = \frac{(r\sin\theta)^4}{((r\cos\theta)^2+(r\sin\theta)^2)^{3/2}} \le r \xrightarrow[r\to 0]{} 0.$$

Exercice 3.26 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction ainsi définie

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$?
2. Calculer $\nabla f(x,y)$ pour $(x,y)\neq(0,0)$; calculer ensuite $\nabla f(0,0)$.
3. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

Correction.

1. La fonction est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ mais elle n'est pas continue sur $\mathbb{R}^2$ car si on considère la restriction de f à la courbe $y=x$, qui passe par $(0,0)$, on a
$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2x} \neq f(0,0).$$
2. $\vec{\nabla} f(x,y)$ est le vecteur de composantes $\partial_x f(x,y)$ et $\partial_y f(x,y)$ et on a :
$$\partial_x f = \begin{cases} \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0, & \text{sinon;}\end{cases} \qquad \partial_y f = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ \nexists, & \text{sinon}\end{cases}$$
car $\lim\limits_{y\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = \infty$.
3. N'étant pas continue, f n'est pas différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3.27 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2. Déterminer si les dérivées partielles $\partial_x f(0,0)$ et $\partial_y f(0,0)$ existent et les calculer le cas échéant.
3. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?
4. La fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?

CORRECTION.

1. On étudie la limite
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}.$$
On a
$$\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}=xy\frac{x+y}{x^2+y^2}=r\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big(\cos(\vartheta)+\sin(\vartheta)\Big)\xrightarrow[\substack{r\to0\\ \forall\vartheta}]{}0$$
car $\Big|r\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)\Big(\cos(\vartheta)+\sin(\vartheta)\Big)\Big|\le 2r$. On en déduit que la limite de $f(x,y)$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ est $0=f(0,0)$. La fonction est donc continue en $(0,0)$.
2. Attention : il faut revenir à la définition de dérivée partielle en un point puisque la fonction au point $(0,0)$ n'est pas définie de la même façon que sur le reste du domaine.
$$\partial_x f(0,0)=\lim_{t\to0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to0}\frac{(0+t)0\frac{(0+t)+0}{(0+t)^2+0^2}-0}{t}=\lim_{t\to0}\frac{0}{t}=\lim_{t\to0}0=0.$$
La dérivée partielle par rapport à x en $(0,0)$ existe et est égale à 0.
La fonction est symétrique en x et y, donc la dérivée partielle par rapport à y en $(0,0)$ existe et est égale à 0.
3. Ici on doit calculer la dérivée partielle sur le reste du domaine et vérifier si elle est continue ou non en $(0,0)$ qui est le seul point qui peut poser des problèmes.
$$\partial_x\left(\frac{x^2y+xy^2}{x^2+y^2}\right)=\frac{(2xy+y^2)(x^2+y^2)-(x^2y+xy^2)(2x)}{(x^2+y^2)^2}=y^2\frac{y^2-x^2+2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$
On remarque que sur la droite $y=x$ elle vaut $1/2\neq\partial_x f(0,0)$. On en déduit que la dérivée partielle par rapport à x n'est pas continue en $(0,0)$ donc la fonction f n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
4. La fonction f est différentiable en $(0,0)$ ssi
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=0.$$
On a
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy\frac{x+y}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$
On remarque que sur la droite $y=x$ elle n'existe pas. La fonction f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.28 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $m\in\mathbb{N}$ et $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^my}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$:

1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
1.2. calculer le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
1.3. montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$ *:*
   2.1. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
   2.2. calculer le gradient de f en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
   2.3. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
   2.4. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$?

CORRECTION.

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   1.2. Le gradient de f pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x,y) = \frac{x^{m-1}y(mx^2+my^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \partial_y f(x,y) = \frac{x^m(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2}.$$

   1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
   1.4. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$.
   2.1. Pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.
   ▷ Si $m = 0$, f s'écrit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   qui n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,0) = 0$ mais $f(x,x) = 1/(2x) \xrightarrow[x\to 0]{} \infty$.
   ▷ Si $m = 1$, f s'écrit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   qui n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,0) = 0$ mais $f(x,x) = 1/2$.
   ▷ Si $m > 1$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r\cos(\vartheta)$, $y = 0 + r\sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r,\vartheta) = f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^{m-1}\cos^m(\vartheta)\sin(\vartheta).$$

   Comme $|\tilde{f}(r,\vartheta)| \le r^{m-1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ donc f est continue en $(0,0)$.
   2.2. Le gradient de f en $(0,0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0, \qquad \partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0.$$

   2.3. f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \partial_x f(0,0)(x-0) - \partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} \neq 0.$$

   De plus, toute fonction différentiable est continue.
   ▷ Si $m = 0$ ou $m = 1$, f n'est pas continue en $(0,0)$ donc elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.
   ▷ Soit $m > 1$ et notons $h(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \frac{x^m y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.
      ▷ Si $m = 2$, comme $h(y,y) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
      ▷ Si $m > 2$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r\cos(\vartheta)$, $y = 0 + r\sin(\vartheta)$,

$$\tilde{h}(r,\vartheta) = h(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^{m-2}\cos^m(\vartheta)\sin(\vartheta).$$

      Comme $|\tilde{h}(r,\vartheta)| \le r^{m-2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$ donc f est différentiable en $(0,0)$.

2.4. Une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont continues, autrement dit si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \partial_x f(0,0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \partial_y f(0,0).$$

De plus, toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est différentiable.

- ▷ Si $m = 0$ ou $m = 1$ ou $m = 2$, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ donc elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.
- ▷ Si $m > 2$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r\cos(\vartheta)$, $y = 0 + r\sin(\vartheta)$,

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_x f(r,\vartheta) = \partial_x f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^{m-2}(m - \cos^2(\vartheta))\cos^{m-1}(\vartheta)\sin(\vartheta), \\ \tilde{\partial}_y f(r,\vartheta) = \partial_y f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^{m-2}(\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta))\cos^m(\vartheta). \end{cases}$$

Comme $|\tilde{\partial}_x f(r,\vartheta)| \le m r^{m-2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ et $|\tilde{\partial}_y f(r,\vartheta)| \le 2r^{m-2} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = 0$ donc f est différentiable en $(0,0)$.

Exercice 3.29 *Continuité, dérivabilité, différentiabilité*

Soit $m \in \mathbb{N}$ et $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^m y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *:*
   1.1. montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
   1.2. calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
   1.3. montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
   1.4. que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$ *:*
   2.1. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
   2.2. calculer le gradient de f en $(0,0)$ pour tout $m \in \mathbb{N}$;
   2.3. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle différentiable en $(0,0)$?
   2.4. pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{N}$ la fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$?

CORRECTION.

1. *Étude de la fonction sur* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
   1.1. f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
   1.2. Le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(x,y) = \frac{(m-1)x^{m-1}y^2(x^2+y^2) - x^m y^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^{m-1}y^2(mx^2+my^2-2x^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$\partial_y f(x,y) = x^m \frac{2y(x^2+y^2) - 2y^3}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^{m+2}y}{(x^2+y^2)^2}.$$

   1.3. f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$; ses dérivées partielles sont continues sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ car quotients de fonctions continues dont les dénominateurs ne s'annulent pas. Alors f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
   1.4. Comme f est de classe $\mathscr{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ alors f est différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
2. *Étude de la fonction en* $(0,0)$.
   2.1. Pour que f soit continue en $(0,0)$ il faut que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$.
   - ▷ Si $m = 0$, f s'écrit

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   qui n'est pas continue en $(0,0)$ car $f(x,0) = 0$ mais $f(x,x) = 1/2$.
   - ▷ Si $m > 0$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r\cos(\vartheta)$, $y = 0 + r\sin(\vartheta)$,

$$\tilde{f}(r,\vartheta) = f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^m \cos^m(\vartheta)\sin^2(\vartheta).$$

   Comme $|\tilde{f}(r,\vartheta)| \le r^m \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ donc f est continue en $(0,0)$.

2.2. Le gradient de f en $(0,0)$ est le vecteur de composantes

$$\partial_x f(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x-0} = 0, \qquad \partial_y f(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y-0} = 0.$$

2.3. f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} \neq 0.$$

De plus, toute fonction différentiable est continue.
- ▷ Si $m=0$, f n'est pas continue en $(0,0)$ donc elle n'est pas différentiable en $(0,0)$.
- ▷ Soit $m>0$ et notons $h(x,y) = \frac{f(x,y)-f(0,0)-\partial_x f(0,0)(x-0)-\partial_y f(0,0)(y-0)}{\sqrt{(x-0)^2+(y-0)^2}} = \frac{x^m y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}$.
  - ▷ Si $m=1$, comme $h(y,y) = \frac{1}{2^{3/2}} \neq 0$, alors f n'est pas différentiable en $(0,0)$.
  - ▷ Si $m>1$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r\cos(\vartheta)$, $y = 0 + r\sin(\vartheta)$,

$$\tilde{h}(r,\vartheta) = h(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^{m-1}\cos^m(\vartheta)\sin^2(\vartheta).$$

Comme $|\tilde{h}(r,\vartheta)| \le r^{m-1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = 0$ donc f est différentiable en $(0,0)$.

2.4. Une fonction est de classe $\mathscr{C}^1$ si ses dérivées partielles sont continues, autrement dit si

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = \partial_x f(0,0) \qquad \text{et} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) = \partial_y f(0,0).$$

De plus, toute fonction de classe $\mathscr{C}^1$ est différentiable.
- ▷ Si $m=0$ ou $m=1$, f n'est pas différentiable en $(0,0)$ donc elle n'est pas de classe $\mathscr{C}^1$ en $(0,0)$.
- ▷ Si $m>1$, passons en coordonnées polaires : $x = 0 + r\cos(\vartheta)$, $y = 0 + r\sin(\vartheta)$,

$$\begin{cases} \tilde{\partial}_x f(r,\vartheta) = \partial_x f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = r^{m-1}(m-\cos^2(\vartheta))\cos^{m-1}(\vartheta)\sin^2(\vartheta), \\ \tilde{\partial}_y f(r,\vartheta) = \partial_y f(x(r,\vartheta), y(r,\vartheta)) = 2r^{m-1}\cos^{m-2}(\vartheta)\sin(\vartheta). \end{cases}$$

Comme $|\tilde{\partial}_x f(r,\vartheta)| \le m r^{m-1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ et $|\tilde{\partial}_y f(r,\vartheta)| \le 2r^{m-1} \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ alors $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_x f(x,y) = 0$ et $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \partial_y f(x,y) =$ 0 donc f est différentiable en $(0,0)$.

Fonctions implicites

Exercice 3.30

On considère la courbe plane d'équation

$$y e^x + e^y \sin(2x) = 0. \tag{3.1}$$

1. Vérifier que l'équation (3.1) définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0,\varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x,y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe.

Correction. On pose $f(x,y) = y e^x + e^y \sin(2x)$.

1. On note que $(0,0)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On a

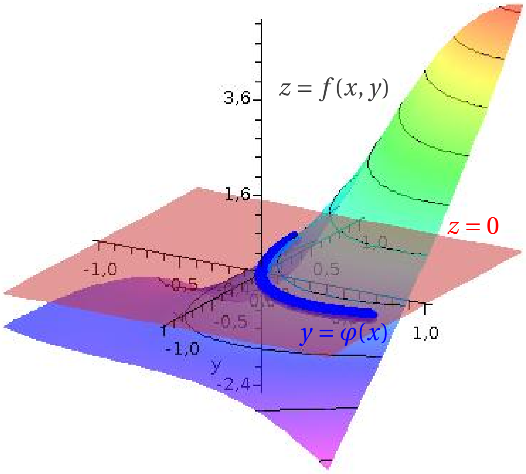
$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y) &= y e^x + 2e^y\cos(2x), & \partial_x f(0,0) &= 2, \\ \partial_y f(x,y) &= e^x + e^y \sin(2x), & \partial_y f(0,0) &= 1. \end{aligned}$$

   Puisque $\partial_y f(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x,\varphi(x)) = 0$.
2. On a

$$\varphi'(0) = -\frac{\partial_x f(0,0)}{\partial_y f(0,0)} = -2$$

   donc l'équation de la droite tangente à φ en $x=0$ est $y = -2x$.
3. On a

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0) \\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \varphi'(x) = \varphi'(0) = -2.$$



Exercice 3.31

On considère la courbe plane d'équation

$$xe^y + e^x \sin(2y) = 0. \tag{3.2}$$

1. Vérifier que l'équation (3.2) définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0, \varphi(0))$.
3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x, y) tend vers $(0,0)$ en étant sur la courbe.

Correction. On pose $f(x, y) = xe^y + e^x \sin(2y)$

1. On note que $(0,0)$ est une solution de l'équation $f(x, y) = 0$. On a
$$\begin{aligned} &\partial_x f(x,y) = e^y + e^x \sin(2y), && \partial_x f(0,0) = 1,\\ &\partial_y f(x,y) = xe^y + 2e^x \cos(2y), && \partial_y f(0,0) = 2. \end{aligned}$$
Puisque $\partial_y f(0,0) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 0 tel que $f(x, \varphi(x)) = 0$.
2. On a
$$\varphi'(0) = -\frac{\partial_x f(0,0)}{\partial_y f(0,0)} = -\frac{1}{2}$$
donc l'équation de la droite tangente à φ en $x = 0$ est $y = -\frac{1}{2}x$.
3. On a
$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ f(x,y)=0}} \frac{y}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0} \varphi'(x) = \varphi'(0) = -\frac{1}{2}.$$

Exercice 3.32

On considère la courbe plane d'équation

$$2x^3 y + 2x^2 + y^2 = 5. \tag{3.3}$$

1. Vérifier que l'équation (3.3) définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(1,1)$.
2. Calculer $\varphi'(1)$ et écrire l'équation de la droite tangente au graphe de la fonction φ en le point $(1, \varphi(1))$.
3. Sachant que
$$\varphi''(x) = -\frac{\partial_{xx} f(x,\varphi(x))(\partial_y f(x,\varphi(x)))^2 - 2\partial_x f(x,\varphi(x))\partial_y f(x,\varphi(x))\partial_{xy} f(x,\varphi(x)) + (\partial_x f(x,\varphi(x)))^2 \partial_{yy} f(x,\varphi(x))}{(\partial_y f(x,\varphi(x)))^3}$$
en déduire le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 centré en $x = 1$.

CORRECTION. On pose $f(x,y) = 2x^3y + 2x^2 + y^2 - 5$

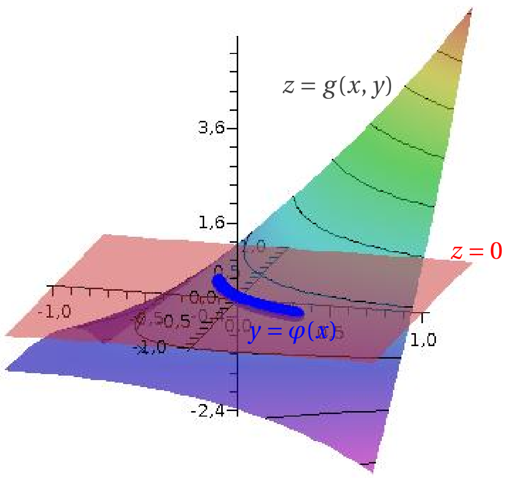
1. On note que $(1,1)$ est une solution de l'équation $f(x,y) = 0$. On a
$$\partial_x f(x,y) = 6x^2y + 4x \qquad \partial_x f(1,1) = 10,$$
$$\partial_y f(x,y) = 2x^3 + 2y, \qquad \partial_y f(1,1) = 4.$$
Puisque $\partial_y f(1,1) \neq 0$ il existe une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ définie au voisinage de 1 tel que $f(x,\varphi(x)) = 1$.
2. On a
$$\varphi'(1) = -\frac{\partial_x f(1,1)}{\partial_y f(1,1)} = -\frac{5}{2}$$
donc l'équation de la droite tangente à φ en $x = 1$ est $y = -\frac{5}{2}(x-1) + 1 = -\frac{5}{2}x + \frac{7}{2}$.
3. On a
$$\varphi''(x) = -\frac{\partial_{xx} f(\partial_y f)^2 - 2\partial_x f \partial_y f \partial_{xy} f + (\partial_x f)^2 \partial_{yy} f}{(\partial_y f)^3}$$
et
$$\partial_{xx} f(x,y) = 4(3xy+1) \qquad \partial_{xx} f(1,1) = 16,$$
$$\partial_{xy} f(x,y) = 6x^2 \qquad \partial_{xy} f(1,1) = 6,$$
$$\partial_{yy} f(x,y) = 2, \qquad \partial_{yy} f(1,1) = 2,$$
donc $\varphi''(1) = -1$ d'où $\varphi(x) = \varphi(1) + \varphi'(1)(x-1) + \frac{\varphi''(1)}{2}(x-1)^2 = 1 - \frac{5}{2}(x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2$.

Exercice 3.33

On considère l'équation $xe^y + ye^x = 0$.

1. Vérifier qu'elle définie une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer le développement de Taylor de φ à l'ordre 2 centré en $x = 0$.

CORRECTION.



Soit $g(x,y) = xe^y + ye^x$; elle est clairement de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $g(0,0) = 0$ et $g_y(0,0) = 1$. Elle définie alors une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ dans un intervalle qui contient $x = 0$. De plus, on sait que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) = -1$ car
$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))} = -\frac{e^{\varphi(x)} + \varphi(x)e^x}{xe^{\varphi(x)} + e^x}.$$
Comme φ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors φ' est de classe $\mathscr{C}^1$ car composition de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$, il s'en suit que φ est de classe $\mathscr{C}^2$. Alors
$$\varphi(x) = \varphi(0) + \varphi'(0)x + \frac{\varphi''(0)}{2}x^2 + o(x^2).$$

Pour calculer φ'' on peut soit dériver l'expression de φ' soit dériver l'équation qui la défini implicitement : comme

$$g(x,\varphi(x)) = xe^{\varphi(x)} + \varphi(x)e^x$$

en dérivant cette expression on obtient

$$e^{\varphi(x)} + xe^{\varphi(x)}\varphi'(x) + \varphi'(x)e^x + \varphi(x)e^x = 0$$

et en la dérivant à nouveau (ce que l'on peut faire car φ est de classe $\mathscr{C}^2$) on obtient

$$e^{\varphi(x)}\varphi'(x) + \left(e^{\varphi(x)}\varphi'(x) + xe^{\varphi(x)}(\varphi'(x))^2 + xe^{\varphi(x)}\varphi''(x)\right) + \left(\varphi''(x)e^x + \varphi'(x)e^x\right) + \left(\varphi'(x)e^x + \varphi(x)e^x\right) = 0.$$

On obtient $\varphi''(0) = 4$ et le développement de Taylor s'écrit

$$\varphi(x) = -x + 2x^2 + o(x^2).$$

Exercice 3.34

Montrer que l'équation $xy^4 - x^3 + y = 0$ définit implicitement au voisinage de 0 une fonction réelle de la variable réelle $y = \varphi(x)$ et calculer la tangente au graphe de φ au point $(0,0)$.

Correction. Soit $g(x,y) = xy^4 - x^3 + y$; elle est clairement de classe $\mathscr{C}^1$. De plus, $g(0,0) = 0$ et $g_y(0,0) = 1$. Elle définie alors une et une seule fonction $y = \varphi(x)$ dans un intervalle qui contient $x = 0$. De plus, on sait que $\varphi(0) = 0$ et $\varphi'(0) =$ car

$$\varphi'(x) = -\frac{g_x(x,\varphi(x))}{g_y(x,\varphi(x))} = -\frac{y^4 - 3x^2}{4xy^3 + 1}.$$

La droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $(0,0)$ a équation $y = \varphi'(0)(x-0) + 0 = 0$.

Exercice 3.35

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y.$$

Soit l'équation $f(x,y) = 3$. Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de $(0,-3)$ une fonction $y = \varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

Correction. f est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f(0,-3) = 3$ et $\partial_y f(0,-3) = 5 \neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant $x = 0$ et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I telle que $\varphi(0) = -3$ et pour tout $x \in I$

$$f(x,\varphi(x)) = 3 \qquad \text{et} \qquad \varphi'(x) = -\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))} = -2x\frac{\varphi(x)+2}{x^2 + 2\varphi^2(x) - 8}.$$

L'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$ est $y = mx + q$ avec $m = \varphi'(0) = -2 \times 0 \frac{-3+2}{0^2 + 2\times(-3)^2 - 8} = 0$ et $q = y_0 - mx_0 = -3 - 0 = -3$.

Exercice 3.36

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} - x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y.$$

Soit l'équation $f(x,y) = -3$. Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de $(0,3)$ une fonction $y = \varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente à $y = \varphi(x)$ en $x = 0$.

CORRECTION. f est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f(0,3)=-3$ et $\partial_y f(0,3)=5\neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant $x=0$ et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I telle que $\varphi(0)=3$ et pour tout $x\in I$

$$f(x,\varphi(x))=-3 \qquad \text{et} \qquad \varphi'(x)=-\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}=-2x\frac{\varphi(x)-2}{x^2+2\varphi^2(x)-8}.$$

L'équation de la droite tangente à $y=\varphi(x)$ en $x=0$ est $y=mx+q$ avec $m=\varphi'(0)=-2\times 0\frac{3-2}{0^2+2\times 3^2-8}=0$ et $q=y_0-mx_0=3-0=3$.

Exercice 3.37

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{2}+\frac{x^3}{3}-4x+y^2.$$

Soit l'équation $f(x,y)=7$. Montrer qu'elle définit implicitement au voisinage de $(3,2)$ une fonction $y=\varphi(x)$ et calculer l'équation de la droite tangente à $y=\varphi(x)$ en $x=3$.

CORRECTION. f est une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$. Comme $f(3,2)=7$ et $\partial_y f(3,2)=5\neq 0$, alors il existe un intervalle ouvert I contenant $x=3$ et une fonction φ de I dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I telle que $\varphi(3)=2$ et pour tout $x\in I$

$$f(x,\varphi(x))=7 \qquad \text{et} \qquad \varphi'(x)=-\frac{\partial_x f(x,\varphi(x))}{\partial_y f(x,\varphi(x))}=-\frac{\varphi(x)^2+2x^2-8}{2(x+2)\varphi(x)}.$$

L'équation de la droite tangente à $y=\varphi(x)$ en $x=3$ est $y=mx+q$ avec $m=\varphi'(3)=-\frac{7}{10}$ et $q=y_0-mx_0=2+\frac{7}{10}3=\frac{41}{10}$.

Exercice 3.38

Montrez que l'équation

$$x^3+4xy+z^2-3yz^2-3=0$$

permet d'exprimer z en fonction de (x,y) au voisinage de $(1,1,1)$. Calculez alors $\partial_x z(1,1)$ et $\partial_y z(1,1)$.

CORRECTION. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x,y,z)=x^3+4xy+z^2-3yz^2-3$. f possède des dérivées partielles continues :

$$\partial_x f(x,y,z)=3x^2+4y, \qquad \partial_y f(x,y,z)=4x-3z^2, \qquad \partial_z f(x,y,z)=2z-6yz,$$

et au point $(1,1,1)$ on a

$$\partial_x f(1,1,1)=7, \qquad \partial_y f(1,1,1)=1, \qquad \partial_z f(1,1,1)=-4.$$

Puisque $f(1,1,1)=0$ et $\partial_z f(1,1,1)\neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous assure qu'on peut exprimer z en fonction de (x,y) dans un voisinage de $(1,1,1)$ et que

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1)=-\frac{\partial_x f(1,1,1)}{\partial_z f(1,1,1)}=\frac{7}{4}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}(1,1)=-\frac{\partial_y f(1,1,1)}{\partial_z f(1,1,1)}=\frac{1}{4}.$$

4 Optimisation libre et lié de fonctions de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Parmi toutes les sujets abordées dans ce cours, l'optimisation de fonctions, généralement de plusieurs variables, est sans conteste celle qui apparaît le plus fréquemment dans la modélisation physique ou économique (maximiser le bénéfice, la satisfaction des clients, la productivité ou minimiser les coûts, le risque, etc.).

La détermination des extrema dans le cas d'une seule variable a été détaillée lors du module M11. Logiquement, le présent chapitre en est un prolongement qui fait intervenir les diverses notions spécifiques aux fonctions de plusieurs variables. Néanmoins, le thème de l'optimisation à plusieurs variables exige un saut conceptuel important. En effet, plusieurs notions relatives aux fonctions d'une variable sont loin de se généraliser de façon évidente. Par exemple, les fonctions d'une variable (suffisamment régulières) admettent une seule dérivée première, une seule dérivée seconde, etc., tandis que, pour les fonctions de n variables, le nombre de dérivées possibles croît avec l'ordre de dérivation : n dérivées partielles premières, n^2 dérivées partielles secondes, etc. Une conséquence directe de cet accroissement apparaîtra sous la forme de conditions nécessaires et suffisantes plus lourdes à formuler. Par ailleurs, la prise en compte pratique des contraintes imposées aux variables doit être fondamentalement revue.

Prenons le cas de la maximisation de la fonction $f(x)$ dont l'unique variable est soumise à une contrainte de non-négativité ($x \geq 0$), qui traduit par exemple le fait que x est une quantité, une densité, un prix ou toute autre grandeur dépourvue de sens pour une valeur négative. L'optimisation s'effectue alors à l'aide de la procédure usuelle, la contrainte ayant pour effet de restreindre le domaine d'étude à $\mathbb{R}^+$ et d'exiger un examen particulier pour le seul point qui en constitue le «bord» ($x = 0$). Plongeons le même problème dans un cadre bivarié : maximiser $f(x, y)$ sous la double contrainte $x \geq 0$ et $y \geq 0$. À présent, le domaine admissible est donné par $(\mathbb{R}_+)^2$ dont le «bord», $\{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}_+\} \cup \left\{(0, y) \,\middle|\, y \in \mathbb{R}_+\right\}$, comporte évidemment une infinité de points. Une étude individuelle des points de cet ensemble devient techniquement difficile, de sorte qu'il apparaît indispensable de disposer de méthodes d'optimisation qui intègrent d'emblée la présence de contraintes qui font apparaître des «bords». Cette approche (recherche d'extrema liés), spécifique aux fonctions de plusieurs variables, sera abordée dans ce chapitre après l'exposé des principes de l'optimisation dite libre, qui vise la détermination des extrema dans un domaine ouvert, donc «sans bords».

Exemple

Vous vous promenez sur un chemin de montagne.

- ▷ Vous êtes très sportif et vous désirez aller le plus haut possible dans la région dont vous avez la carte.
- ▷ Vous êtes un peu moins sportif, vous vous contentez de suivre le chemin indiqué. À la fin de la journée, vous désirez savoir quel est le point le plus haut ou le plus bas où vous êtes passé.

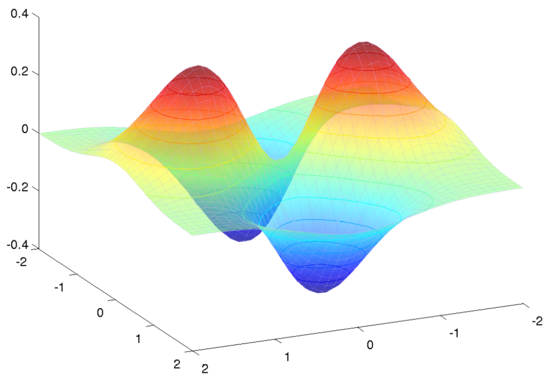
L'altitude est une fonction h de deux variables, la position (x, y) sur la carte.

- ▷ Dans le premier cas, vous cherchez à trouver le maximum de la fonction h.
- ▷ Dans le deuxième cas, le chemin est représenté par une contrainte entre x et y donnée par une équation $g(x, y) = 0$. La question est donc de trouver les points (x_0, y_0) vérifiant $g(x_0, y_0)$ tels que h soit extrémale en (x_0, y_0) parmi les points vérifiant $g(x, y) = 0$.

Définition

Soit f une fonction de $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. On dit que

- ▷ f est bornée dans $\mathscr{D}$ s'il existe un nombre réel $M \geq 0$ tel que
$$\text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathscr{D},\ |f(\mathbf{x})| \leq M;$$
- ▷ f admet un maximum (resp. minimum) *global* (ou absolu) en $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{D}$ si
$$\text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathscr{D},\ f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)\text{)};$$
- ▷ f admet un maximum (resp. minimum) *local* (ou relatif) en $\mathbf{x}_0 \in \mathscr{D}$ s'il existe une boule de rayon non nul $\mathscr{B}(\mathbf{x}_0, r)$ telle que
$$\text{pour tout } \mathbf{x} \in \mathscr{D} \cap \mathscr{B}(\mathbf{x}_0, r),\ f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \text{ (resp. } f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}$$



Théorème *de Weierstrass*

Si $\mathscr{D}$ est fermé [a] et borné (on dit alors que $\mathscr{D}$ est compact) et si f est continue, alors f admet un maximum et un minimum globaux atteints au moins une fois, autrement dit il existe $\mathbf{x}_m \in \mathscr{D}$ et $\mathbf{x}_M \in \mathscr{D}$ tels que

$$f(\mathbf{x}_m) \le f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_M), \qquad \forall (\mathbf{x}) \in \mathscr{D}.$$

Remarquons que les extrema peuvent appartenir soit à l'ouvert $\mathring{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \setminus \partial\mathscr{D}$ soit à la frontière $\partial\mathscr{D}$.

a. c'est-à-dire qu'il contient sa frontière

Ce résultat donne une condition suffisante d'existence d'un minimum et d'un maximum globaux. Cependant, la restriction relative au domaine compact est malheureusement trop forte pour la résolution de nombreux problèmes, en particulier, ceux pour lesquels les variables ne sont pas bornées. Beaucoup plus épineuse à n variables qu'à une seule variable, la question du traitement des éventuels «bords» du domaine motive la scission entre extrema libres et liés. En effet, les restrictions du domaine qui s'expriment sous la forme d'une égalité ($g(\mathbf{x}) = 0$) ou d'une inégalité non stricte ($g(\mathbf{x}) \le 0$) créent généralement une infinité de points de bords, dont l'étude au cas par cas devient impraticable. Les conditions de LAGRANGE et de KUHN et TUCKER visent à combler cette lacune.

Avant d'aborder ces nouveaux résultats, la section suivante présente la détermination des extrema dans un domaine ouvert. La terminologie d'extrema «libres» résulte de l'absence de conditions introduisant des «bords» dans le domaine, que l'on appelle aussi des «contraintes».

4.1 Extrema libres

Théorème *de FERMAT : condition nécessaire d'extrémum local*

Si f présente un extrémum local en $\mathbf{x}_0$ et est de classe $\mathscr{C}^1$ en ce point, alors

$$\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}.$$

Un point vérifiant cette condition est appelé *point stationnaire*, ou *point critique*, de f.

Exemple

On veut optimiser la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$ dans le disque ouvert centré en $(0,0)$ de rayon 1, représenté par $\mathscr{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 < 1 \right\}$. Le seul candidat est l'unique point critique $(0,0)$ qu'on trouve en résolvant $\partial_x f(x, y) = 0$ et $\partial_y f(x, y) = 0$. La définition implique de façon immédiate que f admet un minimum global en $(0,0)$. En effet

$$f(x, y) = x^2 + y^2 \ge 0 = f(0,0) \qquad \forall (x, y) \in \mathscr{D}.$$

En revanche, la fonction n'admet aucun maximum.

«Recette» pour le calcul des extrema d'une fonction f continue dans un ensemble $\mathscr{D}$ compact

Si $\mathbf{x}_0$ est un extrémum local pour f et si $\mathbf{x}_0 \in \mathring{\mathscr{D}}$ avec f dérivable en $\mathbf{x}_0$, alors il est un point critique. Cependant, si $\mathbf{x}_0 \in \partial\mathscr{D}$ ou si f n'est pas dérivable en $\mathbf{x}_0$, alors ce théorème ne s'applique pas et il faut raisonner différemment.

▷ On calcul la valeur de f en les points stationnaires de f dans l'ouvert $\mathring{\mathscr{D}} = \mathscr{D} \setminus \partial\mathscr{D}$;
▷ on calcul la valeur de f en les points stationnaires de f sur le bord $\partial\mathscr{D}$;
▷ on calcul la valeur de f en les points de non dérivabilité (s'il en existe).

La plus grande valeur indique le maximum global, la plus petite le minimum global.

Exemple

On veut trouver le extrema globaux de la fonction f définie par $f(x, y) = (x - y)^2$ sur le carré fermé $\mathscr{D} = [0;1]^2$.

▷ On calcule la valeur de f en les points stationnaires de f dans l'ouvert $\mathring{\mathscr{D}} =]0;1[^2$:

$$f(x, y) = (x - y)^2, \qquad \partial_x f(x, y) = 2(x - y), \qquad \partial_y f(x, y) = -2(x - y),$$

et $\nabla f = (0,0)$ si et seulement si $y = x$ et l'on a $f(x, x) = 0$.

▷ On calcule la valeur de f en les points stationnaires de f sur le bord $\partial\mathscr{D}$:
  ▷ Arrête d'équation $y = 0$: soit $g :]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que $g(x) \equiv f(x, 0) = x^2$ alors $g'(x) \ne 0$ pour tout $x \in]0,1[$

- ▷ Arrête d'équation $y=1$: soit $g:]0,1[\to\mathbb{R}$ telle que $g(x)\equiv f(x,1)=(x-1)^2$ alors $g'(x)\neq 0$ pour tout $x\in]0,1[$
- ▷ Arrête d'équation $x=0$: soit $g:]0,1[\to\mathbb{R}$ telle que $g(y)\equiv f(0,y)=(-y)^2$ alors $g'(y)\neq 0$ pour tout $y\in]0,1[$
- ▷ Arrête d'équation $x=1$: soit $g:]0,1[\to\mathbb{R}$ telle que $g(y)\equiv f(1,y)=(1-y)^2$ alors $g'(y)\neq 0$ pour tout $y\in]0,1[$

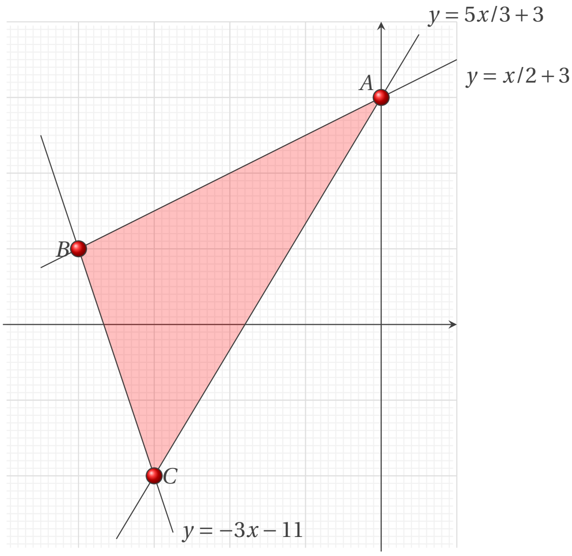
donc il n'existe pas de points stationnaires sur les arrêtes du carré.

▷ On calcule la valeur de f en les points de non dérivabilité :
- ▷ $f(0,0)=0$
- ▷ $f(1,0)=1$
- ▷ $f(0,1)=1$
- ▷ $f(1,1)=0$

En résumé, les candidats extrema globaux sont les points $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ et (k,k) avec $k\in]0;1[$. On conclut que
- ▷ le minimum global est atteint aux points (k,k) avec $k\in[0;1]$ et valent 0,
- ▷ le maximum global est atteint au point $(1,0)$ et $(0,1)$ et vaut 1.

Exemple

On veut trouver le extrema globaux de la fonction f définie par $f(x,y)=-6y^2-4xy-4y+x^2+6x-6$ sur la région triangulaire compacte $\mathscr{D}$ de sommets $A=(0,3)$, $B=(-4,1)$ et $C=(-3,-2)$.



▷ On calcule la valeur de f en les points stationnaires de f dans l'ouvert $\mathring{\mathscr{D}}=\mathscr{D}\setminus\partial\mathscr{D}$:

$$f(x,y)=-6y^2-4xy-4y+x^2+6x-6,\qquad \partial_x f(x,y)=-4y+2x+6\qquad \partial_y f(x,y)=-12y-4x-4$$

et $\nabla f=(0,0)$ si et seulement si $(x,y)=(-11/5,2/5)$ et l'on a $f(-11/5,2/5)=-67/5$.

▷ On calcule la valeur de f en les points stationnaires de f sur le bord $\partial\mathscr{D}$:
- ▷ Arrête AB : $y=mx+q$ avec $m=(y_A-y_B)/(x_A-x_B)=1/2$ et $q=y_A-mx_A=3$
- ▷ Arrête AC : $y=mx+q$ avec $m=(y_A-y_C)/(x_A-x_C)=5/3$ et $q=y_A-mx_A=3$
- ▷ Arrête BC : $y=mx+q$ avec $m=(y_B-y_C)/(x_B-x_C)=-3$ et $q=y_B-mx_B=-11$

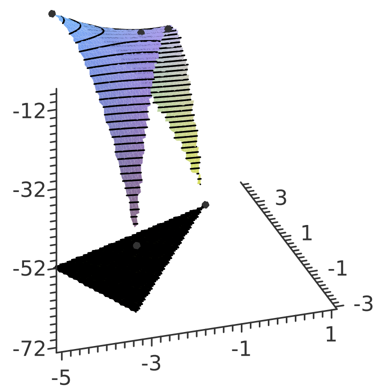
donc

$$\begin{aligned}
&g_{AB}(x)\equiv f\left(x,y=\frac{1}{2}x+3\right)=-\frac{5}{2}x^2-26x-72, && x\in[-4;0] && g'_{AB}(x)=-5x-26<0;\\
&g_{AC}(x)\equiv f\left(x,y=\frac{5x}{3}+3\right)=-\frac{67}{3}x^2-\frac{218}{3}x-72, && x\in[-3;0] && g'_{AC}(x)=-\frac{134}{3}x-\frac{218}{3}\iff x=-\frac{109}{67}\text{ et } g_{AC}(-\frac{109}{67})=-\frac{2591}{201};\\
&g_{BC}(x)\equiv f(x,y=-3x-11)=-41x^2-334x-688, && x\in[-4;-3] && g'_{BC}(x)=-82x-334<0.
\end{aligned}$$

En résumé, les candidats extrema globaux sont les points

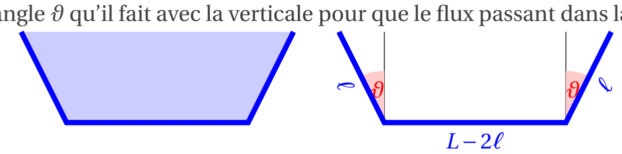
x	y	$f(x,y)$	
$-11/5$	$2/5$	$-67/5$	$\in\mathring{\mathscr{D}}$
0	3	-72	$\in\partial\mathscr{D}$
-4	1	-8	$\in\partial\mathscr{D}$
-3	-2	-55	$\in\partial\mathscr{D}$
$-109/67$	$58/201$	$-2591/201$	$\in\partial\mathscr{D}$

On conclut que
- ▷ le minimum global est atteint au point $(-11/5,2/5)\in\mathring{\mathscr{D}}$ et vaut $-67/5$,
- ▷ le maximum global est atteint au point $(-26/5,4/5)\in\partial\mathscr{D}$ et vaut $-22/5$.



Exemple

On construit une canalisation de forme trapézoïdale avec une plaque de largeur $L = 1{,}36$. Quelles sont les valeurs optimales de la longueur ℓ du côté incliné et de l'angle ϑ qu'il fait avec la verticale pour que le flux passant dans la gouttière soit maximal ?



La surface à maximiser est décrite par la fonction

$$f(\ell,\vartheta) = \ell\cos(\vartheta)\big(\ell\sin(\vartheta) + L - 2\ell\big),$$

avec $\mathscr{D} = \left\{ (\ell,\vartheta) \,\middle|\, 0 \le \ell \le \frac{L}{2}, 0 \le \vartheta \le \frac{\pi}{2} \right\}$.

▷ On cherche tout d'abord les points critiques de f qui se trouvent à l'intérieur du domaine $\mathring{\mathscr{D}}$ et on calcul la valeur de f en ces points :

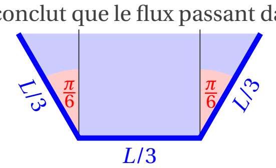
$$\begin{aligned} f(\ell,\vartheta) &= \ell\cos(\vartheta)\big(\ell\sin(\vartheta) + L - 2\ell\big), \\ f_\ell(\ell,\vartheta) &= \cos(\vartheta)\big(2\ell\sin(\vartheta) + L - 2\ell\big), \\ f_\vartheta(\ell,\vartheta) &= \ell\big(2\ell\cos^2(\vartheta) + 2\ell\sin(\vartheta) - L\sin(\vartheta) - \ell\big), \end{aligned}$$

et $\nabla f(\ell,\vartheta) = (0,0)$ dans $\mathring{\mathscr{D}}$ si et seulement si $(\ell,\vartheta) = (L/3, \pi/6)$ et l'on a $f(L/3,\pi/6) \approx 0.2669667645$.

▷ On cherche le maximum de f sur le bord $\partial\mathscr{D}$ de $\mathscr{D}$:

$$\begin{aligned} g_1(\ell) &\equiv f(\ell,0) = \ell\big(L-2\ell\big), & g_1'(\ell) &= L - 4\ell = 0 \iff \ell = \tfrac{L}{4} \text{ et } f(\tfrac{L}{4},0) = \tfrac{L^2}{8} < 0.26; \\ g_2(\ell) &\equiv f(\ell,\pi/2) = 0; \\ g_3(\vartheta) &\equiv f(0,\vartheta) = 0; \\ g_4(\vartheta) &\equiv f(L,\vartheta) = (L)^2\cos(\vartheta)\big(\sin(\vartheta)-1\big), & g_4'(\vartheta) &= (L)^2\Big(\cos^2(\vartheta) - \sin^2(\vartheta) + \sin(\vartheta)\Big) = 0 \iff \vartheta = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Comme $f(\ell,\vartheta) \le f(L/3,\pi/6)$ pour tout $(\ell,\vartheta) \in \mathscr{D}$ on conclut que le flux passant dans la gouttière sera maximal pour $\ell = L/3$ et $\vartheta = \pi/6$.



Théorème *Condition suffisante d'extrémum local dans un ouvert (cas de 2 variables)*

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert $\mathscr{D} \subset \mathbb{R}^2$ et (x_0, y_0) un point stationnaire ; posons

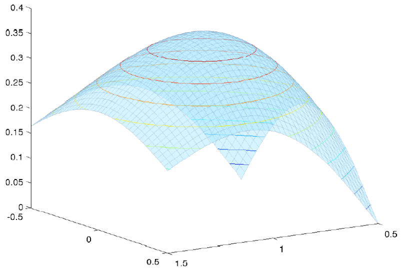
$$\Delta(x_0,y_0) \equiv \partial_{xx}f(x_0,y_0) \cdot \partial_{yy}f(x_0,y_0) - \partial_{xy}f^2(x_0,y_0).$$

▷ Si $\Delta(x_0,y_0) > 0$, alors f présente un extrémum relatif en (x_0,y_0) ; il s'agit d'un maximum si $\partial_{xx}f(x_0,y_0) < 0$ et d'un minimum si $\partial_{xx}f(x_0,y_0) > 0$;

▷ si $\Delta(x_0,y_0) < 0$, alors f présente un point-selle (ou point-col) [a] en (x_0,y_0) ; ce n'est pas un extrémum ;

▷ si $\Delta(x_0,y_0) = 0$, on ne peut pas conclure à partir des dérivées secondes.

En résumé, si $\partial_x f(x_0,y_0) = 0$ et $\partial_y f(x_0,y_0) = 0$, la nature du point critique (x_0,y_0) est déterminée par le tableaux suivant :



(a) Point de maximum


(b) Point de selle

$\Delta(x_0,y_0)$	$\partial_{xx}f(x_0,y_0)$	Nature de (x_0,y_0)
$+$	$+$	minimum local
$+$	$-$	maximum local
$-$		point-selle
0		on ne peut pas conclure

a. Le mot col vient de l'exemple de la fonction altitude et de la configuration (idéalisée) d'un col de montagne : minimum de la ligne de crête, maximum de la route, sans être un extremum du paysage. Le mot selle vient de l'exemple d'une selle de cheval.

Étude directe

Après avoir déterminé un point stationnaire $\mathbf{x}_0$, on peut aussi étudier directement le signe de la différence

$$d(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0).$$

Si cette différence est de signe constant pour $\mathbf{h}$ voisin de $\mathbf{0}$, il s'agit d'un extrémum local (un maximum si $d < 0$, un minimum si $d > 0$). Sinon, il s'agit d'un point-col (ou point-selle). Mieux, si le signe est constant pour $\mathbf{h}$ quelconque, alors l'extrémum est global.

Exemple

On veut étudier la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x - 4y$ sur $\mathbb{R}^2$. Elle a pour dérivées partielles $\partial_x f(x,y) = 2x-2$ et $\partial_y f(x,y) = 2y-4$ qui ne s'annulent qu'en $(1,2)$, seul point où il peut donc y avoir un extremum local. On étudie directement le signe de la différence

$$d(h,k) = f(1+h, 2+k) - f(1,2) = h^2 + k^2 > 0.$$

Comme cette différence est positive pour h et k voisins de 0 il s'agit d'un minimum. En effet, $\partial_{xx}f(1,2) = 2 > 0$, $\partial_{yy}f(1,2) = 2$, $\partial_{xy}f(1,2) = 0$ donc $\Delta(1,2) = 4 > 0$ et il s'agit bien d'un minimum.

Exemple

Pour déterminer les extrema libres de la fonction $f(x,y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$ dans $\mathbb{R}^2$, on constate d'abord que f est un polynôme, donc différentiable dans l'ouvert $\mathbb{R}^2$. Les seuls candidats extrema locaux sont les points critiques. Toutefois, nous ne disposons d'aucune garantie à priori sur le fait que les éventuels extrema locaux soient globaux.

Recherche des points critiques On a

$$\nabla f = \mathbf{0} \quad\iff\quad \begin{pmatrix} 2x-2y \\ 3y^2-2x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\iff\quad (x,y) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) \text{ ou } (x,y) = (1,1).$$

Les deux candidats sont donc $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ et $(1,1)$.

Classification La matrice hessienne de f en un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f(x,y) & \partial_{xy}f(x,y) \\ \partial_{yx}f(x,y) & \partial_{yy}f(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 6y \end{pmatrix}.$$

Comme $\Delta\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) < 0$ et $D(1,1) > 0$, alors $(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$ est un point-selle et f admet en $(1,1)$ un minimum local de valeur $f(1,1) = -1$. Ce minimum n'est cependant pas global puisque, par exemple, $f(0,-2) = -6 < f(1,1) = -1$.

Exemple *Lois de* SNELL-DESCARTES

Un rayon lumineux se propage à la vitesse v_1 dans le milieu M_1 et à la vitesse v_2 dans le milieu M_2. Le principe de Fermat précise que la lumière suit le trajet le plus économique en temps.

En dimension 2. En notant x l'abscisse du point où la trajectoire coupe l'interface, le temps nécessaire pour aller de (x_1, z_1) à (x_2, z_2) en passant par le point d'abscisse x vaut

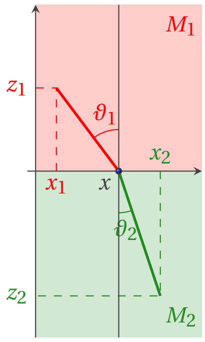
$$t(x) = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+z_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2+z_2^2}}{v_2}.$$

Cette quantité est (localement) optimale quand sa dérivée par rapport à x s'annule, c'est à dire lorsque

$$\frac{x-x_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2+z_1^2}} - \frac{x_2-x}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2+z_2^2}} = 0,$$

ce qui conduit à la loi de SNELL-DESCARTES

$$\frac{\sin(\vartheta_1)}{v_1} = \frac{\sin(\vartheta_2)}{v_2}.$$



En dimension 3. Dans le cas tridimensionnel, la situation est similaire. Il s'agit cette fois de déterminer les coordonnées (x, y) dans le plan de l'interface où le rayon coupera celui-ci. Le temps de trajet vaut cette fois

$$t(x,y) = \frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+z_2^2}}{v_2}.$$

Il s'agit cette fois d'optimiser par rapport à x et y simultanément, ce qui revient à annuler simultanément les dérivées de t par rapport à x et y, c'est à dire son gradient. Ceci conduit aux équations

$$\nabla t = \mathbf{0} \quad\iff\quad \begin{pmatrix} \frac{x-x_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z_1^2}} - \frac{x_2-x}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+z_2^2}} \\ \frac{y-y_1}{v_1\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2+z_1^2}} - \frac{y_2-y}{v_2\sqrt{(x_2-x)^2+(y_2-y)^2+z_2^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad\iff\quad \begin{pmatrix} x_2-x \\ y_2-y \end{pmatrix} = \frac{v_2 d_2}{v_1 d_1}\begin{pmatrix} x-x_1 \\ y-y_1 \end{pmatrix}$$

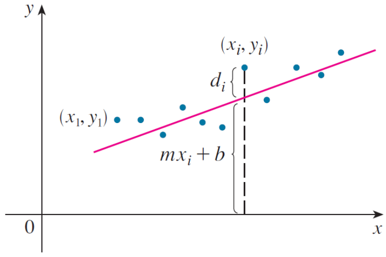
autrement dit, le point du plan de coordonnées (x, y) se trouve dans le segment compris entre (x_1, y_1) et (x_2, y_2). On se ramène donc à un problème bidimensionnel et le raisonnement ci-dessus s'applique directement.

On obtient de la même façon la loi de SNELL-DESCARTES à la réflexion.

Méthode des moindres carrés : fitting par une relation affine

Lorsqu'un chercheur met au point une expérience (parce qu'il a quelques raisons de croire que les deux grandeurs x et y sont liées par une fonction f), il récolte des données sous la forme de points $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ mais en générale ces données sont affectées par des erreurs de mesure. Lorsqu'on en fait une représentation graphique il cherche f pour qu'elle s'ajuste le mieux possible aux points observés. Soit $d_i = y_i - f(x_i)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la fonction f. La méthode des moindres carrés est celle qui choisit f de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale.

On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i, y_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées par une relation affine, c'est-à-dire de la forme $y = mx + q$ pour certaines valeurs de m et q, au moins approximativement (autrement dit, lorsqu'on affiche ces points dans un plan cartésien, les points ne sont pas exactement alignés mais cela semble être dû à des erreurs de mesure). On souhaite alors trouver les constantes m et q pour que la droite d'équation $y = mx + q$ s'ajuste le mieux possible aux points observés. Soit $d_i = y_i - (mx_i + q)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i) par rapport à la droite. La méthode des moindres carrés est celle qui choisit m et q de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale.



Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(m,q) = \sum_{i=1}^{n} d_i^2 = \sum_{i=0}^{n} (y_i - mx_i - q)^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord ses points stationnaires, *i.e.* les points qui vérifient $\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial m} = \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q} = 0$. Puisque

$$\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial m}(m,q) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - (mx_i + q))x_i\right), \qquad \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q}(m,q) = -2\left(\sum_{i=0}^{n} (y_i - (mx_i + q))\right),$$

alors

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial m}(m,q) = 0 \\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial q}(m,q) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} (y_i - mx_i - q)x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} (y_i - mx_i - q) = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sum_{i=0}^{n} y_i x_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + q\sum_{i=0}^{n} x_i = 0 \\ \sum_{i=0}^{n} y_i - m\sum_{i=1}^{n} x_i + (n+1)q = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} m = \dfrac{\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right) - (n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} (x_i y_i)\right)}{\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 - (n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)} \\ q = \dfrac{\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i y_i\right) - \left(\sum_{i=0}^{n} y_i\right)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)}{\left(\sum_{i=0}^{n} x_i\right)^2 - (n+1)\left(\sum_{i=0}^{n} x_i^2\right)} \end{cases}$$

Si on note

$$\overline{x} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i, \qquad \overline{x^2} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i^2, \qquad \overline{xy} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} x_i y_i, \qquad \overline{y} = \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} y_i.$$

alors

$$m = \frac{\overline{x}\,\overline{y} - \overline{xy}}{(\overline{x})^2 - \overline{x^2}}, \qquad q = \frac{\overline{y}\,\overline{x^2} - \overline{x}\,\overline{xy}}{\overline{x^2} - (\overline{x})^2}.$$

La droite d'équation

$$y = mx + q$$

s'appelle droite de régression de y par rapport à x et passe par le point moyen $(\overline{x}, \overline{y})$.
Cette écriture est susceptible de générer des erreurs de *roundoff* (les deux termes dans chaque numérateur ainsi qu'au dénominateur sont presque égaux). Il est alors mieux calculer m et q comme suit (ce qui est équivalent) :

$$m = \frac{\sum_{i=0}^{n} y_i (x_i - \overline{x})}{\sum_{i=0}^{n} x_i (x_i - \overline{x})} \qquad q = \overline{y} - m\overline{x}.$$

Notons $\sigma_x^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2$ la variance des abscisseset $c = \overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}$ le coefficient de corrélation. La droite de régression de y par rapport à x a alors équation

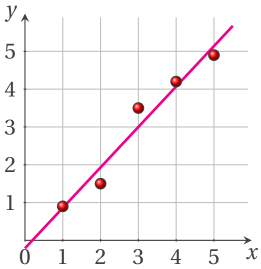
$$y = \frac{c}{\sigma_x}(x - \overline{x}) - \overline{y}.$$

Exemple

Si on a le points suivantes

x	1	2	3	4	5
y	0.9	1.5	3.5	4.2	4.9

on trouve $m = 1.07$ et $q = -0.21$:



Fitting par un exponentiel

Soit $a>0$ et considérons la fonction $f(x)=ae^{kx}$: elle est non-linéaire mais si on prend son logarithme on obtient $\ln(f(x))=kx+\ln(a)$ qui est linéaire en k et a la forme $mx+q$ avec $m=k$ et $q=\ln(a)$. On peut alors faire une régression linéaire sur l'ensemble $\{(x_i,\ln(y_i))\}_{i=0}^n$ et obtenir ainsi k et $\ln(a)$. Cependant ceci n'est pas équivalent à faire un fitting sur l'ensemble initial $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$. En effet, si on note $d_i=y_i-ae^{kx_i}$ et $D_i=\ln(y_i)-(kx_i+\ln(a))$, lorsqu'on fait une régression linéaire sur l'ensemble $\{(x_i,\ln(y_i))\}_{i=0}^n$ on minimise D_i et non d_i.

Méthode des moindres carrés : fitting par un polynôme

On considère un ensemble de points expérimentaux $\{(x_i,y_i)\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation polynomiale, c'est-à-dire de la forme $y=\sum_{j=0}^m a_j x^j$ pour certaines valeurs de a_j. On souhaite alors trouver les $m+1$ constantes a_j pour que le polynôme d'équation $y=\sum_{j=0}^m a_j x^j$ s'ajuste le mieux possible aux points observés. Soit $d_i=y_i-\left(\sum_{j=0}^m a_j x_i^j\right)$ l'écart vertical du point (x_i,y_i) par rapport au polynôme. La méthode des moindres carrés est celle qui choisit les a_j de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E}\colon\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}_+$ définie par

$$\mathscr{E}(a_0,a_1,\dots,a_m)=\sum_{i=1}^n d_i^2=\sum_{i=0}^n\left(y_i-\sum_{j=0}^m a_j x_i^j\right)^2.$$

Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche d'abord ses points stationnaires, *i.e.* les points qui vérifient $\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_j}=0$ pour $j=0,\dots,m$. Puisque

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_0}(a_0,a_1,\dots,a_m)&=-2\sum_{i=0}^n\left(x_i^0\left(y_i-\sum_{j=0}^m a_j x_i^j\right)\right),\\
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_1}(a_0,a_1,\dots,a_m)&=-2\sum_{i=0}^n\left(x_i^1\left(y_i-\sum_{j=0}^m a_j x_i^j\right)\right),\\
&\vdots\\
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_m}(a_0,a_1,\dots,a_m)&=-2\sum_{i=0}^n\left(x_i^m\left(y_i-\sum_{j=0}^m a_j x_i^j\right)\right),
\end{aligned}$$

on obtient alors le système linéaire de $(m+1)$ équations en les $(m+1)$ inconnues $a_0,a_1,\dots,a_m$ suivant

$$\begin{cases}
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_0}(a_0,a_1,\dots,a_m)=0\\
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_1}(a_0,a_1,\dots,a_m)=0\\
\vdots\\
\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a_m}(a_0,a_1,\dots,a_m)=0
\end{cases}
\iff
\begin{cases}
a_0(n+1)+a_1\sum_{i=0}^n x_i+\dots+a_m\sum_{i=0}^n x_i^m=\sum_{i=0}^n y_i\\
a_0\sum_{i=0}^n x_i+a_1\sum_{i=0}^n x_i^2+\dots+a_m\sum_{i=0}^n x_i^{m+1}=\sum_{i=0}^n y_i x_i\\
\vdots\\
a_0\sum_{i=0}^n x_i^m+a_1\sum_{i=0}^n x_i^{m+1}+\dots+a_m\sum_{i=0}^n x_i^{2m}=\sum_{i=0}^n y_i x_i^m
\end{cases}$$

$$\iff
\begin{pmatrix}
(n+1) & \sum_{i=0}^n x_i & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^m\\
\sum_{i=0}^n x_i & \sum_{i=0}^n x_i^2 & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1}\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
\sum_{i=0}^n x_i^m & \sum_{i=0}^n x_i^{m+1} & \dots & \sum_{i=0}^n x_i^{2m}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_m\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^n y_i\\\sum_{i=0}^n y_i x_i\\\vdots\\\sum_{i=0}^n y_i x_i^m\end{pmatrix}$$

Quand $m=n$, le polynôme des moindres carrés coïncide avec le polynôme d'interpolation de Lagrange, *i.e.* l'unique polynôme L tel que $L(x_i)=y_i$ pour tout $i=0,\dots,n$.

Exemple

À partir des données

x	1.0	2.5	3.5	4.0	1.1	1.8	2.2	3.7
y	6.008	15.722	27.130	33.772	5.257	9.549	11.098	28.828

on veut calculer la droite et la parabole de régression et comparer les erreurs des chaque régression.

1. La droite de régression a équation $y = mx + q$ avec

$$m = \frac{\sum_{i=0}^{6} y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=0}^{7} x_i (x_i - \bar{x})} \approx 8.420042377, \qquad q = \bar{y} - m\bar{x} \approx -3.37833528,$$

où $\bar{x} = \frac{1}{7}\sum_{i=0}^{6} x_i = 2.0125$ et $\bar{y} = \frac{1}{7}\sum_{i=0}^{6} y_i = 13.567$. L'erreur est

$$\sum_{i=0}^{6} (y_i - (mx_i + q))^2 = 39.59960820.$$

2. La parabole de régression a équation $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ avec a_0, a_1, a_2 solution du système linéaire

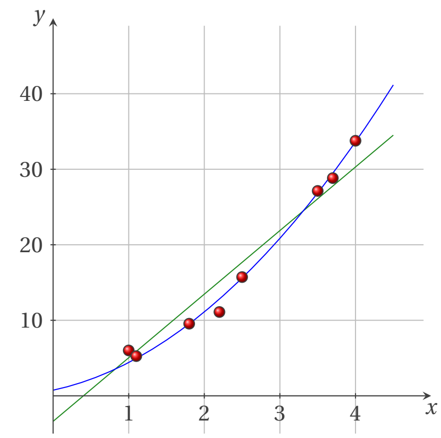
$$\begin{pmatrix} 8 & \sum_{i=0}^{6} x_i & \sum_{i=0}^{6} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{6} x_i & \sum_{i=0}^{6} x_i^2 & \sum_{i=0}^{6} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{6} x_i^2 & \sum_{i=0}^{6} x_i^3 & \sum_{i=0}^{6} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{6} y_i \\ \sum_{i=0}^{6} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{6} y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 8 & 16.1 & 44.79 \\ 16.1 & 44.79 & 141.311 \\ 44.79 & 141.311 & 481.5123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108.536 \\ 322.7425 \\ 1067.97905 \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 0.744611871628180655, \\ a_1 = 2.14480468957977077, \\ a_2 = 1.51926210146774388. \end{cases}$$

L'erreur est

$$\sum_{i=0}^{6} (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2))^2 = 5.715921703.$$



Exemple

Le tableau ci-dessous donne la conductivité thermique k du sodium pour différentes valeurs de la température. On veut calculer la parabole de meilleur approximation.

T (°C)	79	190	357	524	690
k	1.00	0.932	0.839	0.759	0.693

La parabole de régression a équation $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ avec a_0, a_1, a_2 solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=0}^{4} x_i & \sum_{i=0}^{4} x_i^2 \\ \sum_{i=0}^{4} x_i & \sum_{i=0}^{4} x_i^2 & \sum_{i=0}^{4} x_i^3 \\ \sum_{i=0}^{4} x_i^2 & \sum_{i=0}^{4} x_i^3 & \sum_{i=0}^{4} x_i^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=0}^{4} y_i \\ \sum_{i=0}^{4} y_i x_i \\ \sum_{i=0}^{4} y_i x_i^2 \end{pmatrix} \quad \textit{i.e.} \quad \begin{pmatrix} 8 & 16.1 & 44.79 \\ 16.1 & 44.79 & 141.311 \\ 44.79 & 141.311 & 481.5123 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 108.536 \\ 322.7425 \\ 1067.97905 \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0 = 0.744611871628180655, \\ a_1 = 2.14480468957977077, \\ a_2 = 1.51926210146774388. \end{cases}$$

L'erreur est

$$\sum_{i=0}^{6}(y_i-(a_0+a_1x_i+a_2x_i^2))^2=5.715921703.$$

Exemple

La viscosité cinématique μ de l'eau varie en fonction de la température comme dans le tableau suivant :

T (°C)	0	21.1	37.8	54.4	71.1	87.8	100
μ ($10^{-3}\,\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}^{-1}$)	1.79	1.13	0.696	0.519	0.338	0.321	0.296

On veut évaluer les valeurs $\mu(10°)$, $\mu(30°)$, $\mu(60°)$, $\mu(90°)$ par le polynôme de meilleur approximation de degré 3.
On a la famille de points $\{(T_i,\mu_i)\}_{i=0}^{6}$. Le polynôme de meilleur approximation de degré 3 s'écrit

$$r(T)=a_0+a_1T+a_2T^2+a_3T^3$$

où a_0,a_1,a_2,a_3 sont solution du système linéaire

$$\begin{pmatrix} 6 & \sum_{i=0}^6 T_i & \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3\\ \sum_{i=0}^6 T_i & \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4\\ \sum_{i=0}^6 T_i^2 & \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 & \sum_{i=0}^6 T_i^5\\ \sum_{i=0}^6 T_i^3 & \sum_{i=0}^6 T_i^4 & \sum_{i=0}^6 T_i^5 & \sum_{i=0}^6 T_i^6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_0\\a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^6 \mu_i\\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i\\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i^2\\ \sum_{i=0}^6 \mu_i T_i^3\end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{cases} a_0=0.914534618675843625,\\ a_1=0.914534618675843625,\\ a_2=-0.000620138768106035594,\\ a_3=-0.000620138768106035594.\end{cases}$$

On a alors

$$r(10°)=1.004300740\qquad r(30°)=0.9114735501\qquad r(60°)=0.9114735501\qquad r(90°)=0.249145396$$

4.2 Extrema liés

La scission entre extrema libres et liés (ou «sous contraintes») est née de l'impossibilité de traiter l'optimisation dans les domaines non ouverts selon la procédure exposée dans la section précédente. En effet, la condition nécessaire ne s'applique pas aux bords du domaine. Or, si de tels points existent, leur étude au cas par cas est généralement peu aisée. Dès lors, la théorie mathématique propose des méthodes d'optimisation liée. Celles-ci incorporent directement dans la résolution les contraintes qui définissent des domaines non ouverts. La nomenclature peut s'avérer trompeuse. En effet, au plan opérationnel, ce n'est pas la présence intrinsèque de contraintes dans l'optimisation qui conduit à délaisser l'optimisation libre au profit de l'optimisation liée. Ce sont plutôt les conséquences de ces restrictions au niveau de la nature topologique du domaine de définition de la fonction qui guident l'utilisateur vers l'une ou l'autre des techniques. Ainsi, dans un domaine fort limité, mais ouvert, la recherche des extrema libres s'applique. À l'inverse, une contrainte sous forme d'inégalité non stricte doit toujours être prise en compte pour déterminer les extrema liés.

Parmi les types de contraintes auxquelles le modélisateur peut se trouver confronté, deux classes se distinguent. D'une part, celles qui lient les variables du problème au travers d'une ou plusieurs équations. Ces contraintes dites d'égalités sont appréhendées grâce au théorème de LAGRANGE, qui fournit une condition de premier ordre formulée à partir d'une fonction ad hoc, dénommée lagrangien. Dans cette approche, de nouvelles variables, dites multiplicateurs, apparaissent et offrent une possibilité supplémentaire dans l'analyse des résultats. D'autre part, l'optimisation sous des contraintes d'inégalités non strictes, généralement traitée grâce au théorème de KUHN et TUCKER, ne sera pas étudie lors de ce module.

Exemple

Maximisation d'utilité sous contrainte budgétaire : les ménages doivent choisir le niveau de consommation des biens A et B, quand les prix sont p_a et p_b et le revenu est R :

$$\max_{c_a,c_b} u(c_a,c_b)\qquad \text{tel que } p_ac_a+p_bc_b=R.$$

Allocation du temps : une étudiante doit allouer son temps entre la préparation pour le cours A t_A et le cours B t_B, étant donné qu'elle dispose de 60 heures par semaine à y consacrer : $t_A+t_B=60$ est la contrainte. Elle cherche à obtenir la meilleure moyenne possible sur ces deux cours, étant donné que si elle passe t_i heures par semaine sur le cours i (i =A ou B), elle peut espérer une note $g_i(t_i)$: $\frac{g_A(t_A)+g_B(t_B)}{2}$ est la fonction à maximiser. Par exemple $g_A(t_A)=20+20\sqrt{t_A}$ et $g_B(t_B)=-80+3t_B$.

Problème

Déterminer les extrema d'une fonction de n variables, notée $f(\mathbf{x})$, mathématiquement définie dans un domaine ouvert $\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^n$, mais dont les variables sont soumises aux m contraintes $g_1(\mathbf{x})=0$, $g_2(\mathbf{x})=0,\dots,g_m(\mathbf{x})=0$, où les fonctions g_j sont également définies dans $\mathscr{D}$. Ces contraintes délimitent le sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{D}$ dans lequel s'effectue l'optimisation $\mathscr{A}=\left\{\mathbf{x}\in\mathscr{D}\,\middle|\,g_1(\mathbf{x})=0,\dots,g_m(\mathbf{x})=0\right\}$.

La définition d'extremum lié résulte donc de celle des extrema libres.

Définition *Optimisation liée*

La fonction f, appelée *fonction objectif*, admet un maximum lié (resp. un minimum lié) sous les contraintes $g_1(\mathbf{x})=0$, $g_2(\mathbf{x})=0$, …, $g_m(\mathbf{x})=0$, en $\mathbf{x}_0\in\mathscr{A}$ si, en ce point, elle admet un maximum libre (resp. un minimum libre) dans le domaine $\mathscr{A}$.

Généralement, une contrainte de type $g_j(\mathbf{x})=0$ définit une courbe. L'ensemble $\mathscr{A}$ est donc constitué de l'intersection de m courbes dans $\mathscr{D}\subset\mathbb{R}^n$. Pour $m>1$, il peut donc contenir fort peu de points. C'est pourquoi, en pratique, il est rare de rencontrer plus d'une contrainte d'égalité. Et, dans tous les cas, il est exclu d'avoir plus de contraintes que de variables, de sorte que la condition $m<n$ sera systématiquement imposée.

Exemple

Le consommateur maximise une fonction d'utilité, notée $U(x,y)$, qui dépend des quantités consommées de deux biens, x et y, sous une contrainte budgétaire $p_1x+p_2y=R$, où p_1 et p_2 ($p_1,p_2>0$) sont les prix des biens. Cette contrainte exprime que le montant alloué aux dépenses relatives aux deux biens considérés est fixé à R. Dans ce cas simple qui comporte deux variables et une contrainte, on peut aisément ramener l'optimisation liée à la recherche d'un maximum libre. En effet, la contrainte de budget permet d'expliciter la quantité d'un bien en fonction de l'autre $y=\frac{R}{p_2}-\frac{p_1}{p_2}x$. En vertu de la condition nécessaire pour la fonction d'une variable obtenue après substitution de y en fonction de x, on a

$$\frac{dU(x,y(x))}{dx}=\partial_xU(x,y)+\partial_yU(x,y)y'(x)=\partial_xU(x,y)-\frac{p_1}{p_2}\partial_yU(x,y)=0\implies\frac{\partial_xU(x,y)}{p_1}=\frac{\partial_yU(x,y)}{p_2}.$$

Ce résultat indique qu'à l'optimum, les utilités marginales (terme économique qui signifie tout simplement dérivées partielles de la fonction utilité par rapport aux quantités consommées) pondérées par les inverses des prix s'égalisent et désignons par λ cette quantité commune.
Par ailleurs, la contrainte de budget peut être reformulée par $g(x,y)=0$, où $g(x,y)=p_1x+p_2y-R$, de sorte que $p_1=\partial_xg(x,y)$ et $p_2=\partial_yg(x,y)$ et finalement

$$\frac{\partial_xU(x,y)}{p_1}=\frac{\partial_yU(x,y)}{p_2}=\lambda\iff\begin{cases}\partial_xU(x,y)-\lambda\partial_xg(x,y)=0\\\partial_yU(x,y)-\lambda\partial_yg(x,y)=0\end{cases}\iff\nabla U=\lambda\nabla g.$$

Autrement dit, si on introduit la fonction

$$L(x,y,\lambda)\equiv U(x,y)-\lambda g(x,y),$$

à l'optimum on a $\nabla L=0$, ce qui correspond à la condition nécessaire d'existence d'un extrema libre pour la fonction L.

Le théorème de LAGRANGE généralise la démarche adoptée dans cette résolution. Il représente une *condition nécessaire pour l'optimisation sous des contraintes d'égalité.*

Théorème *des multiplicateurs de* LAGRANGE

Soit les fonctions f et $g_1,\dots,g_m$ ($m<n$) de classe $\mathscr{C}^1$ dans un ouvert $\mathscr{D}\in\mathbb{R}^n$. Si f admet en $\mathbf{x}_0$ un extremum lié sous les contraintes $g_1(\mathbf{x})=0,\dots,g_m(\mathbf{x})=0$ et si la jacobienne en $\mathbf{x}_0$ (*i.e.* la matrice $(\partial x_jg_i(\mathbf{x}_0))_{m\times n}$) est de rang m, alors

$$\exists\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)\in\mathbb{R}^m\text{ tel que }\nabla f(\mathbf{x}_0)=\sum_{i=1}^m\lambda_i\nabla g_i(\mathbf{x}_0).$$

Le théorème de LAGRANGE peut être vu comme la condition nécessaire d'existence d'extrema libres appliquée à la fonction de $n+m$ variables appelée fonction lagrangienne (ou le lagrangien) :

$$\begin{aligned} L\colon \mathscr{D}\times\mathbb{R}^m &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{x},\boldsymbol{\lambda}) &\mapsto f(\mathbf{x}_0)-\sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

où $\boldsymbol{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$.

D'une manière qui peut sembler paradoxale, la méthode de LAGRANGE permet de transformer un problème d'optimisation liée d'une fonction de n variables sous m contraintes en un problème d'optimisation libre d'une fonction de $n+m$ variables, alors qu'intuitivement, on aurait plutôt attendu une baisse de la dimension du problème due aux restrictions impliquées par la présence de contraintes. Mais le paradoxe n'est qu'apparent. En effet, l'introduction des m multiplicateurs de LAGRANGE, $(\lambda_1,\dots,\lambda_m)$, enrichit plus qu'elle n'alourdit l'optimisation, grâce à l'interprétation dont jouissent ces variables. Précisément, la valeur prise par un multiplicateur traduit l'influence marginale du niveau de la contrainte correspondante sur la valeur de la fonction objective à l'optimum. On dit aussi que le multiplicateur de LAGRANGE mesure l'intensité de la contrainte. Chaque multiplicateur exprime la sensibilité de la fonction d'objectif à la variation du niveau d'une contrainte. Par exemple, une contrainte qui n'influence pas l'optimisation (contrainte inopérante ou superflue) est affectée d'un multiplicateur nul. À l'opposé, un multiplicateur élevé correspond à une contrainte qui pénalise de façon importante l'optimum.

Exemple *Inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques*

Cherchons le maximum de la fonction $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}$ sur $\mathbb{R}^n_+$ sous la contrainte $x_1+x_2+\dots+x_n=n$.
En un point où le maximum est atteint, on peut appliquer le théorème précédent avec $g(x_1,x_2,\dots,x_n)=(x_1+x_2+\dots+x_n)-n$. On obtient

$$\nabla f=\lambda\nabla g \qquad\iff\qquad \frac{\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}}{n}\begin{pmatrix}\frac{1}{x_1}\\ \frac{1}{x_2}\\ \vdots\\ \frac{1}{x_n}\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\1\\ \vdots\\1\end{pmatrix}.$$

En particulier, on obtient que tous les x_i sont égaux et qu'ils sont tous égaux à 1. Ainsi, on a $f(x_1,x_2,\dots,x_n)\le f(1,1,\dots,1)=1=g(x,y)/n$. On retrouve ainsi l'inégalité des moyennes arithmétiques et géométriques

$$\sqrt[n]{x_1x_2\dots x_n}\le\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}.$$

Optimiser $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$.

Réécrivons le théorème des multiplicateurs de LAGRANGE pour une fonction de deux variables et une seule contrainte d'égalité (voir la figure 4.1 pour une interprétation géométrique) :

Soit les fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^1$ dans un ouvert $\mathscr{D}\in\mathbb{R}^2$. Si f admet en (x_0,y_0) un extremum lié sous la contrainte $g(x,y)=0$ et si $\nabla g(x_0,y_0)\neq(0,0)$, alors

$$\exists\lambda\in\mathbb{R} \text{ tel que } \nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0).$$

On a alors deux méthodes pratiques pour déterminer les extrema liés de f sous la contrainte g :

Méthode 1 : Lagrangien. Formons le lagrangien

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) tels que

$$\begin{aligned} \partial_x f(x,y)&=\lambda\partial_x g(x,y),\\ \partial_y f(x,y)&=\lambda\partial_y g(x,y),\\ 0&=g(x,y). \end{aligned}$$

Notons (x_0,y_0,λ_0) une solution de ce système. Si $\nabla g(x_0,y_0)\neq 0$, alors (x_0,y_0) est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte g. Ces points critiques satisfont la contrainte, mais il s'agit à présent de classer ces candidats.

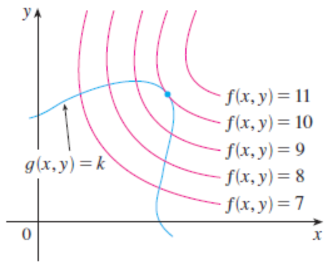


FIGURE 4.1: On cherche les extrema de la fonction $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=k$. Cela signifie qu'on cherche les extrema de $f(x,y)$ lorsque le point (x,y) appartient à la courbe de niveau $g(x,y)=k$. En figure on voit cette courbe ainsi que plusieurs courbes de niveau de f. Celles-ci ont équation $f(x,y)=c$ pour $c=7,8,9,10,11$. Optimiser $f(x,y)$ sous la condition $g(x,y)=k$ signifie chercher la plus grande (ou plus petite) valeur de c telle que la courbe de niveau $f(x,y)=c$ croise la courbe $g(x,y)=k$. Pour que cela ait lieu il faut que les deux courbes aient la même droite tangente. Cela signifie que les gradients sont parallèles, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$.

Comme dans le cas des extrema libres, on peut formuler des conditions du deuxième ordre relatives aux points critiques, mais qui ne s'appliquent qu'à certains cas. Soit

$$\Delta(x_0,y_0)\equiv\partial_{xx}L(x_0,y_0)\partial_{yy}L(x_0,y_0)-(\partial_{xy}L(x_0,y_0))^2$$

- ▷ si $\Delta(x_0,y_0)>0$, $\partial_{xx}L(x_0,y_0)<0$ et $\partial_{yy}L(x_0,y_0)<0$ on a un maximum local en (x_0,y_0) ;
- ▷ si $\Delta(x_0,y_0)>0$, $\partial_{xx}L(x_0,y_0)>0$ et $\partial_{yy}L(x_0,y_0)>0$ on a un minimum local en (x_0,y_0) ;
- ▷ si $\Delta(x_0,y_0)\le 0$ on ne peut pas conclure.

Méthode 2 : Réduction. Cette méthode est basée sur la possibilité d'exprimer la contrainte sous forme paramétrique. Par exemple

- ▷ s'il existe une fonction $h(x)$ telle que $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}=\{x\in\mathbb{R} \mid h(x)=y\}$, alors optimiser la fonction de deux variables $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$ équivaut à optimiser la fonction d'une seule variable $f(x,y=h(x))$;
- ▷ s'il existe une fonction $h(y)$ telle que $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid g(x,y)=0\}=\{y\in\mathbb{R} \mid h(y)=x\}$, alors optimiser la fonction de deux variables $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=0$ équivaut à optimiser la fonction d'une seule variable $f(x=h(x),y)$.

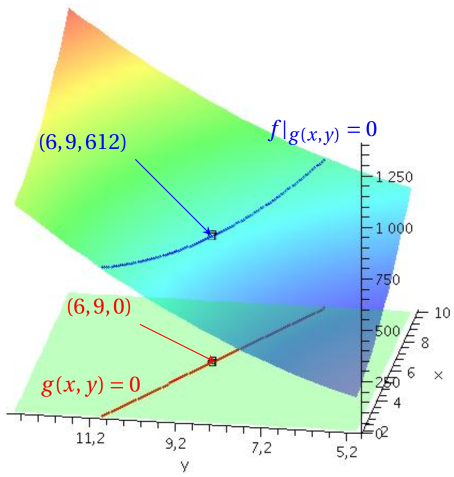
Exemple

Soient à déterminer les minima et maxima de la fonction objectif $f(x,y)=5x^2+6y^2-xy$ sous la contrainte $x+2y=24$. Pour cela, construisons la fonction de LAGRANGE

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=5x^2+6y^2-x-\lambda(x+2y-24)$$

et annulons son gradient

$$\nabla L=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}10x-y+\lambda\\12y-x+2\lambda\\-x-2y-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$



On obtient $x=6$, $y=9$. Comme $\partial_{xx}L(6,9)=10>0$, $\partial_{yy}L(6,9)=12>0$, $\partial_{xy}L(6,9)=-1$ et $\partial_{xx}L(6,9)\partial_{yy}L(6,9)-\partial_{xy}L^2(6,9)>0$, il s'agit d'un minimum. On notera que, dans ce cas, la valeur de λ ne présente pas d'intérêt et n'est donc pas cherchée.

Dans cet exemple on peut expliciter une variable dans la contrainte, par exemple $y=12-\frac{x}{2}$. Alors on peut minimiser directement la fonction $f(x,12-\frac{x}{2})=7x^2-84x+864$: comme $f'(x,12-\frac{x}{2})=14x-84$, le minimum se trouve en $x=6$, $y=12-\frac{6}{2}=9$ et la fonction vaut $f(6,9)=612$.

Exemple *Trouver un champ rectangulaire d'aire maximale délimité par une clôture de longueur ℓ donnée.*

Si x et y désignent les longueurs des côtés du champ, la longueur de la clôture est $2(x+y)$ et l'aire xy. Le problème est de trouver le maximum atteint par l'aire, non pas parmi tous les points de $\mathbb{R}^2_+$, mais seulement parmi ceux vérifiant la contrainte $2(x+y)=\ell$, où $\ell>0$ est fixé.

Lagrangien. Formons le lagrangien

$$L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(2(x+y)-\ell)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) tels que

$$\nabla L=\mathbf{0} \quad\iff\quad \begin{pmatrix} y-2\lambda\\ x-2\lambda\\ \ell-2(x+y)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\iff\quad \begin{cases} x=\ell/4\\ y=\ell/4\\ \lambda=\ell/8\end{cases}$$

Donc $(\ell/4,\ell/4)$ est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte g. Observons que ce point a été obtenu par une condition nécessaire et comme $\Delta(\ell/4,\ell/4,\ell/8)<0$, rien dans le théorème ne permet de savoir si c'est un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre.

Réduction. Bien sûr, on peut utiliser la contrainte pour calculer une des variables en fonction des deux autres. Par exemple pour y :

$$2(x+y)=\ell \quad\Longrightarrow\quad y=\frac{\ell}{2}-x.$$

En reportant cette valeur de y dans l'expression de l'aire, on obtient

$$A_\ell(x)=x\left(\frac{\ell}{2}-x\right) \qquad\text{et}\qquad A'_\ell(x)=\frac{\ell}{2}-2x.$$

Le maximum de $A_\ell(x)$ est atteint pour $x=\ell/4$, ce qui entraîne aussi $y=x$: à périmètre fixé, le rectangle d'aire maximale est le carré.

Optimiser $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z)=0$.

Réécrivons le théorème des multiplicateurs de LAGRANGE pour une fonction de trois variables et une seule contrainte d'égalité :

Soit les fonctions f et g de classe $\mathscr{C}^1$ dans un ouvert $\mathscr{D}\in\mathbb{R}^3$. Si f admet en (x_0,y_0,z_0) un extremum lié sous la contrainte $g(x,y,z)=0$ et si $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$, alors

$$\exists\lambda\in\mathbb{R} \text{ tel que } \nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0,z_0).$$

On a alors deux méthodes pratiques pour déterminer les extrema liés de f sous la contrainte g :

Méthode 1 : Lagrangien. Formons le lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,z,λ) tels que

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y,z)&=\lambda\partial_x g(x,y,z),\\ \partial_y f(x,y,z)&=\lambda\partial_y g(x,y,z),\\ \partial_z f(x,y,z)&=\lambda\partial_z g(x,y,z),\\ 0&=g(x,y,z).\end{aligned}$$

Notons (x_0,y_0,z_0,λ_0) une solution de ce système. Si $\nabla g(x_0,y_0,z_0)\neq0$, alors (x_0,y_0,z_0) est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte g. Ces points critiques satisfont la contrainte, mais il reste encore à déterminer s'il s'agit effectivement d'un extremum.

Méthode 2 : Réduction. Cette méthode est basée sur la possibilité d'exprimer la contrainte sous forme paramétrique. Par exemple

- ▷ s'il existe une fonction $h(x,y)$ telle que $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid h(x,y)=z\}$, alors chercher les extrema liés de la fonction de trois variables $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z)=0$ équivaut à chercher les extrema libres de la fonction de deux variables $f(x,y,z=h(x,y))$;
- ▷ s'il existe une fonction $h(x,z)$ telle que $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}=\{(x,z)\in\mathbb{R}^2 \mid h(x,z)=y\}$, alors chercher les extrema liés de la fonction de trois variables $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z)=0$ équivaut à chercher les extrema libres de la fonction de deux variables $f(x,y=h(x,z),z)$;
- ▷ s'il existe une fonction $h(y,z)$ telle que $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid g(x,y,z)=0\}=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2 \mid h(y,z)=x\}$, alors chercher les extrema liés de la fonction de trois variables $f(x,y,z)$ sous la contrainte $g(x,y,z)=0$ équivaut à chercher les extrema libres de la fonction de deux variables $f(x=h(y,z),y,z)$.

Exemple *Parmi les parallélépipèdes de surface S fixée, lesquels ont un volume maximal ?*
Si x, y, z désignent les longueurs des côtés du parallélépipède, la surface est $2(xy+yz+xz)$ et le volume xyz. Le problème est de trouver le maximum atteint par le volume xyz, non pas parmi tous les points de $\mathbb{R}^3_+$, mais seulement parmi ceux vérifiant la contrainte $2(xy+yz+xz)=S$, où S est fixé.

Lagrangien. Formons le lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda)=xyz-\lambda(2(xy+yz+xz)-S)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,z,λ) tels que

$$\nabla L=\mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} yz-2\lambda(y+z)\\ xz-2\lambda(x+z)\\ xy-2\lambda(y+x)\\ S-2(xy+yz+xz)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} z(y-x)=2\lambda(y-x)\\ y(z-x)=2\lambda(z-x)\\ x(z-y)=2\lambda(z-y)\\ 2(xy+yz+xz)=S\end{cases} \iff \begin{cases} x=\sqrt{S/6}\\ y=\sqrt{S/6}\\ z=\sqrt{S/6}\\ \lambda=\sqrt{S/96}\end{cases}$$

Donc $(\sqrt{S/6},\sqrt{S/6},\sqrt{S/6})$ est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte g. Observons que ce point a été obtenu par une condition nécessaire. Rien dans le théorème ne permet de savoir si c'est un maximum, un minimum ou ni l'un ni l'autre.

Réduction. Bien sûr, on peut utiliser la contrainte pour calculer une des variables en fonction des deux autres. Par exemple pour z :

$$2(xy+yz+xz)=S \implies z=\frac{\frac{S}{2}-xy}{x+y}.$$

En reportant cette valeur de z dans l'expression du volume, on obtient

$$V_S(x,y)=xy\frac{\frac{S}{2}-xy}{x+y}.$$

On peut calculer le maximum de cette fonction avec la technique du gradient (extrema libres). Le maximum de $V_S(x,y)$ est atteint pour

$$x=y=\sqrt{\frac{S}{6}},$$

ce qui entraîne aussi $z=\sqrt{\frac{S}{6}}$: à surface fixée, le parallélépipède de volume maximal est le cube.

Optimiser $f(x,y,z)$ sous les contraintes $g_1(x,y,z)=0$ et $g_2(x,y,z)=0$.

Réécrivons le théorème des multiplicateurs de LAGRANGE pour une fonction de deux variables et deux contraintes d'égalité :

Soit les fonctions f, g_1 et g_2 de classe $\mathscr{C}^1$ dans un ouvert $\mathscr{D}\in\mathbb{R}^3$. Si f admet en (x_0,y_0,z_0) un extremum lié sous les contraintes $g_1(x,y,z)=0$ et $g_2(x,y,z)=0$ et si $\nabla g_1(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$ et $\nabla g_2(x_0,y_0,z_0)\neq(0,0,0)$, alors

$$\exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} \text{ tels que } \nabla f(x_0,y_0,z_0)=\lambda\nabla g_1(x_0,y_0,z_0)+\mu\nabla g_2(x_0,y_0,z_0).$$

On a alors deux méthodes pratiques pour déterminer les extrema liés de f sous les contraintes g_1 et g_2 :

Méthode 1 : Lagrangien. Formons le lagrangien

$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=f(x,y,z)-\lambda g_1(x,y,z)-\mu g_2(x,y,z)$$

où λ et μ (multiplicateurs de LAGRANGE) sont des inconnues. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les 5-uplets (x,y,z,λ,μ) tels que

$$\begin{aligned}\partial_x f(x,y,z)&=\lambda\partial_x g_1(x,y,z)-\mu\partial_x g_2(x,y,z),\\ \partial_y f(x,y,z)&=\lambda\partial_y g_1(x,y,z)-\mu\partial_y g_2(x,y,z),\\ \partial_z f(x,y,z)&=\lambda\partial_z g_1(x,y,z)-\mu\partial_z g_2(x,y,z),\\ 0&=g_1(x,y,z),\\ 0&=g_2(x,y,z).\end{aligned}$$

Notons $(x_0,y_0,z_0,\lambda_0,\mu_0)$ une solution de ce système. Si $\nabla g_1(x_0,y_0,z_0)\neq 0$ et $\nabla g_2(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, alors (x_0,y_0,z_0) est un *point critique* de la fonction f sous les contraintes g_1 et g_2. Ces points critiques satisfont les contraintes, mais il reste encore à déterminer s'il s'agit effectivement d'un extremum.

Méthode 2 : Réduction. Cette méthode est basée sur la possibilité d'exprimer la contrainte sous forme paramétrique. Par exemple, s'il existe deux fonctions $h_1(x)$ et $h_2(x)$ telles que $\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \,\middle|\, g_1(x,y,z)=0 \text{ et } g_2(x,y,z)=0\right\}=\left\{x\in\mathbb{R} \,\middle|\, h_1(x)=y \text{ et } h_2(x)=z\right\}$, alors optimiser la fonction de trois variables $f(x,y,z)$ sous les contraintes $g_1(x,y,z)=0$ et $g_2(x,y,z)=0$ équivaut à optimiser la fonction d'une seule variable $f(x,y=h_1(x),z=h_2(x))$; etc.

Exemple

On veut optimiser la fonction $f(x,y,z) = xyz$ sous les contraintes $g_1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$ et $g_2(x,y,z) = x + y + z - 1$.
La contrainte $g_1(x,y,z) = 0$ est l'équation de la sphère de centre $(0,0,0)$ et de rayon 1 ; la contrainte $g_2(x,y,z) = 0$ est l'équation d'un plan. On cherche donc les extrema de f sur l'intersection de la sphère unité et d'un plan, à savoir sur un cercle dans l'espace. Si un point (x,y,z) est solution, alors il existe deux multiplicateurs λ_1, λ_2 tels que $\nabla L = \mathbf{0}$ où $L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = f(x,y,z) - \lambda_1 g_1(x,y,z)\lambda_2 g_2(x,y,z) = xyz - \lambda_1(x^2+y^2+z^2-1) - \lambda_2(x+y+z-1)$. On doit donc avoir

$$\nabla L = \mathbf{0} \quad\iff\quad \begin{pmatrix} yz - \lambda_1(2x) - \lambda_2 \\ xz - \lambda_1(2y) - \lambda_2 \\ xy - \lambda_1(2z) - \lambda_2 \\ 1 - (x^2+y^2+z^2) \\ 1 - (x+y+z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc un système de 5 équations et 5 inconnues : $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$. L'étude de ce système montre qu'il a 6 solutions, données dans le tableau ci-dessous :

x	y	z	λ_1	λ_2
1	0	0	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	0	0
$-1/3$	$2/3$	$2/3$	$-1/3$	$2/9$
$2/3$	$-1/3$	$2/3$	$-1/3$	$2/9$
$2/3$	$2/3$	$-1/3$	$-1/3$	$2/9$

Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire. Rien dans le théorème ne permet de savoir si ce sont des maxima, des minima ou ni l'un ni l'autre.

Exercices

Optimisation dans un ouvert

Exercice 4.1

Soit $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^2)$ et (a,b) un point de $\mathbb{R}^2$. On suppose que

$$f(a,b)=0, \qquad \partial_x f(a,b)=0, \qquad \partial_y f(a,b)=0, \qquad \partial_{xx} f(a,b)=1, \qquad \partial_{yy} f(a,b)=2, \qquad \partial_{xy} f(a,b)=3.$$

Le point (a,b) est-il un point critique ? Si oui, de quelle nature ?

CORRECTION. Il est un point critique et plus particulièrement il s'agit d'un point-selle car $\Delta(a,b)<0$.

Exercice 4.2

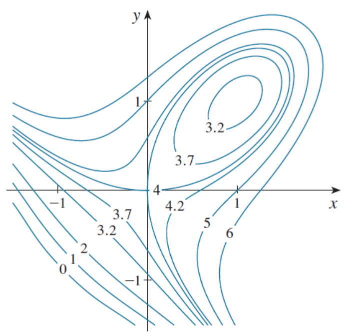
On suppose que $(1,1)$ est un point critique d'une fonction f dont les dérivées secondes sont continues. Dans chaque cas, que peut-on dire au sujet de f ?

1. $\partial_{xx} f(1,1)=4$, $\partial_{xy} f(1,1)=1$, $\partial_{yy} f(1,1)=2$;
2. $\partial_{xx} f(1,1)=4$, $\partial_{xy} f(1,1)=3$, $\partial_{yy} f(1,1)=2$.

CORRECTION.

1. D'abord on calcule $\Delta(1,1)=\partial_{xx} f(1,1)\partial_{yy} f(1,1)-(\partial_{xy} f(1,1))^2=7$. Comme $\Delta(1,1)>0$ et $\partial_{xx} f(1,1)>0$, f a un minimum local en $(1,1)$.
2. D'abord on calcule $\Delta(1,1)=\partial_{xx} f(1,1)\partial_{yy} f(1,1)-(\partial_{xy} f(1,1))^2=-1$. Comme $\Delta(1,1)<0$, f a un point-selle en $(1,1)$.

Exercice 4.3



À partir de la carte des courbes de niveau de la figure ci-contre, localiser les points critiques de f et préciser pour chacun de ces points s'il s'agit d'un point-selle ou d'un maximum ou d'un minimum local.
Vérifier ensuite le raisonnement sachant que

$$f(x,y)=4+x^3+y^3-3xy.$$

CORRECTION. Dans la figure, le point $(1,1)$ est entouré par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f augmentent. Ainsi on pourrait s'attendre à un minimum local en ou à proximité de $(1,1)$.

Les courbes de niveau proche du point $(0,0)$ ressemblent à des hyperboles, et si nous nous éloignons de l'origine, les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres, donc nous nous attendons à trouver un point selle.

Vérifions cette analyse :

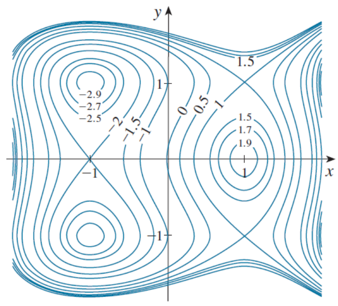
Points critiques : $\partial_x f(x,y)=3x^2-3y$, $\partial_y f(x,y)=3y^2-3x$. On a un point critique si les deux dérivées partielles s'annulent en même temps ; on trouve deux points critiques : $(1,1)$ et $(0,0)$.

Études des points critiques : les dérivées secondes sont $\partial_{xx} f(x,y)=6x$, $\partial_{xy} f(x,y)=-3$, $\partial_{yy} f(x,y)=6y$, ainsi $\Delta(x,y)=\partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y)-(\partial_{xy} f(x,y))^2=36xy-9$. Comme $\Delta(1,1)>0$ et $\partial_{xx} f(1,1)>0$, f a un minimum local en $(1,1)$. Comme $\Delta(0,0)<0$, f a un point-selle en $(0,0)$.

Exercice 4.4

À partir de la carte des courbes de niveau de la figure ci-contre, localiser les points critiques de f et préciser pour chacun de ces points s'il s'agit d'un point-selle ou d'un maximum ou d'un minimum local.
Vérifier ensuite le raisonnement sachant que

$$f(x,y) = 3x - x^3 - 2y^2 + y^4.$$



Correction. Dans la figure, les points $(-1,-1)$ et $(-1,1)$ sont entourés par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f augmentent. Ainsi on pourrait s'attendre à des minima locaux en ou à proximité de $(-1,\pm 1)$.

De la même manière, le point $(1,0)$ est entouré par des courbes de niveau qui sont de forme ovale et qui indiquent que si nous nous éloignons du point dans n'importe quelle direction les valeurs de f diminuent. Ainsi on pourrait s'attendre à un maximum local en ou à proximité de $(1,0)$.

Les courbes de niveau proche des points $(-1,0)$, $(1,1)$ et $(1,-1)$ ressemblent à des hyperboles, et si nous nous éloignons de ces points, les valeurs de f augmentent dans certaines directions et diminuent dans d'autres, donc nous nous attendons à trouver des points de selle.

Vérifions cette analyse :

$$\nabla f = \mathbf{0} \iff \begin{cases} 3 - 3x^2 = 0 \\ -4y + 4y^3 = 0 \end{cases}$$

donc les points critiques sont $(1,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$, $(-1,0)$, $(-1,1)$, $(-1,-1)$. Les dérivées secondes sont $\partial_{xx} f(x,y) = -6x$, $\partial_{xy} f(x,y) = 0$, $\partial_{yy} f(x,y) = 12y^2 - 4$, ainsi $\Delta(x,y) = \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - (\partial_{xy} f(x,y))^2 = -72xy^2 + 24x$.

Point critique	Δ	$\partial_{xx} f$	Conclusion
$(1,0)$	$24 > 0$	$-6 < 0$	f a un maximum local en $(1,0)$
$(1,1)$	$-48 < 0$		f a un point-selle en $(1,1)$
$(1,-1)$	$-48 < 0$	< 0	f a un point-selle en $(1,-1)$
$(-1,0)$	$-24 < 0$		f a un point-selle en $(-1,0)$
$(-1,1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	f a un minimum local en $(-1,1)$
$(-1,-1)$	$48 > 0$	$6 > 0$	f a un minimum local en $(-1,-1)$

Exercice 4.5

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^2 y}{2} + x^2 + \frac{y^3}{3} - 4y.$$

Trouver les points critiques de la fonction f et établir leur nature.

Correction. f est une application définie sur $\mathbb{R}^2$; les points critiques sont les points qui rendent nul le gradient. On a

$$\nabla f = \begin{pmatrix} xy + 2x, \\ \frac{x^2}{2} + y^2 - 4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \nabla f = \mathbf{0} \iff (x,y) \in \{(0,-2),(0,2)\}.$$

Pour en étudier la nature on calcule les dérivées secondes :

$$\partial_{xx} f(x,y) = y + 2 \qquad \partial_{yy} f(x,y) = 2y \qquad \partial_{xy} f(x,y) = x$$

Donc

$$\Delta(x,y) = \partial_{xx} f(x,y)\partial_{yy} f(x,y) - (\partial_{xy} f(x,y))^2 = 2y(y+2) - x$$

et

$$\Delta(0,-2)=0, \qquad \Delta(0,2)=16.$$

Comme $\Delta(0,2)>0$ et $\partial_{xx}f(0,2)=4>0$, on conclut que le point $(0,2)$ est un minimum pour f.

En revanche, comme $\Delta(0,-2)=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne.

Exercice 4.6

Déterminer les extrema de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=y^2+xy\ln(x)$.

CORRECTION. f est de classe $\mathscr{C}^2$ dans son domaine de définition, l'ouvert $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x>0\right\}$.

Points critiques On a $\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix} y\ln(x)+y \\ 2y+x\ln(x)\end{pmatrix}$ et

$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \iff \begin{cases} y(1+\ln(x))=0, \\ 2y+x\ln(x)=0, \end{cases} \iff (x,y)\in\left\{(1,0);\left(\frac{1}{e},\frac{1}{2e}\right)\right\}$$

Nature des points critiques $D(x,y)=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2=\frac{y}{x}\times 2-(1+\ln(x))^2$. Comme $D(1,0)=-1<0$, le point $(1,0)$ est un point-selle ; comme $D(1/e,1/(2e))=1>0$ et $\partial_{xx}f(1/e,1/(2e))=1/2>0$, le point $(1/e,1/(2e))$ est un minimum local.

Exercice 4.7

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\frac{x^2y}{2}-x^2+\frac{y^3}{3}-4y.$$

Trouver les points critiques de la fonction f et établir leur nature.

CORRECTION. f est une application définie sur $\mathbb{R}^2$; les points critiques sont les points qui rendent nul le gradient. On a

$$\nabla f=\begin{pmatrix} xy-2x, \\ \frac{x^2}{2}+y^2-4\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \nabla f=\mathbf{0} \iff (x,y)\in\{\,(0,-2),(0,2)\,\}.$$

Pour en étudier la nature on calcule les dérivées secondes :

$$\partial_{xx}f(x,y)=y-2 \qquad \partial_{yy}f(x,y)=2y \qquad \partial_{xy}f(x,y)=x$$

Donc

$$\Delta(x,y)=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2=2y(y-2)-x$$

et

$$\Delta(0,-2)=16, \qquad \Delta(0,2)=0.$$

Comme $\Delta(0,-2)>0$ et $\partial_{xx}f(0,-2)<0$, on conclut que le point $(0,-2)$ est un maximum pour f.

En revanche, comme $\delta(0,2)=0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne.

Exercice 4.8

Soit f l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y)=\frac{xy^2}{2}+\frac{x^3}{3}-4x+y^2.$$

Trouver les points critiques de la fonction f et établir leur nature.

CORRECTION. f est une application définie sur $\mathbb{R}^2$; les points critiques sont les points qui rendent nul le gradient. On a

$$\nabla f = \begin{pmatrix} \frac{y^2}{2} + x^2 - 4, \\ xy + 2y \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \nabla f = \mathbf{0} \iff (x, y) \in \{(-2, 0), (2, 0)\}.$$

Pour en étudier la nature on calcule les dérivées secondes :

$$\partial_{xx} f(x, y) = 2x \qquad \partial_{yy} f(x, y) = x + 2 \qquad \partial_{xy} f(x, y) = y$$

Donc

$$\delta(x, y) = \partial_{xx} f(x, y) \partial_{yy} f(x, y) - (\partial_{xy} f(x, y))^2 = 2x(x+2) - y$$

et

$$\delta(-2, 0) = 0, \qquad \delta(2, 0) = 16.$$

Comme $\delta(2, 0) > 0$ et $\partial_{xx} f(2, 0) = 4 > 0$, on conclut que le point $(0, 2)$ est un minimum pour f. En revanche, comme $\delta(-2, 0) = 0$, on ne peut pas conclure en utilisant la matrice hessienne.

Exercice 4.9

Une montagne a la forme de la surface $z(x, y) = 2xy - 2x^2 - y^2 - 8x + 6y + 4$ (l'unité de mesure est de 100 mètres). Si le niveau de la mer correspond à $z = 0$, quelle est la hauteur de la montagne ?

CORRECTION. Il s'agit d'évaluer $z(x, y)$ dans le point de maximum. Cherchons d'abord les points critiques :

$$\vec{\nabla} z(x, y) = \begin{pmatrix} 2y - 4x - 8 \\ 2x - 2y + 6 \end{pmatrix}$$

et $\vec{\nabla} z(x, y) = \vec{0}$ ssi $(x, y) = (-1, 2)$. On établie la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$\partial_{xx} f(x, y) = -4 < 0, \qquad \partial_{yy} f(x, y) = -2, \qquad \partial_{xy} f(x, y) = 2,$$

et $\partial_{xx} f(-1, 2) \partial_{yy} f(-1, 2) - (\partial_{xy} f(-1, 2))^2 = 4 > 0$ donc $(-1, 2)$ est un maximum. Comme $z(-1, 2) = 14$, la montagne est haute 1400 mètre.

Exercice 4.10

Déterminer et classer les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (x^2 - y^2) e^{(-x^2 - y^2)}.$$

CORRECTION. Cherchons d'abord les 5 points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(1 - x^2 + y^2) e^{(-x^2 - y^2)} \\ 2y(-1 - x^2 + y^2) e^{(-x^2 - y^2)} \end{pmatrix}$$

et $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ssi

$$(x, y) \in \{(0, 0), (0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\}.$$

Étudions maintenant séparément chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x, y) &= 2e^{(-x^2 - y^2)} (1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2 y^2), \\
\partial_{xy} f(x, y) &= 4xy(x^2 - y^2) e^{(-x^2 - y^2)}, \\
\partial_{yy} f(x, y) &= 2e^{(-x^2 - y^2)} (-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2 y^2 - 2y^4), \\
\Delta(x, y) &= \partial_{xx} f(x, y) \partial_{yy} f(x, y) - (\partial_{xy} f(x, y))^2.
\end{aligned}$$

On a alors

(x_0, y_0)	$\partial_{xx} f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy} f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy} f(x_0, y_0)$	$\Delta(x_0, y_0)$	
$(0,0)$	2	0	-2	-4	c'est un point-selle
$(1,0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(-1,0)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un maximum
$(0,1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum
$(0,-1)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un minimum

Exercice 4.11

Déterminer et classer les 5 points critiques (en spécifiant s'ils sont des max, des min ou des points de selle) de la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = (y^2 - x^2)e^{(-x^2-y^2)}.$$

Correction. Cherchons d'abord les 5 points critiques :

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x(-1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)} \\ 2y(1 + x^2 - y^2)e^{(-x^2-y^2)} \end{pmatrix}$$

et $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ssi

$$(x, y) \in \{ (0,0),\ (0,1),\ (0,-1),\ (1,0),\ (-1,0) \}.$$

Étudions maintenant séparément chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :

$$\begin{aligned}
\partial_{xx} f(x, y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(1 - 5x^2 + y^2 + 2x^4 - 2x^2 y^2),\\
\partial_{xy} f(x, y) &= -4xy(x^2 - y^2)e^{(x^2-y^2)},\\
\partial_{yy} f(x, y) &= -2e^{(-x^2-y^2)}(-1 - x^2 + 5y^2 + 2x^2 y^2 - 2y^4),\\
\Delta(x, y) &= \partial_{xx} f(x, y)\partial_{yy} f(x, y) - (\partial_{xy} f(x, y))^2.
\end{aligned}$$

On a alors

(x_0, y_0)	$\partial_{xx} f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy} f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy} f(x_0, y_0)$	$\Delta(x_0, y_0)$	
$(0,0)$	-2	0	2	-4	c'est un POINT DE SELLE
$(1,0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
$(-1,0)$	$\frac{4}{e}$	0	$\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MIN
$(0,1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX
$(0,-1)$	$-\frac{4}{e}$	0	$-\frac{4}{e}$	$\frac{16}{e^2}$	c'est un MAX

Exercice 4.12

La société d'Adèle produit deux types d'ampoules : E17 et E24. Indiquons par x le nombre de milliers d'ampoules de type E17 produites et supposons que la demande pour ce type de lampes est donnée par $p_1 = 50 - x$, où p_1 est le prix de vente en euros. De même, indiquons par y le nombre de milliers d'ampoules de type E24 produites et supposons que la demande pour ce type est donnée par $p_2 = 60 - 2y$, où p_2 est aussi le prix de vente en euros. Les coûts communs de production de ces ampoules est $C = 2xy$ (en milliers d'euros). Par conséquent, le bénéfice de la société d'Adèle (en milliers d'euros) est une fonction de deux variables x et y. Déterminer le profit maximal d'Adèle.

CORRECTION. La fonction profit en milliers d'euros est $p(x,y) = p_1 x + p_2 y - C(x,y) = 50x - x^2 + 60y - 2y^2 - 2xy$. Pour maximiser le profit, on cherche d'abord les points stationnaires :

$$\nabla p = \mathbf{0} \quad \iff \quad \begin{pmatrix} 50-2x-2y \\ 60-4y-2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \iff \quad \begin{cases} x = 20, \\ y = 5. \end{cases}$$

Pour établir la nature de ces points, on étudie la matrice hessienne :

$$\begin{aligned} \partial_{xx} p(x,y) &= -2, & \qquad \partial_{xx} p(20,5) &= -2 < 0, \\ \partial_{xy} p(x,y) &= -2, & \qquad \partial_{xy} p(20,5) &= -2, \\ \partial_{yy} p(x,y) &= -4, & \qquad \partial_{yy} p(20,5) &= -4, \end{aligned}$$

et $\Delta(20,5) = (-2)(-4) - (-2)^2 = 4 > 0$ donc $(20,5)$ est un point de maximum pour p et le profit maximal vaut $p(20,5) = 650$. La société d'Adèle réalise le profit maximal de 650000 euros lorsqu'elle vend 20000 ampoules E17 à 30 euros l'une et 5000 ampoules E24 à 50 euros l'une.

Exercice 4.13

Vous êtes le directeur financier de la firme SANBON & FILS. Cette entreprise a investi 3000 euros pour mettre au point un nouveau parfum. Le coût de la production est de 3 euros par flacon de 100 mL. L'expert consulté par M. SANBON père a établi que si la firme consacre x euros en publicité pour son parfum et que le prix de vente d'un flacon est de y euros, la firme vendra exactement $300+6\sqrt{x}-10y$ pièces. La firme SANBON & FILS fixe évidemment x et y de manière à maximiser son profit. En tant que directeur financier, il vous incombe de déterminer ces valeurs.

CORRECTION.
- ▷ Revenu de la vente : $y(300+6\sqrt{x}-10y)$
- ▷ Coût de production : $3(300+6\sqrt{x}-10y)$
- ▷ Coût de développement et de publicité : $3000+x$

Le profit de la firme à maximiser est donc : $f(x,y) = (y-3)(300+6\sqrt{x}-10y) - x - 3000$. La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = \frac{3(y-3)}{\sqrt{x}} - 1 = 0 \\ \partial_y f(x,y) = 330 + 6\sqrt{x - 20y} = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad (x_0, y_0) = (164025, 138).$$

La hessienne en ce point est définie négative :

$$\begin{cases} \partial_{xx} f(x,y) = -\frac{3(y-3)}{2\sqrt{x^3}} \\ \partial_{xy} f(x,y) = \frac{3}{\sqrt{x}} \\ \partial_{yy} f(x,y) = \frac{30(y-3)}{\sqrt{x^3}} - \frac{3}{\sqrt{x}} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \Delta(x_0,y_0) = -\frac{241}{32805}.$$

Comme $\partial_{xx} f(x_0,y_0) = -20$, on a bien un maximum. La firme SANBON & FILS va donc consacrer 164025 euros à la promotion de son nouveau parfum et vendre le flacon de 100 mL à 138 euros. Elle réalisera de la sorte le profit maximal de $f(164025,138) = 15225$ euros.

Exercice 4.14 *Une fabrication optimale*

Votre société s'occupe de la fabrication d'une pièce mécanique. Celle-ci dépend de deux paramètres réels x et y (à priori non-contraints) de la façon suivante : le coût unitaire de fabrication d'une pièce est égal à

$$c(x,y) = x^2 + 2y^2$$

tandis que le taux de pièces défectueuses (compris entre 0 et 1) est égal à

$$t(x,y) = \frac{1}{1+(xy)^2}.$$

On cherche à maximiser la rentabilité totale du processus de fabrication. On prendra pour fonction objectif le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse, qui est égal au coût de fabrication d'une pièce divisé par le taux de pièces non-défectueuses, et on tentera de le simplifier autant que possible.

Correction. La fonction à minimiser s'écrit $f(x,y)=\frac{c(x,y)}{1-t(x,y)}=\frac{x^2+2y^2}{1-\frac{1}{1+(xy)^2}}=\frac{(x^2+2y^2)(1+x^2y^2)}{x^2y^2}$. La condition nécessaire s'écrit

$$\begin{cases}\partial_x f(x,y)=2\frac{x^4-2}{x^3}=0\\ \partial_y f(x,y)=2\frac{2y^4-1}{y^3}=0\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad (x_0,y_0)=(\sqrt[4]{2},1/\sqrt[4]{2}).$$

La hessienne en ce point est définie positive :

$$\begin{cases}\partial_{xx} f(x,y)=2\frac{x^4+6}{x^4}\\ \partial_{xy} f(x,y)=0\\ \partial_{yy} f(x,y)=2\frac{2y^4+3}{y^4}\end{cases}\qquad\Longrightarrow\qquad \Delta(x_0,y_0)=4\frac{2+6}{2}\frac{1+3}{1/2}>0.$$

Comme $\partial_{xx}f(x_0,y_0)>0$, on a bien un minimum. En choisissant $(x,y)=(\sqrt[4]{2},1/\sqrt[4]{2})$, le coût unitaire moyen d'une pièce non-défectueuse est minimale est égal à $4\sqrt{2}$.

Exercice 4.15 *Courbe de meilleure approximation*

On considère un ensemble de points expérimentaux $\left\{(x_i,y_i)\right\}_{i=0}^n$ et on suppose que les deux grandeurs x et y sont liées, au moins approximativement, par une relation de la forme $y=a\sin(\frac{\pi}{2}x)+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$. On souhaite alors trouver les constantes a et b pour que la courbe d'équation $y=a\sin(\frac{\pi}{2}x)+b\cos(\frac{\pi}{2}x)$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *courbe de meilleure approximation*).
Soit $d_i=y_i-(a\sin(\frac{\pi}{2}x_i)+b\cos(\frac{\pi}{2}x_i))$ l'écart vertical du point (x_i,y_i) par rapport à la courbe. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a et b de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\colon \mathbb{R}^2&\to\mathbb{R}_+\\ (a,b)&\mapsto\mathscr{E}(a,b)=\sum_{i=0}^n d_i^2.\end{aligned}$$

Écrire le système linéaire qui permet de calculer a et b.

Correction. Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a}(a,b)&=-2\left(\sum_{i=0}^n\left(y_i-\left(a\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\right),\\ \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial b}(a,b)&=-2\left(\sum_{i=0}^n\left(y_i-\left(a\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\right),\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned}\begin{cases}\frac{\partial\mathscr{E}}{\partial a}(a,b)=0\\ \frac{\partial\mathscr{E}}{\partial b}(a,b)=0\end{cases}&\iff\begin{cases}\sum_{i=0}^n\left(y_i-\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin(\frac{\pi}{2}x_i)=0\\ \sum_{i=0}^n\left(y_i-\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos(\frac{\pi}{2}x_i)=0\end{cases}\\ &\iff\begin{cases}\sum_{i=0}^n\left(\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\sin(\frac{\pi}{2}x_i)=\sum_{i=0}^n y_i\sin(\frac{\pi}{2}x_i)\\ \sum_{i=0}^n\left(\left(a\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)+b\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\right)\right)\cos(\frac{\pi}{2}x_i)=\sum_{i=0}^n y_i\cos(\frac{\pi}{2}x_i)\end{cases}\\ &\iff\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)&\sum_{i=0}^n\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\\ \sum_{i=0}^n\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)&\sum_{i=0}^n\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sum_{i=0}^n y_i\sin\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\\ \sum_{i=0}^n y_i\cos\left(\frac{\pi}{2}x_i\right)\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Si on note

$$U=\sum_{i=0}^n\sin^2\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),\qquad V=\sum_{i=0}^n\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right)\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),\qquad W=\sum_{i=0}^n\cos^2\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),\qquad P=\sum_{i=0}^n y_i\sin\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),\qquad Q=\sum_{i=0}^n y_i\cos\left(\tfrac{\pi}{2}x_i\right),$$

on doit résoudre le système linéaire

$$\begin{pmatrix}U&V\\ V&W\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}P\\ Q\end{pmatrix}$$

dont la solution est

$$a=\frac{WP-VQ}{UW-V^2},\qquad\qquad b=\frac{UQ-VP}{UW-V^2}.$$

Exercice 4.16

La méthode de régression s'étend facilement à des données qui dépendent de deux ou plusieurs variables. On considère un ensemble de points expérimentaux $\left\{(x_i, y_i, z_i)\right\}_{i=0}^{n}$ et on suppose que les trois grandeurs x, y et z sont liées, au moins approximativement, par une relation affine de la forme $z = a + bx + cy$. On souhaite alors trouver les constantes a, b et c pour que le plan d'équation $z = a + bx + cy$ s'ajuste le mieux possible aux points observés (on parle de *plan de meilleure approximation*).
Soit $d_i = z_i - (a + bx_i + cy_i)$ l'écart vertical du point (x_i, y_i, z_i) par rapport au plan. La méthode de régression (ou des moindres carrés) est celle qui choisit a, b et c de sorte que la somme des carrés de ces déviations soit minimale. Pour cela, on doit minimiser la fonction $\mathscr{E}$ définie par

$$\begin{aligned}\mathscr{E}\colon \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}_+\\ (a,b,c) &\mapsto \mathscr{E}(a,b,c) = \sum_{i=0}^{n} d_i^2.\end{aligned}$$

1. Écrire le système linéaire qui permet de calculer a, b et c
2. Calculer l'équation du plan de meilleure approximation pour l'ensemble $\left\{(x_i, y_i, z_i)\right\}_{i=0}^{5}$ où

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0	1	2	2	2
y_i	0	1	0	0	1	2
z_i	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1

   On utilisera la méthode du pivot de Gauss pour la résolution du système linéaire.

Correction. 1. Pour minimiser $\mathscr{E}$ on cherche ses points stationnaires. Puisque

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a}(a,b,c) &= -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))\right),\\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial b}(a,b,c) &= -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))x_i\right),\\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial c}(a,b,c) &= -2\left(\sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))y_i\right),\end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{cases}\frac{\partial \mathscr{E}}{\partial a}(a,b,c)=0\\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial b}(a,b,c)=0\\ \frac{\partial \mathscr{E}}{\partial c}(a,b,c)=0\end{cases}\iff \begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))=0\\ \sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))x_i=0\\ \sum_{i=0}^{n}(z_i-(a+bx_i+cy_i))y_i=0\end{cases}\iff \begin{cases}\sum_{i=0}^{n}(a+bx_i+cy_i)=\sum_{i=0}^{n}z_i\\ \sum_{i=0}^{n}(ax_i+bx_i^2+cy_ix_i)=\sum_{i=0}^{n}z_ix_i\\ \sum_{i=0}^{n}(ay_i+bx_iy_i+cy_i^2)=\sum_{i=0}^{n}z_iy_i\end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix}(n+1) & \sum_{i=0}^{n}x_i & \sum_{i=0}^{n}y_i\\ \sum_{i=0}^{n}x_i & \sum_{i=0}^{n}x_i^2 & \sum_{i=0}^{n}x_iy_i\\ \sum_{i=0}^{n}y_i & \sum_{i=0}^{n}x_iy_i & \sum_{i=0}^{n}y_i^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sum_{i=0}^{n}z_i\\ \sum_{i=0}^{n}z_ix_i\\ \sum_{i=0}^{n}z_iy_i\end{pmatrix}.$$

2. Dans notre cas,

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{n}x_i=7 &&\sum_{i=0}^{n}y_i=4 &&\sum_{i=0}^{n}z_i=\frac{11}{2}\\ &\sum_{i=0}^{n}x_iy_i=6 &&\sum_{i=0}^{n}x_iz_i=\frac{7}{2} &&\sum_{i=0}^{n}y_iz_i=\frac{9}{2}\\ &n+1=6 &&\sum_{i=0}^{n}x_i^2=13 &&\sum_{i=0}^{n}y_i^2=6\end{aligned}$$

donc on a le système linéaire

$$\begin{pmatrix}6 & 7 & 4\\ 7 & 13 & 6\\ 4 & 6 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11/2\\7/2\\9/2\end{pmatrix}$$

qu'on peut résoudre par la méthode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & 11/2 \\ 7 & 13 & 6 & 7/2 \\ 4 & 6 & 6 & 9/2 \end{array}\right) \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - \frac{2}{3}L_1]{L_2 \leftarrow L_2 - \frac{7}{6}L_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & 11/2 \\ 0 & 29/6 & 4/3 & -35/12 \\ 0 & 4/3 & 10/3 & 5/6 \end{array}\right) \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{8}{29}L_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 7 & 4 & 11/2 \\ 0 & 29/6 & 4/3 & -35/12 \\ 0 & 0 & 86/29 & 95/58 \end{array}\right)$$

dont la solution est

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 123/86 \\ -65/86 \\ 95/172 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.430232557 \\ -0.7558139503 \\ 0.5523255766 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4.17 *Fonctions implicites, extrema libres*

On considère l'équation $x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin z = 0$.

1. Vérifier qu'elle définie une et une seule fonction $z = \varphi(x, y)$ au voisinage de $(0,0,0)$.
2. Montrer que le point $(0,0)$ est un point stationnaire pour $z = \varphi(x, y)$ et en établir sa nature.

Correction. Soit $g(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 2y^4 + z^2 + \sin z$. Elle est clairement de classe $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ et on a

$$\begin{aligned} &\partial_x g(x, y, z) = 2x, && \partial_y g(x, y, z) = 8y + 8y^3, && \partial_z g(x, y, z) = 2z + \cos z, \\ &\partial_x g(0,0,0) = 0, && \partial_y g(0,0,0) = 0, && \partial_z g(0,0,0) = 1. \end{aligned}$$

Comme $\partial_z g(0,0,0) \neq 0$ on peut conclure que l'équation $\partial_x g(x, y, z) = 0$ définie implicitement une et une seule fonction $z = \varphi(x, y)$ au voisinage de $(0,0)$ et $\varphi(0,0) = 0$. De plus

$$\begin{aligned} \partial_x \varphi(x, y) &= -\frac{\partial_x g(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z g(x, y, \varphi(x, y))} = \frac{-2x}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))}, && \partial_x \varphi(0,0) = 0, \\ \partial_y \varphi(x, y) &= -\frac{\partial_x g(x, y, \varphi(x, y))}{\partial_z g(x, y, \varphi(x, y))}, && \partial_y \varphi(0,0) = 0, \end{aligned}$$

donc $(0,0)$ est un point stationnaire pour $z = \varphi(x, y)$. Comme

$$\begin{aligned} \partial_{xx} \varphi(x, y) &= \frac{-2}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))} + 2x \frac{\varphi(x, y)(2 - \sin(\varphi(x, y)))}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2}, && \partial_{xx} \varphi(0,0) = -2, \\ \partial_{xy} \varphi(x, y) &= 2x \frac{2\partial_y \varphi(x, y) - \sin(\varphi(x, y))\partial_y \varphi(x, y)}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2}, && \partial_{xy} \varphi(0,0) = 0 \\ \partial_{yy} \varphi(x, y) &= \frac{-8(1 + 3y^2)}{2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y))} + \frac{8(y + y^3)\partial_y \varphi(x, y)(2 - \sin(\varphi(x, y)))}{(2\varphi(x, y) + \cos(\varphi(x, y)))^2} && \partial_{yy} \varphi(x, y) = -8. \end{aligned}$$

le déterminant de la matrice hessienne est 16 : le point $(0,0)$ est un point de maximum locale pour la fonction $z = \varphi(x, y)$.

Exercice 4.18

Étudier et classer les points stationnaires des fonctions suivantes

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$,
2. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$,
3. $f(x, y) = (x - 1)^2 + 2y^2$,
4. $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$,
5. $f(x, y) = x^3 y^2 (6 - x - y)$,
6. $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$,
7. $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$,
8. $f(x, y) = x^2 - \cos(y)$,

Correction.

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 2(x - y)^2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$; comme la restriction $f(x, 0) = x^4 - 2x^2$ tend vers $+\infty$ pour x qui tend vers $\pm\infty$, il n'y a pas de maximum global sur $\mathbb{R}^2$. Comme $\mathbb{R}^2$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x, y) = 0$. Comme

$$\partial_x f(x, y) = 4(x^3 - x + y), \qquad \partial_y f(x, y) = 4(y^3 + x - y),$$

les points critiques sont donc [1] $(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (on note que $f(x,y) = f(-x,-y)$). Pour en étudier la nature, calculons les dérivées secondes :

$$\partial_{xx} f(x,y) = 12x^2 - 4, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 4, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = 12x^2 - 4;$$

on en déduit que

(x_0, y_0)	$\partial_{xx} f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy} f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy} f(x_0, y_0)$	$D(x_0, y_0)$	
$(0,0)$	-4	4	-4	0	à étudier séparément,
$(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$	20	4	20	384	est un minimum,
$(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$	20	4	20	384	est un minimum.

Pour connaître la nature du point $(0,0)$ on étudie le signe de $d(h,k) = f(h,k) - f(0,0)$ pour h et k voisins de 0 :

$$d(h,k) = h^4 + k^4 - 2(h-k)^2;$$

comme $d(h,0) = (h^2-2)h^2 < 0$ lorsque h est voisin de 0 mais $d(h,h) = 2h^4 > 0$, alors $(0,0)$ est un point-selle.
Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x,y) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 - 8.$$

Comme $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, les points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minima globaux.

2. $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$ est définie sur $\mathbb{R}^3$ à valeur dans $\mathbb{R}$; comme la restriction $f(0,0,z) = -z$ tend vers $\pm\infty$ pour z qui tend vers $\mp\infty$, il n'y a pas d'extremum global sur $\mathbb{R}^3$. Comme $\mathbb{R}^3$ est ouvert, un extrémum relatif de f vérifie la condition nécessaire $\nabla f(x,y,z) = 0$. Comme

$$\partial_x f(x,y,z) = x + yz, \qquad \partial_y f(x,y,z) = xz + 1, \qquad f_z(x,y,z) = xy - 1,$$

il n'y a qu'un point critique : $(1,1,-1)$. Pour connaître sa nature on a deux possibilités :
 ▷ on étudie le signe de la différence $d(x,y,z) = f(x,y,z) - f(1,1,-1)$ pour x voisin de 1, y voisin de 1 et z voisins de -1 :

$$d(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y - \frac{1}{2} + 1 - 1 - 1 = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y - \frac{3}{2},$$

 mais ce n'est pas facile d'en étudier le signe ;
 ▷ on étudie le signe de $\Delta f(h,k,l) = f(1+h, 1+k, -1+l)$ pour h, k et l voisins de 0 (les termes de degré 1 en h, k et l doivent disparaître) :

$$\Delta f(h,k,l) = \frac{h^2+1+2h}{2} + (1+h)(1+k)(-1+l) - (-1+l) + (1+k) - \frac{3}{2} = \frac{h^2}{2} + hkl + hl - hk + kl.$$

 Il ne reste que transformer Δf si on pense qu'il s'agit d'un extrémum ou fournir des restrictions qui se contredisent si on pense que ce n'est pas un extrémum. Comme les deux restrictions à deux courbes continues passant par l'origine $\Delta f(h,0,h) = \frac{3}{2}h^2 > 0$ et $\Delta f(h,h,0) = -\frac{1}{2}h^2 < 0$ donnent des signes différents, on conclut que ce n'est pas un extrémum.

Remarquons qu'avec des transformations algébriques, on peut réécrire la fonction sous la forme

$$f(x,y) = (x^2-2)^2 + (y^2-2)^2 + 2(x+y)^2 - 8.$$

Comme $f(\sqrt{2}, -\sqrt{2}) = f(-\sqrt{2}, \sqrt{2}) = -8$, les points $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ et $(-\sqrt{2}, \sqrt{2})$ sont des minima globaux.

3. $f(x,y) = (x-1)^2 + 2y^2$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\partial_x f(x,y) = 2x - 2$, $\partial_y f(x,y) = 4y$. Comme $\nabla f(x,y) = 0$ ssi $(x,y) = (1,0)$, et

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 0, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = 4,$$

on en déduit que $D(1,0) = 8 > 0$: il s'agit d'un minimum.

4. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\partial_x f(x,y) = 2x + y - 2$, $\partial_y f(x,y) = x + 2y - 1$. Comme $\nabla f(x,y) = 0$ ssi $(x,y) = (1,0)$, et

$$\partial_{xx} f(x,y) = 2, \qquad \partial_{xy} f(x,y) = 1, \qquad \partial_{yy} f(x,y) = 2,$$

on en déduit que $D(1,0) = 3 > 0$: il s'agit d'un minimum.

1. $\begin{cases} 4x^3 - 4x + 4y = 0 \\ 4y^3 + 4x - 4y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x^3 + y^3 = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x = -y \\ (y^2-2)y = 0 \end{cases}$

5. $f(x,y)=x^3y^2(6-x-y)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}$ et $\partial_x f(x,y)=3x^2y^2(6-x-y)-x^3y^2$, $\partial_y f(x,y)=2x^3y(6-x-y)-x^3y^2$. Tous les points $(x,0)$ et $(0,y)$ sont des points critique ainsi que le point $(3,2)$. Comme
$$\partial_{xx}f(x,y)=6xy^2(6-x-y)-6x^2y^2,\qquad \partial_{xy}f(x,y)=6x^2y(6-x-y)-3x^2y^2-2x^3y,\qquad \partial_{yy}f(x,y)=2x^3(6-x-y)-4x^3y,$$
on en déduit que $D(3,2)>0$: il s'agit d'un maximum. En revanche, l'étude de la matrice hessienne ne permet pas de conclure pour les points sur les axes. Pour connaître la nature de ces points on étudie le signe de $d(h,k)=f(h,k)-f(0,0)$. Donc les points $(0,y)$ sont des selles, les points $(x,0)$ pour $x<0$ ou $x>6$ sont des maxima, les points $(x,0)$ pour $0<x<6$ sont des minima, le point $(6,0)$ est une selle.
6. $f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2)$ est définie sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $\partial_x f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2+2x)$, $\partial_y f(x,y)=e^{x-y}(-x^2+2y^2-4y)$. Les points critiques sont $(0,0)$ et $(-4,-2)$. Comme
$$\partial_{xx}f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2+4x+2),\qquad \partial_{xy}f(x,y)=e^{x-y}(-x^2+2y^2-2x-4y),\qquad \partial_{yy}f(x,y)=e^{x-y}(x^2-2y^2+8y-4);$$
on en déduit que

(x_0,y_0)	$\partial_{xx}f(x_0,y_0)$	$\partial_{xy}f(x_0,y_0)$	$\partial_{yy}f(x_0,y_0)$	$D(x_0,y_0)$	
$(-4,-2)$	$-6e^{-2}$	$8e^{-2}$	$-12e^{-2}$	$8e^{-4}$	maximum
$(0,0)$	2	0	-4	-8	selle

7. $f(x,y)=\frac{8}{x}+\frac{x}{y}+y$ est définie dans $\mathbb{R}^2\setminus\{\,(x,y)\mid xy=0\,\}$ ouvert et $\partial_x f(x,y)=\frac{x^2-8y}{x^2y}$, $\partial_y f(x,y)=\frac{y^2x}{y^2}$. Comme $\nabla f(x,y)=0$ ssi $(x,y)=(4,2)$, et
$$\partial_{xx}f(x,y)=\frac{16}{x^3},\qquad \partial_{xy}f(x,y)=-\frac{1}{y^2},\qquad \partial_{yy}f(x,y)=\frac{2x}{y^3},$$
on en déduit que $D(4,2)=\frac{13}{16}>0$: il s'agit d'un minimum.
8. $f(x,y)=x^2-\cos(y)$ est définie dans $\mathbb{R}^2$ et $\partial_x f(x,y)=2x$, $\partial_y f(x,y)=\sin y$. Les points critiques sont les points $(0,k\pi)$ avec $k\in\mathbb{Z}$. Pour étudier la nature de ces points, on calcule le déterminant de la matrice hessienne :
$$\partial_{xx}f=2,\qquad \partial_{xy}f=0,\qquad \partial_{yy}f=\cos(y),$$
donc $\Delta(0,k\pi)=2\cos(k\pi)=(-1)^k$: si k est impaire c'est un point-selle, si k est paire c'est un minimum.

Exercice 4.19

Étudier et classer les points stationnaires de la fonction $f(x,y)=(x^2+y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

Correction. Comme $\partial_x f(x,y)=2x(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ et $\partial_y f(x,y)=2y(1-x^2-y^2)e^{-(x^2+y^2)}$, les points critiques sont $(0,0)$ et les points (x,y) qui appartiennent au cercle $x^2+y^2=1$. Comme $f(x,y)\ge 0$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ et $f(x,y)=0$ ssi $(x,y)\neq(0,0)$ ou (x,y) est tel que $x^2+y^2-1=0$, on en déduit qu'ils sont des minima (le calcul des dérivées secondes porte à des calculs très longues).

Sinon, on peut remarquer que si on pose $w(r)=f(r\cos\vartheta,r\sin\vartheta)=r^2e^{-r^2}$, on obtient une fonction d'une seule variable et on a $w'(r)=2r(1-r^2)e^{-r^2}$ qui a un minimum pour $r=0$ et $r=1$.

Optimisation dans un fermé

Exercice 4.20

Quel point du cercle d'équation $x^2+y^2\le 1$ minimise la distance à la droite $y=4-\sqrt{3}x$?

Correction. En se rappelant la formule pour la distance d'un point (x, y) d'une droite d'équation $ax+by+c=0$, il s'agit de minimiser la fonction

$$f(x,y)=\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|\sqrt{3}x+y-4|}{2}$$

dans $\mathscr{D}=\left\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 1\right\}$. Comme $\sqrt{3}x+y-4<0$ pour tout point de $\mathscr{D}$, il s'agit alors de minimiser la fonction

$$d(x,y)=\frac{4-\sqrt{3}x-y}{2}.$$

Les extrema se trouvent soit dans $\mathring{\mathscr{D}}$ soit sur $\partial\mathscr{D}$. Comme $\nabla d(x,y)=(-\sqrt{3},-1)\neq(0,0)$, il n'y a pas d'extrema dans $\mathring{\mathscr{D}}$. Il faut alors les chercher sur $\partial\mathscr{D}$. Pour cela on exprime $\partial\mathscr{D}$ sous forme paramétrique $x=\cos\vartheta$ et $y=\sin\vartheta$ pour $\vartheta\in[0;2\pi]$. La restriction de d à cette courbe donne la fonction d'une seule variable

$$h(\vartheta)=d(x(\vartheta),y(\vartheta))=\frac{4-\sqrt{3}\cos\vartheta-\sin\vartheta}{2}.$$

Comme $h'(\vartheta)=\sin\left(\vartheta-\frac{\pi}{6}\right)$ on a que $h'(\vartheta)=0$ ssi $\vartheta=\frac{\pi}{6}$ ou $\vartheta=\frac{7\pi}{6}$. Il faut comparer la valeur de h en ces points avec la valeur en 0 et en 2π :

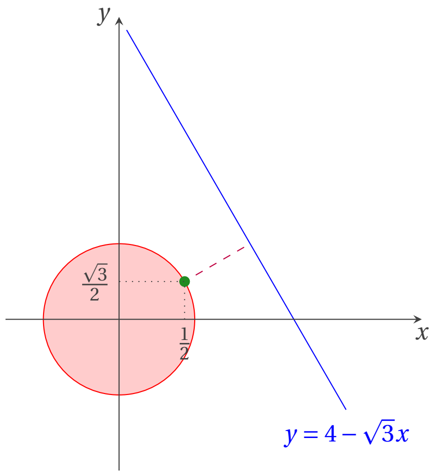
$$h(0)=h(2\pi)=\frac{4-\sqrt{3}}{2},\qquad h\left(\frac{\pi}{6}\right)=1,\qquad h\left(\frac{7\pi}{6}\right)=3.$$

On conclut que le point qui minimise la distance correspond à $\vartheta=\frac{\pi}{6}$, c'est-à-dire le point $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$.

Remarquons que, une fois établit que les extrema se trouvent sur la courbe d'équation $x^2+y^2=1$, cela revient à calculer le minimum de d sous la contrainte $g(x,y)=0$ avec $g(x,y)=x^2+y^2-1$. On peut alors utiliser la méthode des multiplicateurs de Lagrange : on introduit le lagrangien $L(x,y,\ell)=\frac{4-\sqrt{3}x-y}{2}-\ell(x^2+y^2-1)$, on calcul son gradient

$$\nabla L=\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2}-2\ell x\\ -\frac{1}{2}-2\ell y\\ 1-x^2-y^2\end{pmatrix},$$

comme $\nabla L(x,y,\ell)=(0,0,0)$ ssi $(x,y)=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ ou $(x,y)=(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, et comme $d(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})<d(-\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2})$, on conclut que $(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$ est le minimum.



Exercice 4.21

On cherche les extrema de la fonction $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(x,y)=x^2+2y^2$ dans le disque $x^2+y^2\le 1$.

Étude dans l'ouvert $x^2+y^2<1$: déterminer le point critique de f dans $x^2+y^2<1$ et en établir la nature.

Étude sur le bord $x^2+y^2=1$: déterminer les points critiques du lagrangien $\mathscr{L}(x,y,\lambda)\equiv f(x,y)-\lambda(x^2+y^2-1)$ et en établir la nature.

Quels sont les minimum et maximum absolus de f dans le disque $x^2+y^2\le 1$?

Correction. Le disque $x^2+y^2\le 1$ est un ensemble fermé borné et la fonction f est continue, pour le théorème de Weierstrass il existe un maximum et un minimum absolus de f dans le disque.

1. Étude de $f(x,y)=x^2+2y^2$ dans le disque $x^2+y^2<1$:

   Points critiques $\nabla f(x,y)=\binom{2x}{4y}$ et
$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x=0,\\4y=0,\end{cases}\iff (x,y)=(0,0)$$

   Nature des points critiques $D(x,y)=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2=2\times4-0^2=8$. Comme $D(0,0)>0$, le point $(0,0)$ est un minimum local.

2. Étude sur le bord $x^2+y^2=1$:

   Points critiques $\nabla\mathscr{L}(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}2x-2\lambda x\\4y-2\lambda y\\1-x^2-y^2\end{pmatrix}$ et
$$\nabla\mathscr{L}(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}2x-2\lambda x=0,\\4y-2\lambda y=0,\\x^2+y^2=1\end{cases}\iff (x,y,\lambda)\in\{(0,1,2),(0,-1,2),(1,0,1),(-1,0,1)\}$$

   Nature des points critiques $D(x,y,\lambda)=\partial_{xx}\mathscr{L}(x,y,\lambda)\partial_{yy}\mathscr{L}(x,y,\lambda)-(\partial_{xy}\mathscr{L}(x,y,\lambda))^2=2(1-\lambda)\times2(2-\lambda)-0^2=4(1-\lambda)(2-\lambda)$. Comme $D(0,1,2)=D(0,-1,2), D(1,0,1)=D(-1,0,1)=0$, on ne peut pas établir la nature de ces points critiques en utilisant le lagrangien.

Étant donné que $f(0,0)=0$, $f(0,1)=2$, $f(0,-1)=2$, $f(1,0)=1$ et $f(-1,0)=1$ on conclut que $(0,0)$ est le minimum absolu et $(0,\pm1)$ sont les maximums absolus de f dans le disque $x^2+y^2\le1$.

Exercice 4.22

Étudier et classer les points stationnaires des fonctions suivantes

1. $f(x,y)=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$,
2. $f(x,y)=x^2+y^2-x-y$ dans l'ensemble $\mathscr{D}=\{(x,y)\mid |x|\le1,|y|\le1\}$.

Correction.

1. $f(x,y)=xy\sqrt{1-x^2-y^2}$ est définie sur le disque $\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2\le1\right\}$ à valeur dans $\mathbb{R}$; les extrema peuvent être soit dans $\mathring{\mathscr{D}}$ soit sur le bord $\partial\mathscr{D}=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,x^2+y^2=1\right\}$.

   Cherchons d'abord les points critiques dans $\mathring{\mathscr{D}}$:
$$\nabla f(x,y)=\begin{pmatrix}\frac{y(1-2x^2-y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\\\frac{x(1-x^2-2y^2)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\end{pmatrix}$$
   et $\nabla f(x,y)=(0,0)$ ssi
$$(x,y)\ \in\ \left\{\ (0,0),\ (1/\sqrt3,1/\sqrt3),\ (1/\sqrt3,-1/\sqrt3),\ (-1/\sqrt3,1/\sqrt3),\ (-1/\sqrt3,-1/\sqrt3)\ \right\}.$$
   Étudions maintenant séparément chacun de ces points en calculant au préalable le déterminant de la matrice hessienne de la fonction f en un point quelconque :
$$\begin{aligned}\partial_{xx}f(x,y)&=\frac{-xy(3-2x^2-3y^2)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}},\\\partial_{xy}f(x,y)&=\frac{1-3x^2+3x^2y^2-3y^2+2x^4+2y^4}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}},\\\partial_{yy}f(x,y)&=\frac{-xy(3-3x^2-2y^2)}{\sqrt{(1-x^2-y^2)^3}},\\D(x,y)&=\partial_{xx}f(x,y)\partial_{yy}f(x,y)-(\partial_{xy}f(x,y))^2.\end{aligned}$$

On a alors

(x_0, y_0)	$\partial_{xx} f(x_0, y_0)$	$\partial_{xy} f(x_0, y_0)$	$\partial_{yy} f(x_0, y_0)$	$D(x_0, y_0)$	
$(0,0)$	0	1	0	-1	SELLE
$(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	MAX
$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	MIN
$(\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	MIN
$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$-\frac{4}{\sqrt{3}}$	4	MAX

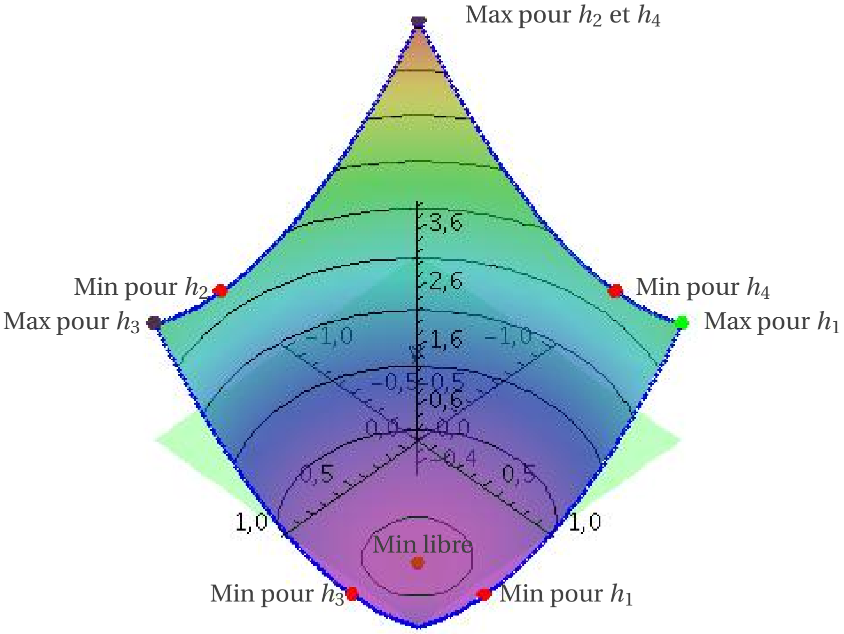
La fonction n'est pas dérivable sur $\partial\mathscr{D}$ mais on peut étudier la nature de ces points en observant que f est nulle sur les axes, positive dans le premier et le troisième quadrant, négative dans le deuxième et quatrième quadrant donc $(1,0)$, $(0,1)$, $(-1,0)$ et $(0,-1)$ sont des points de SELLE, les points $(x, \sqrt{1-x^2})$ avec $x>0$ et les points $(x, -\sqrt{1-x^2})$ avec $x<0$ sont des MIN, les points $(x, \sqrt{1-x^2})$ avec $x<0$ et les points $(x, -\sqrt{1-x^2})$ avec $x>0$ sont des MAX.

2. L'ensemble $\mathscr{D}$ un fermé borné et la fonction f est continue, pour le théorème de Weierstrass il existe un maximum et un minimum de f dans $\mathscr{D}$. On suit la «recette» pour le calcul de ces valeurs :
   - ▷ on cherche dans $\mathring{\mathscr{D}}$: les points critiques de f doivent annuler le gradient de f ; on a $\nabla f(x,y) = (2x-1, 2y-1) = (0,0)$ ssi $(x,y) = (1/2, 1/2)$ et $f(1/2,1/2) = -1/2$;
   - ▷ on cherche sur $\partial\mathscr{D}$: on doit considérer quatre segments
     - ▷ $S_1 = \left\{ (x,y) \mid x = 1, |y| \le 1 \right\}$: $h_1(y) = f|_{S_1} = y^2 - y$ pour $y \in [-1;1]$, $h_1'(y) = 2y - 1 = 0$ ssi $y = 1/2$ et $h_1(1/2) = -1/4$; de plus, $h_1(-1) = 2$ et $h_1(1) = 0$; donc le MAX de h_1 vaut 2 et le MIN vaut $-1/4$;
     - ▷ $S_2 = \left\{ (x,y) \mid x = -1, |y| \le 1 \right\}$: $h_2(y) = f|_{S_1} = 2 + y^2 - y$ pour $y \in [-1;1]$, $h_2'(y) = 2y - 1 = 0$ ssi $y = 1/2$ et $h_2(1/2) = 7/4$; de plus, $h_2(-1) = 4$ et $h_2(1) = 2$; donc le MAX de h_2 vaut 4 et le MIN vaut $7/4$;
     - ▷ $S_3 = \left\{ (x,y) \mid y = 1, |x| \le 1 \right\}$: $h_3(x) = f|_{S_3} = x^2 - x$ pour $x \in [-1;1]$, $h_3'(x) = 2x - 1 = 0$ ssi $x = 1/2$ et $h_3(1/2) = -1/4$; de plus, $h_3(-1) = 2$ et $h_3(1) = 0$; donc le MAX de h_3 vaut 2 et le MIN vaut $-1/4$;
     - ▷ $S_4 = \left\{ (x,y) \mid y = -1, |x| \le 1 \right\}$: $h_4(y) = f|_{S_4} = 2 + x^2 - x$ pour $x \in [-1;1]$, $h_4'(y) = 2x - 1 = 0$ ssi $x = 1/2$ et $h_2(1/2) = 7/4$; de plus, $h_4(-1) = 4$ et $h_4(1) = 2$; donc le MAX de h_4 vaut 4 et le MIN vaut $7/4$.

   En résumé, les candidats sont :

(x_0, y_0)	$(1/2, 1/2)$	$(1,-1)$	$(-1,1)$	$(1, 1/2)$	$(1/2, 1)$	$(-1, 1/2)$	$(1/2, -1)$	$(-1,-1)$
$f(x_0, y_0)$	$-1/2$	2	2	$-1/4$	$-1/4$	$7/4$	$7/4$	4

   On conclut que le MAX absolu est 4 obtenu en $(-1,-1)$ et le MIN absolu est $-1/2$ obtenu en $(1/2, 1/2)$.



Optimisation sous contraintes

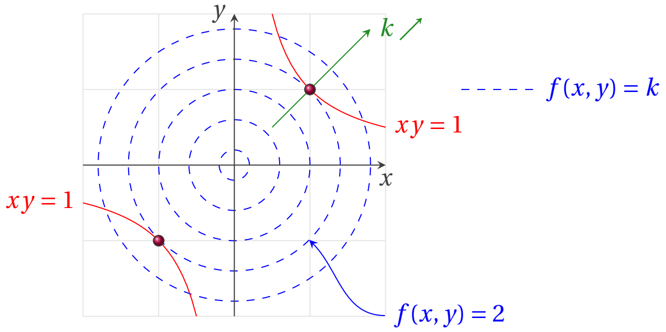
Exercice 4.23

Utiliser la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE pour calculer le maximum et le minimum de la fonction f sous la (les) contrainte(s) indiquée(s) :

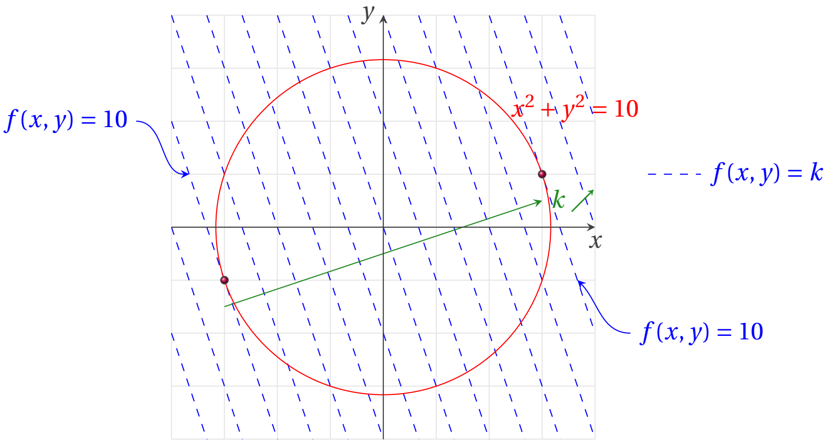
1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ sous la contrainte $xy = 1$
2. $f(x,y) = 3x + y$ sous la contrainte $x^2 + y^2 = 10$
3. $f(x,y) = y^2 - x^2$ sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$
4. $f(x,y) = e^{xy}$ sous la contrainte $x^3 + y^3 = 16$
5. $f(x,y,z) = 2x + 2y + z$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 = 9$
6. $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$ sous la contrainte $x + y + z = 12$
7. $f(x,y,z,t) = x + y + z + t$ sous la contrainte $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1$
8. $f(x_1,x_2,\dots,x_n) = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ sous la contrainte $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = c$
9. $f(x,y,z) = x + 2y$ sous les contraintes $x + y + z = 1$ et $y^2 + z^2 = 4$
10. $f(x,y,z) = 3x - y - 3z$ sous les contraintes $x + y - z = 0$ et $x^2 + 2z^2 = 1$

CORRECTION.

1. Formons le lagrangien
$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 - \lambda(xy - 1)$$
où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) tels que
$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 2x - \lambda y \\ 2y - \lambda x \\ 1 - xy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y,\lambda) \in \{\,(1,1,2), (-1,-1,2)\,\}$$
Donc $(1,1)$ et $(-1,-1)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $xy = 1$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et comme $\Delta(1,1,2) = \Delta(-1,-1,2) = 0$, rien dans le théorème ne permet de savoir s'il s'agit de maxima, minima ou ni l'un ni l'autre. En observant les courbes de niveau ci-dessous on conclut qu'il s'agit de minima.



2. Formons le lagrangien
$$L(x,y,\lambda) = 3x + y - \lambda(x^2 + y^2 - 10)$$
où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) tels que
$$\nabla L = \mathbf{0} \iff \begin{pmatrix} 3 - 2\lambda x \\ 1 - 2\lambda y \\ 10 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff (x,y,\lambda) \in \{\,(3,1,1/2), (-3,-1,-1/2)\,\}$$
Donc $(3,1)$ et $(-3,-1)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $x^2+y^2 = 10$. Comme $\Delta(3,1,1/2) = 1 > 0$ et $\partial_{xx}L(3,1,1/2) = -1 < 0$, le point $(3,1)$ est un maximum ; puisque $\Delta(-3,-1,-1/2) = 1 > 0$ et $\partial_{xx}L(-3,-1,-1/2) = 1 > 0$, le point $(-3,-1)$ est un minimum.



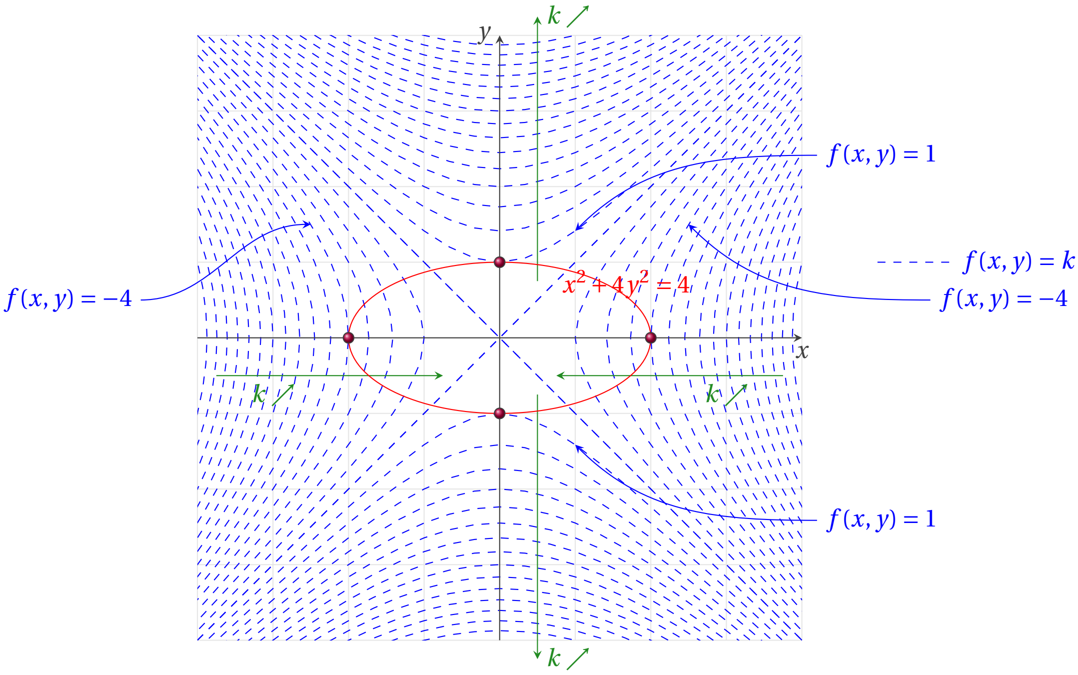
3. Formons le lagrangien

$$L(x,y,\lambda)=y^2-x^2-\lambda\left(\frac{1}{4}x^2+y^2-1\right)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) tels que

$$\nabla L=\mathbf{0}\qquad\iff\qquad\begin{pmatrix}-2x-\lambda x/2\\ 2y-2\lambda y\\ 1-\frac{1}{4}x^2-y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\iff\qquad(x,y,\lambda)\in\{(0,1,1),(0,-1,1),(2,0,-4),(-2,0,-4)\}$$

Donc $(0,1)$, $(0,-1)$, $(2,0)$ et $(-2,0)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et comme $\Delta(x,y,\lambda)=-(4+\lambda)(1-\lambda)$, alors $\Delta(0,1,1)=\Delta(0,-1,1)=\Delta(2,0,-4)=\Delta(-2,0,-4)=0$, rien dans le théorème ne permet de connaître leur nature. En observant les courbes de niveau ci-dessous on conclut que les points $(0,1)$ et $(0,-1)$ sont des maxima et les points $(2,0)$ et $(-2,0)$ sont des minima.



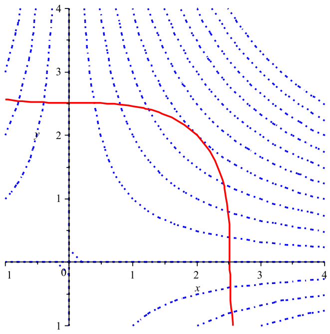
4. Formons le lagrangien

$$L(x,y,\lambda)=e^{xy}-\lambda\left(x^3+y^3-16\right)$$

où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les triplets (x,y,λ) tels que

$$\nabla L=\mathbf{0}\qquad\iff\qquad\begin{pmatrix}ye^{xy}-3\lambda x^2\\ xe^{xy}-3\lambda y^2\\ 16-x^3-y^3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\qquad\iff\qquad(x,y,\lambda)=(2,2,e^4/6)$$

Donc $(2,2)$ est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte $x^3+y^3=16$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et comme $\Delta(2,2,e^4/6)<0$, on ne peut pas conclure sur la nature du point critique. Cependant, on analysant les courbes de niveau, on voit qu'il s'agit d'un maximum.



5. Formons le lagrangien
$$L(x,y,z,\lambda)=2x+2y+z-\lambda\left(x^2+y^2+z^2-9\right)$$
où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x,y,z,λ) tels que
$$\nabla L=\mathbf{0}\quad\iff\quad\begin{pmatrix}2-2\lambda x\\2-2\lambda y\\1-2\lambda z\\16-x^2-y^2-z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\iff\quad(x,y,z,\lambda)\in\{(2,2,1,1/2),(-2,-2,-1,-1/2)\}$$
Donc $(2,2,1)$ et $(-2,-2,-1)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $x^2+y^2+z^2=9$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature. Cependant, comme $f(2,2,1)=9$ et $f(-2,-2,-1)=-9$, le premier est un maximum tandis que le dernier un minimum.
6. Formons le lagrangien
$$L(x,y,z,\lambda)=x^2+y^2+z^2-\lambda\left(x+y+z-12\right)$$
où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x,y,z,λ) tels que
$$\nabla L=\mathbf{0}\quad\iff\quad\begin{pmatrix}2x-\lambda\\2y-\lambda\\2z-\lambda\\12-x-y-z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\iff\quad(x,y,z,\lambda)=(4,4,4,2).$$
Donc $(4,4,4)$ est un *point critique* de la fonction f sous la contrainte $x+y+z=12$. Observons que ce point a été obtenu par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur sa nature. Pour cela, on peut expliciter une variable de la contrainte et étudier l'optimisation libre de la fonction de deux variables ainsi obtenue. Par exemple, on pose $z=12-x-y$ et on obtient la fonction $h(x,y)=f(x,y,z=12-x-y)=x^2+y^2+(12-x-y)^2=2(x^2+y^2+xy-12x-12y+72)$. On a
$$\nabla h=\mathbf{0}\quad\iff\quad\begin{pmatrix}4x+2y-24\\4y+2x-24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\iff\quad(x,y)=(4,4).$$
De plus,
$$H_h(x,y)=\begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\qquad\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$$
donc $\Delta(4,4)>0$ et $\partial_{xx}h(4,4)=2>0$: le point $(4,4)$ est un minimum pour h donc le point $(4,4,12-4-4=4)$ est un minimum de f sous la contrainte $x+y+z=12$.
7. Formons le lagrangien
$$L(x,y,z,\lambda)=x+y+z+t-\lambda\left(x^2+y^2+z^2+t^2-1\right)$$
où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x,y,z,t,λ) tels que
$$\nabla L=\mathbf{0}\quad\iff\quad\begin{pmatrix}1-2\lambda x\\1-2\lambda y\\1-2\lambda z\\1-2\lambda t\\1-x^2-y^2-z^2-t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\iff\quad(x,y,z,t,\lambda)\in\{(1/2,1/2,1/2,1/2,1),(-1/2,-1/2,-1/2,-1/2,-1)\}.$$

Donc $(1/2,1/2,1/2,1/2)$ et $(-1/2,-1/2,-1/2,-1/2)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $x^2+y^2+z^2+t^2=1$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature.

8. Formons le lagrangien
$$L(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda)=\sum_{i=1}^n x_i-\lambda(\sum_{i=1}^n x_i^2-c)$$
où λ (multiplicateur de LAGRANGE) est une inconnue. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points $(x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda)$ tels que
$$\nabla L=\mathbf{0}\quad\iff\quad\begin{pmatrix}1-2\lambda x_1\\1-2\lambda x_2\\ \vdots\\1-2\lambda x_n\\c-\left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\0\end{pmatrix}\quad\iff\quad (x_1,x_2,\dots,x_n,\lambda)\in\{(c/n,c/n,\dots,c/n,1),(-c/n,-c/n,\dots,-c/n,-1)\}.$$
Donc $(c/n,c/n,\dots,c/n)$ et $(-c/n,-c/n,\dots,-c/n)$ sont des *points critiques* de la fonction f sous la contrainte $\sum_{i=1}^n x_i^2=c$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature.

9. Formons le lagrangien
$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=x+2y-\lambda\left(x+y+z-1\right)-\mu\left(y^2+z^2-4\right)$$
où λ et μ (multiplicateurs de LAGRANGE) sont des inconnues. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x,y,z,λ,μ) tels que
$$\nabla L=\mathbf{0}\quad\iff\quad\begin{pmatrix}1-\lambda\\2-\lambda-2\mu y\\-\lambda-2\mu z\\1-x-y-z\\4-y^2-z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\iff\quad (x,y,z,\lambda,\mu)\in\left\{(1,\sqrt{2},-\sqrt{2},1,1/\sqrt{8}),(1,-\sqrt{2},\sqrt{2},1,-1/\sqrt{8})\right\}.$$
Donc $(1,\sqrt{2},-\sqrt{2})$ et $(1,-\sqrt{2},\sqrt{2})$ sont des *points critiques* de la fonction f sous les contraintes $x+y+z=1$ et $y^2+z^2=4$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature.

10. Formons le lagrangien
$$L(x,y,z,\lambda,\mu)=3x-y-3z-\lambda\left(x+y-z\right)-\mu\left(x^2+2z^2-1\right)$$
où λ et μ (multiplicateurs de LAGRANGE) sont des inconnues. Pour que cette fonction ait un extremum il faut que le gradient de L soit nul, autrement dit on cherche les points (x,y,z,λ,μ) tels que
$$\nabla L=\mathbf{0}\quad\iff\quad\begin{pmatrix}3-\lambda-2\mu x\\-1-\lambda\\-3+\lambda-2\mu z\\-x-y+z\\1-x^2-2z^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad\iff\quad (x,y,z,\lambda,\mu)\in\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-1,-\frac{2}{\sqrt{3}}\right),\left(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},-1,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right\}.$$
Donc $(-1/\sqrt{3},2/\sqrt{3},1/\sqrt{3})$ et $(1/\sqrt{3},-2/\sqrt{3},-1/\sqrt{3})$ sont des *points critiques* de la fonction f sous les contraintes $x+y=z$ et $x^2+2z^2=1$. Observons que ces points ont été obtenus par une condition nécessaire et on ne peut pas conclure sur leur nature.

Exercice 4.24

Étudier et classer les points stationnaires des fonctions suivantes

1. $f(x,y)=xy$ dans $\mathbb{R}^2$ sous la contrainte $x^2+y^2=1$,
2. $f(x,y)=x^2+y^2+2$ dans $\mathbb{R}^2$ sous la contrainte $x^2-2xy+y^2=0$,
3. $f(x,y)=(x-y)\ln(4+x-y)$ sous la contrainte $x^2+y^2=1$.

CORRECTION.

1. On a $\nabla g(x,y)=(2x,2y)^T=(0,0)$ si et seulement si $(x,y)=(0,0)$ mais $(0,0)$ ne vérifie pas la contrainte donc on peut appliquer la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. On introduit le lagrangien $L(x,y,\lambda)=xy-\lambda(x^2+y^2-1)$ et on cherche ses points critiques :
$$\nabla L(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}y-2\lambda x\\ x-2\lambda y\\ 1-x^2-y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff (x,y,\lambda)\in\left\{\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\frac12\right),\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},\frac12\right),\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},-\frac12\right),\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},-\frac12\right)\right\}.$$
Soit
$$\Delta(x,y,\lambda)\equiv\partial_{xx}L(x,y,\lambda)\partial_{yy}L(x,y,\lambda)-(\partial_{xx}L(x,y,\lambda))^2=4\lambda^2-1.$$
Alors
   - ▷ $\Delta\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},\frac12\right)>0$ donc le point $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ est un maximum et $f\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac12$;
   - ▷ $\Delta\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},\frac12\right)>0$ donc le point $(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ est un maximum et $f\left(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=\frac12$;
   - ▷ $\Delta\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2},-\frac12\right)<0$ donc le point $(x,y)=\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$ est un minimum et $f\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)=-\frac12$;
   - ▷ $\Delta\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},-\frac12\right)<0$ donc le point $(x,y)=\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$ est un minimum et $f\left(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)=-\frac12$.
2. On cherche les possibles extrema par la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE. Si on note $g(x,y)=x^2-2xy+y^2$ la contrainte, on a $\partial_x g(x,y)=2x-2y$ et $\partial_y g(x,y)=-2x+2y$ donc le point $(0,0)$ est une singularité de la contrainte. Cherchons maintenant les points stationnaires du lagrangien :
$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+2-\lambda(x^2-2xy+y^2).$$
On a
$$L_x(x,y,\lambda)=2x-\lambda(2x-2y),\quad L_y(x,y,\lambda)=2y-\lambda(-2x+2y),\quad L_\lambda(x,y,\lambda)=-(x^2-2xy+y^2),$$
donc le gradient de L s'annule seulement en $(0,0)$ et $f(0,0)=2$. Comme $f(x,y)\ge 2$ en tout point, il s'agit d'un minimum. En revanche il n'y a pas de maximum (ceci ne contredit pas le théorème de Weierstrass car la contrainte $g(x,y)=(x-y)^2=0$, i.e. la droite $y=x$ n'est pas un ensemble borné). En effet, $f(x,y)|_{g(x,y)=0}=f(x,x)=2x^2+2\xrightarrow[x\to+\infty]{}+\infty$.
3. $f(x,y)=(x-y)\ln(4+x-y)$ dans $\mathbb{R}^2$ sous la contrainte $x^2+y^2=1$,
Remarquons tout d'abord que la fonction n'est définie que si $y<x+4$, ce qui est toujours vérifié si on réalise la contrainte. Comme la contrainte $g(x,y)=x^2+y^2-1$ a gradient $\nabla g(x,y)=(2x,2y)$ qui ne s'annule pas lorsque $g(x,y)=0$, on peut utiliser la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE : on défini le lagrangien $L(x,y,\ell)=(x-y)\ln(4+x-y)-\ell(1-x^2-y^2)$ et on cherche les points stationnaires pour L, comme
$$\nabla L(x,y,\ell)=\begin{pmatrix}\ln(4+x-y)+\frac{x-y}{4+x-y}-2\ell x\\ -\ln(4+x-y)-\frac{x-y}{4+x-y}-2\ell y\\ x^2+y^2-1\end{pmatrix}$$
et $\nabla L(x,y,\ell)=(0,0,0)$ ssi $(x,y)=(1/\sqrt2,-1/\sqrt2)$ ou $(x,y)=(-1/\sqrt2,1/\sqrt2)$. Comme $f(1/\sqrt2,-1/\sqrt2)=2/\sqrt2\ln(4+2/\sqrt2)$ et $f(-1/\sqrt2,1/\sqrt2)=-2/\sqrt2\ln(4-2/\sqrt2)$, on conclut que $(x,y)=(1/\sqrt2,-1/\sqrt2)$ est un maximum lié et $(x,y)=(-1/\sqrt2,1/\sqrt2)$ un minimum lié.

Exercice 4.25

Une firme produit des appareils dans deux usines différentes. Les coûts totaux de production pour les deux usines sont respectivement :
$$C_1(q)=200+6q+0.03q^2,\qquad\qquad C_2(q)=150+10q+0.02q^2,$$
où q représente le nombre d'appareils produits dans l'usine. La firme s'est engagée à livrer 100 appareils à une entreprise. Les frais de transport par appareil sont de 4 euros pour les livraisons à partir de la première usine et de 2 euros pour les livraisons à partir de la seconde usine. Les frais de transport sont supportés par la firme productive. Calculer le nombre d'appareils que doit produire la firme dans chaque usine afin de minimiser le coût total de production compris le coût de transport.

CORRECTION. Deux méthodes possibles :

Méthode de Lagrange : soit q_i le nombre d'appareils produits dans l'usine i.

- ▷ Contrainte :
$$q_1+q_2=100$$
- ▷ Coût totale :
$$C(q_1,q_2)=C_1(q_1)+4q_1+C_2(q_2)+2q_2=0.03q_1^2+0.02q_2^2+10q_1+12q_2+350.$$
- ▷ Lagrangien :
$$L(q_1,q_2,\ell)=C(q_1,q_2)-\ell(100-q_1-q_2)=0.03q_1^2+0.02q_2^2+10q_1+12q_2+350-\ell(100-q_1-q_2).$$
- ▷ Gradient du lagrangien :
$$\nabla L(q_1,q_2,\ell)=\begin{pmatrix}0.06q_1+10+\ell\\0.04q_2+12+\ell\\q_1+q_2-100\end{pmatrix}$$
- ▷ Points critiques du lagrangien :
$$\nabla L(q_1,q_2,\ell)=(0,0,0)\qquad\iff\qquad(q_1,q_2,\ell)=(60,40,13.6).$$
- ▷ Nature du point critique :
$$\partial_{q_1q_1}L(60,40,13.6)=0.06>0,\qquad\partial_{q_2q_2}L(60,40,13.6)=0.04>0,\qquad\partial_{q_1q_2}L(60,40,13.6)=0,$$
et $(\partial_{q_1q_1}L\partial_{q_2q_2}L-\partial_{q_1q_2}L^2)(60,40,13.6)=0.0024>0$: il s'agit d'un minimum.

Méthode de réduction : soit q_i le nombre d'appareils produits dans l'usine i.

- ▷ Contrainte :
$$q_1+q_2=100\implies q_2=100-q_1.$$
- ▷ Coût total :
$$\tilde{C}(q_1)=C(q_1,q_2(q_1))=C_1(q_1)+4q_1+C_2(q_2(q_1))+2q_2(q_1)=0.03q_1^2+0.02(q_2(q_1))^2+10q_1+12q_2(q_1)+350=$$
$$0.03q_1^2+0.02(100-q_1)^2+10q_1+12(100-q_1)+350=$$
$$0.03q_1^2+0.02(10000-400q_1+q_1^2)+10q_1+1200-12q_1+350=0.05q_1^2-6q_1+1050.$$
- ▷ Dérivée du coût total :
$$\tilde{C}'(q_1)=0.1q_1-6$$
- ▷ Points critiques du coût total :
$$\tilde{C}'(q_1)=0\qquad\iff\qquad q_1=60.$$
- ▷ Nature du point critique :
$$\tilde{C}''(180)=0.1>0,$$
donc il s'agit d'un minimum.

Par conséquent, quand la firme livre 60 appareils de sa première usine et $100-q_1=40$ appareils de sa deuxième, le coût total est minimal sous la contrainte d'une livraison de 100 appareils.

Exercice 4.26

Une entreprise fabrique deux modèles de vélos de montagne : le modèle X est plus abordable et se vend 500€ l'unité, tandis que le modèle Y se vend 1000€ l'unité. Les coûts totaux de fabrication (en €) sont exprimés par la fonction $c(x,y)=5x^2+5y^2-\frac{5}{2}xy+10000$ où x est le nombre de vélos du modèle X et y est le nombre de vélos du modèle Y, produits mensuellement. On suppose que chaque vélo produit peut être vendu sur le marché.

1. Écrire $(x,y)\mapsto p$ la fonction des profits totaux mensuels.
2. La capacité de production de l'entreprise est de 150 vélos par mois. En supposant que l'entreprise désire utiliser à pleine capacité son usine, trouver la répartition de la production mensuelle permettant de maximiser les profits (on utilisera la méthode que l'on préfère). Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du profit mensuel.
3. Le patron de l'entreprise s'interroge sur la pertinence de vouloir produire à pleine capacité. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en

trouvant la solution qui maximise les profits sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu et donnez la valeur du profit mensuel. La solution obtenue est-elle réalisable pour l'entreprise ?

CORRECTION.

1. La fonction des profits totaux mensuels est $p(x,y) = 500x + 1000y - c(x,y) = 500x + 1000y - 5x^2 - 5y^2 + \frac{5}{2}xy - 10000$.
2. On veut produire de 150 vélos par mois ce qui donne la contrainte $x + y = 150$. Il s'agit alors de résoudre le problème

$$\text{maximiser } p(x,y) \text{ sous la contrainte } x+y=150.$$

Pour cela, on peut utiliser l'une de deux méthodes suivantes :

Méthode 1 On maximise $\tilde{p}(x) = p(x,150-x) = -5x^2-5(150-x)^2+500x+1000(150-x)+\frac{5}{2}x(150-x)-10000 = -\frac{25}{2}x^2+1375x+47500$.

Points critiques $\tilde{p}'(x) = -25x+1375$, $\tilde{p}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 55$.

Classification $\tilde{p}''(x) = -25$, $\tilde{p}''(55) < 0$.

Conclusion $x = 55$ est un maximum de $\tilde{p}$ donc $(x,y) = (55,95)$ est un maximum de p sous la contrainte $x+y = 155$ avec $p(55,95) = 65312,50$€

Méthode 2 On maximise le lagrangien $L(x,y,\lambda) = p(x,y) - \lambda(x+y-150) = 500x+1000y-c(x,y) = 500x+1000y-5x^2-5y^2+\frac{5}{2}xy-10000-\lambda(x+y-150)$.

Points critiques $\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix} 500-10x+\frac{5}{2}y-\lambda \\ 1000-10y+\frac{5}{2}x-\lambda \\ 150-x-y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ si et seulement si $(x,y,\lambda) = (55,95,\frac{375}{2})$.

Classification Soit $D(x,y,\lambda) \equiv \partial_{xx}L(x,y,\lambda)\partial_{yy}L(x,y,\lambda)-(\partial_{xy}L(x,y,\lambda))^2 = (-10)\times(-10)-(5/2)^2$. On a $D(55,95,\frac{375}{2}) > 0$, $\partial_{xx}L(55,95,\frac{375}{2}) < 0$ et $\partial_{yy}L(55,95,\frac{375}{2}) < 0$.

Conclusion $(x,y) = (55,95)$ est un maximum de p sous la contrainte $x+y=155$ avec $p(55,95) = 65312,50$€

3. On maximise le profit $p(x,y)$ sans contraintes.

Points critiques $\nabla p(x,y) = \begin{pmatrix} 500-10x+\frac{5}{2}y \\ 1000-10y+\frac{5}{2}x \end{pmatrix}$, $\nabla p(x,y) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$ si et seulement si $(x,y) = (80,120)$.

Classification $D(x,y) = \partial_{xx}p(x,y)\partial_{yy}p(x,y) - (\partial_{xy}p(x,y))^2 = (-10)\times(-10)-(5/2)^2$, $D(80,120) > 0$ et $\partial_{xx}p(80,120) < 0$.

Conclusion $(x,y) = (80,120)$ est un maximum de p avec $p(80,120) = 70000$€

La solution obtenue n'est pas réalisable pour l'entreprise car elle dépasse la capacité de 150 vélos.

Exercice 4.27

Au ministère de l'agriculture, on a établi que le profit annuel (en €) pour les fermes cultivant des germes de soja et des pistaches est exprimé par la fonction

$$p(x,y) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy$$

où x représente le nombre d'acres plantés en germes de soja et y le nombre d'acres planté en pistaches.

1. Un fermier possède une terre de 500 acres. En supposant qu'il désire utiliser à pleine capacité ses terres, trouver la répartition de la production permettant de maximiser son profit. Prouver qu'il s'agit bien d'un maximum absolu.
2. Le fermier s'interroge sur la pertinence de vouloir cultiver à pleine capacité ses terres. Il se demande si la solution qu'il obtiendrait sans cette contrainte serait plus intéressante. Aidez-le à répondre à cette question en trouvant la solution qui maximise le profit sans cette contrainte. Prouvez qu'il s'agit bien d'un maximum absolu. La solution obtenue est-elle réalisable ?
3. En exploitant les résultats obtenus aux point précédent, suggériez-vous au fermier de diminuer la surface totale consacrée à ces deux cultures ou d'utiliser à pleine capacité ses terres ?

CORRECTION.

1. On veut cultiver 500 acres ce qui donne la contrainte $x+y = 500$. Il s'agit alors de résoudre le problème

$$\text{maximiser } p(x,y) \text{ sous la contrainte } x+y=500.$$

Pour cela, on peut utiliser l'une des deux méthodes suivantes :

Méthode 1 On maximise $\tilde{p}(x) = p(x,500-x) = 600x+800(500-x)-x^2-2(500-x)^2-2x(500-x) = 800x-100000-x^2$.

Points critiques $\tilde{p}'(x) = 800-2x$, $\tilde{p}'(x) = 0$ si et seulement si $x = 400$.

Classification $\tilde{p}''(x) = -2$, $\tilde{p}''(400) < 0$.

Conclusion $x = 400$ est un maximum de $\tilde{p}$ donc $(x, y) = (400, 100)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 500$.

Méthode 2 On maximise le lagrangien $L(x, y, \lambda) = p(x, y) - \lambda(x + y - 500) = 600x + 800y - x^2 - 2y^2 - 2xy - \lambda(x + y - 500)$.

Points critiques $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 600 - 2x - 2y - \lambda \\ 800 - 4y - 2x - \lambda \\ 500 - x - y \end{pmatrix}$, $\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y, \lambda) = (400, 100, -400)$.

Classification Soit $D(x, y, \lambda) \equiv \partial_{xx} L(x, y, \lambda)\partial_{yy} L(x, y, \lambda) - (\partial_{xy} L(x, y, \lambda))^2 = (-10) \times (-10) - (5/2)^2$. On a $D(400, 100, -400) > 0$, $\partial_{xx} L(400, 100, -400) < 0$ et $\partial_{yy} L(400, 100, -400) < 0$.

Conclusion $(x, y) = (400, 100)$ est un maximum de p sous la contrainte $x + y = 500$ avec $p(400, 100) = 60000$€

2. On maximise le profit $p(x, y)$ sans contraintes.

   Points critiques $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 600 - 2x - 2y \\ 800 - 4y - 2x \end{pmatrix}$, $\nabla p(x, y) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si $(x, y) = (200, 100)$.

   Classification $D(x, y) = \partial_{xx} p(x, y)\partial_{yy} p(x, y) - (\partial_{xy} p(x, y))^2 = (-2) \times (-4) - (-2)^2$, $D(200, 100) > 0$ et $\partial_{xx} p(200, 100) < 0$.

   Conclusion $(x, y) = (200, 100)$ est un maximum de p. La solution obtenue est réalisable pour le fermier car elle ne dépasse pas les 500 acres.

3. Comme $p(400, 100) = 60000$€ $< p(200, 100) = 100000$€, il est plus rentable pour le fermier de diminuer la surface totale consacrée à ces deux cultures plutôt que d'utiliser à pleine capacité ses terres.

Exercice 4.28

Trouver le rectangle de surface s maximale parmi ceux qui ont périmètre $p > 0$ fixé.

Correction. Appelons $x > 0$ et $y > 0$ respectivement la base et la hauteur d'un rectangle quelconque. Le périmètre est la fonction $2x + 2y$ tandis que la surface est la fonction $s(x, y) = xy$. Il s'agit de trouver le maximum $s(x, y)$ sous la contrainte $g(x, y) = 2x + 2y - p = 0$.

Première méthode Soit $L(x, y, \lambda) = s(x, y) - \lambda g(x, y)$. En appliquant la condition nécessaire des multiplicateurs de Lagrange, on doit calculer les triplets (x, y, λ) solutions du système

$$\nabla L(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} y = 2\lambda, \\ x = 2\lambda, \\ 2x + 2y = p, \end{cases} \implies (x, y, \lambda) = (p/4, p/4, p/4).$$

L'unique extrémum de s sous la contrainte g est le point $(p/4, p/4)$ et $s(p/4, p/4) = p^2/16$. Comme $\Delta(p/4, p/4, p/4) < 0$, on ne peut pas établir la nature du point critique.

Seconde méthode Dans ce cas on peut écrire directement la restriction de s sur la contrainte et on obtient

$$h(x) = f(x, p/2 - x) = x(p/2 - x).$$

Pour maximiser cette restriction on calcul sa dérivée première :

$$h'(x) = p/2 - 2x = 0 \text{ ssi } x = p/4, \qquad h'(x) => 0 \text{ ssi } x < p/4, \qquad h'(x) =< 0 \text{ ssi } x > p/4.$$

Le point $(p/4, p/4)$ est bien un maximum.

Exercice 4.29

Trouver le rectangle de périmètre minimale parmi ceux qui ont surface fixée.

Correction. Appelons $x > 0$ et $y > 0$ respectivement la base et la hauteur d'un rectangle quelconque. Le périmètre est la fonction $2x+2y$ tandis que la surface est la fonction $s(x,y) = xy$. Il s'agit de minimiser la fonction $p\colon (\mathbb{R}_*^+)^2 \to \mathbb{R}_*^+$ définie par $p(x,y) = 2(x+y)$ sous la contrainte $s(x,y) = 0$ où $s\colon (\mathbb{R}_*^+)^2 \to \mathbb{R}_*^+$ est définie par $s(x,y) = xy - K$ avec $K > 0$ une constante.

Première méthode Soit $L(x,y,\lambda) = p(x,y) - \lambda s(x,y)$. En introduisant le système de Lagrange, il s'agit de chercher les solutions $(x,y,\lambda) \in (\mathbb{R}_*^+)^2 \times \mathbb{R}$ de

$$\nabla L(x,y,\lambda) = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \implies \begin{cases} 2-\lambda y = 0,\\ 2-\lambda x = 0,\\ K - xy = 0, \end{cases} \implies (x,y,\lambda) = \left(\sqrt{K}, \sqrt{K}, \frac{2}{\sqrt{K}}\right).$$

On obtient que le seul point critique est $(\sqrt{K},\sqrt{K})$ et $p(\sqrt{K},\sqrt{K}) = 4\sqrt{K}$. Comme $\Delta(\sqrt{K},\sqrt{K},\frac{2}{\sqrt{K}}) = -\frac{4}{\sqrt{K}} < 0$, on ne peut pas établir la nature du point critique.

Seconde méthode La contrainte se réécrit $y = \frac{K}{x}$ donc il s'agit de chercher les extremum de la fonction réelle de variable réelle $h\colon (\mathbb{R}_+^*) \to \mathbb{R}^+$ définie par

$$h(x) = f\left(x, \frac{K}{x}\right) = 2\left(x + \frac{K}{x}\right).$$

Cherchons d'abord les points critiques :

$$h'(x) = 2 - 2\frac{K}{x^2}$$

et $h'(x) = 0$ ssi $x = \sqrt{K}$. Comme $h''(x) = 4\frac{K}{x^3} > 0$, il s'agit d'un minimum.

Exercice 4.30

Trouver les dimensions d'une boîte rectangulaire *ouverte* de surface 12 de volume maximale.

Correction. Notons x, y et z les dimensions de la boîte. Il s'agit de maximiser la fonction $f(x,y,z) = xyz$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 2xz + 2yz + xy = 12$ avec $x,y,z > 0$ (la face manquante a cotés x et y).

1. En utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange, on cherche les solutions du système [2]

$$\begin{cases} yz = \lambda(2z+y),\\ xz = \lambda(2z+x),\\ xy = \lambda(2x+2y),\\ 2xz+2yz+xy = 12. \end{cases}$$

L'unique solution est le point $(x,y,z,\lambda) = (2,2,1,1/2)$ et $f(2,2,1) = 4$.

2. La contrainte se réécrit $z(x,y) = \frac{12-xy}{2(x+y)}$; il s'agit alors de maximiser la fonction $h\colon (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par $h(x,y) = xy\frac{12-xy}{2(x+y)}$. Cherchons d'abord les points critiques :

$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{-y^2(x^2+2xy-12)}{2(x+y)^2} \\ \frac{-x^2(y^2+2xy-12)}{2(x+y)^2} \end{pmatrix}$$

et $\nabla h(x,y) = (0,0)$ ssi $(x,y) = (2,2)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :

$$h_{xx}(x,y) = \frac{-y^2(12+y^2)}{(x+y)^3} \qquad h_{xx}(2,2) = -1 < 0,$$
$$h_{xy}(x,y) = \frac{-xy(x^2+y^2+3xy-12)}{(x+y)^3} \qquad h_{xy}(2,2) = -\frac{1}{2},$$
$$h_{yy}(x,y) = \frac{-x^2(12+x^2)}{(x+y)^3} \qquad h_{yy}(2,2) = -1,$$

2. $\begin{cases} xyz = \lambda(2xz+xy),\\ xyz = \lambda(2yz+xy),\\ xyz = \lambda(2xz+2yz),\\ 2xz+2yz+xy = 12. \end{cases} \implies 2xz+xy = 2yz+xy = 2xz+2yz \implies x = y = 2z$

$$D(2,2) = h_{xx}(2,2)h_{yy}(2,2) - (h_{xy}(2,2))^2 = \frac{3}{4} > 0.$$

On a donc que $(2,2)$ est bien un maximum.

Exercice 4.31

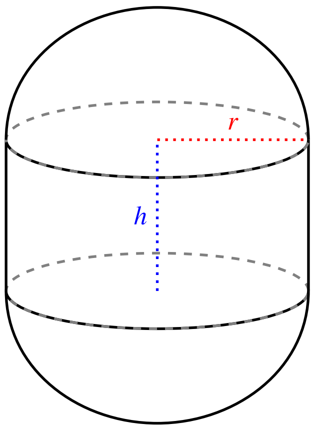
Trouver le parallélépipède (*i.e.* une boîte *fermée*) de volume 8 dont la surface est minimale.

CORRECTION.

1. On doit minimiser la fonction $f\colon (\mathbb{R}^+_*)^3 \to \mathbb{R}^+_*$ définie par $f(x,y,z) = 2(xy+xz+yz)$ sous la contrainte $g(x,y,z) = 0$ où $g\colon (\mathbb{R}^+_*)^3 \to \mathbb{R}^+_*$ est définie par $g(x,y,z) = xyz - 8$. En introduisant le système de LAGRANGE, il s'agit de chercher les solutions $(x,y,z,\lambda) \in (\mathbb{R}^+_*)^3 \times \mathbb{R}$ de
$$\begin{cases} 2y+2z-\lambda yz = 0, & (4.1a)\\ 2x+2z-\lambda xz = 0, & (4.1b)\\ 2x+2y-\lambda xy = 0, & (4.1c)\\ xyz-8=0. & (4.1d)\end{cases}$$
On obtient[3] que le seul point critique est $(2,2,2)$.
2. La contrainte se réécrit $z = \frac{8}{xy}$ donc il s'agit de chercher les extrema de la fonction de deux variables $h\colon (\mathbb{R}^*_+)^2 \to \mathbb{R}^+$ définie par
$$h(x,y) = f\left(x,y,\frac{8}{xy}\right) = 2\left(xy + \frac{8}{y} + \frac{8}{x}\right).$$
Cherchons d'abord les points critiques :
$$\nabla h(x,y) = \begin{pmatrix} 2\left(y - \frac{8}{x^2}\right)\\ 2\left(x-\frac{8}{y^2}\right)\end{pmatrix}$$
et $\nabla h(x,y) = (0,0)$ ssi $(x,y) = (2,2)$. Étudions maintenant ce point en calculant le déterminant de la matrice hessienne de la fonction h :
$$\begin{aligned} h_{xx}(x,y) &= \frac{32}{x^3} & h_{xx}(2,2) &= 4 > 0,\\ h_{xy}(x,y) &= 2 & h_{xy}(2,2) &= 2,\\ h_{yy}(x,y) &= \frac{32}{y^3} & h_{yy}(2,2) &= 4,\end{aligned}$$
$$D(2,2) = h_{xx}(2,2)h_{yy}(2,2) - (h_{xy}(2,2))^2 = 12 > 0.$$
On a donc que $(2,2)$ est bien un minimum.

Exercice 4.32

Soit le solide constitué d'un cylindre de rayon $r > 0$ et hauteur $h > 0$ limité par deux demi-sphère de rayon $r > 0$ comme dans la figure ci-dessous. Maximiser le volume du solide pour une surface fixée égale à 16π.
Rappel : un cylindre de rayon de base R et de hauteur H a volume $\pi R^2 H$ et surface ***totale*** *$2(\pi R^2) + 2\pi RH$, une sphère de rayon R a volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ et surface $4\pi R^2$.*



3. Avec les trois soustractions (4.1b)-(4.1a), (4.1c)-(4.1a) et (4.1c)-(4.1b) on obtient $x = y = z$, on insère ce résultat dans (4.1d) et on trouve la solution.

CORRECTION. La surface du solide est la somme de la surface latérale du cylindre $2\pi rh$ et de la surface des deux demi-sphères $4\pi r^2$:

$$S(r,h) = \pi(4r^2 + 2hr).$$

Le volume du solide est la somme du volume du cylindre $\pi r^2 h$ et du volume des deux demi-sphères $\frac{4}{3}\pi r^3$:

$$V(r,h) = \pi\left(hr^2 + \frac{4}{3}r^3\right).$$

1. Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE : on introduit la fonction lagrangienne

$$\mathscr{L}(r,h,\mu) = V(r,h) - \mu(16\pi - S(r,h)) = \pi\left(hr^2 + \frac{4}{3}r^3\right) - \mu\left(16\pi - \pi(4r^2 + 2hr)\right).$$

On cherche les points critiques du lagrangien :

$$\nabla\mathscr{L} = \mathbf{0} \iff \begin{cases} \pi(2hr + 4r^2) - \mu(-\pi(8r + 2h)) = 0,\\ \pi(r^2) - \mu(-\pi 2r) = 0,\\ \pi(4r^2 + 2hr) = 16\pi, \end{cases} \iff \begin{cases} 2hr + 4r^2 + \mu(2h + 8r) = 0,\\ r^2 + \mu 2r = 0,\\ 4r^2 + 2hr = 16, \end{cases} \iff \begin{cases} r = 2,\\ h = 0,\\ \mu = -1. \end{cases}$$

Comme

$$\Delta(r,h,\mu) \equiv (\partial_{rr}\mathscr{L})(\partial_{hh}\mathscr{L}) - (\partial_{rh}\mathscr{L})^2 = -4\pi^2(r+\mu)^2, \qquad \Delta(2,0,-1) < 0,$$

on ne peut pas établir la nature du point critique

2. Méthode de réduction : on élimine h de la contrainte :

$$\pi(4r^2 + 2hr) = 16\pi \iff h = \frac{8}{r} - 2r.$$

Il s'agit alors de maximiser la fonction

$$g(r) = V(r,h(r)) = \pi\left(hr^2 + \frac{4}{3}r^3\right) = \frac{2}{3}\pi\left(12r - r^3\right)$$

On a

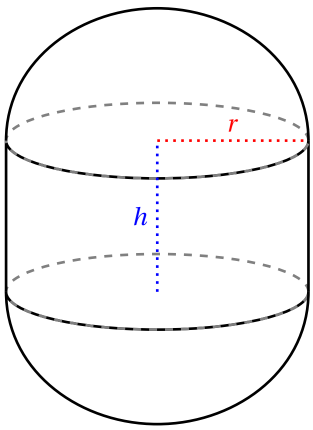
$$g'(r) = \frac{2}{3}\pi\left(12 - 3r^2\right) = 0 \iff r = 2$$

et $g''(r) = \frac{2}{3}\pi(-6r) < 0$, donc $r = 2$ est un maximum et $h(2) = 0$.

Le solide qui maximise le volume pour une surface donnée est donc une sphère !

Exercice 4.33

Soit le solide constitué d'un cylindre de rayon $r > 0$ et hauteur $h > 0$ limité par deux demi-sphère de rayon $r > 0$ comme dans la figure ci-contre. Minimiser la surface du solide pour un volume fixé égale à $\frac{32}{3}\pi$.
*Rappel : un cylindre de rayon de base R et de hauteur H a volume $\pi R^2 H$ et surface **totale** $2(\pi R^2) + 2\pi RH$, une sphère de rayon R a volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ et surface $4\pi R^2$.*



CORRECTION. La surface du solide est la somme de la surface latérale du cylindre $2\pi rh$ et la surface des deux demi-sphères $4\pi r^2$:

$$S(r,h) = \pi(4r^2 + 2hr).$$

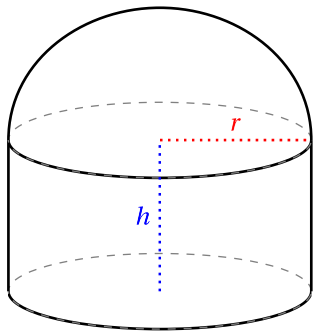
Le volume du solide est la somme du volume du cylindre $\pi r^2 h$ et du volume des deux demi-sphères $\frac{4}{3}\pi r^3$:

$$V(r,h) = \pi\left(hr^2 + \frac{4}{3}r^3\right).$$

1. Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE : on introduit la fonction lagrangienne
$$\mathscr{L}(r,h,\mu)=S(r,h)-\mu\left(\frac{32}{3}\pi-V(r,h)\right)=\pi\left[(4r^2+2hr)-\mu\left(\frac{32}{3}-\left(hr^2+\frac{4}{3}r^3\right)\right)\right].$$
On cherche les points critiques de la fonction lagrangienne :
$$\nabla\mathscr{L}=\mathbf{0}\iff\begin{cases}\pi\left[(8r+2h)-\mu\left(-(2hr+4r^2)\right)\right]=0,\\ \pi\left[(2r)-\mu\left(-r^2\right)\right]=0,\\ \pi\left(hr^2+\frac{4}{3}r^3\right)=\frac{32}{3}\pi,\end{cases}\iff\begin{cases}2h+8r+\mu(2hr+4r^2)=0,\\ 2r+\mu r^2=0,\\ hr^2+\frac{4}{3}r^3=\frac{32}{3},\end{cases}\iff\begin{cases}r=2,\\ h=0,\\ \mu=-1.\end{cases}$$
On étudie la nature du point critique trouvé :
$$\Delta(r,h,\mu)=(\partial_{rr}\mathscr{L})(\partial_{hh}\mathscr{L})-(\partial_{rh}\mathscr{L})^2=-4\pi^2(1+\mu r)^2\implies\Delta(2,0,-1)<0,$$
on ne peut pas conclure.
2. Méthode de réduction : on élimine h de la contrainte :
$$\pi\left(hr^2+\frac{4}{3}r^3\right)=\frac{32}{3}\pi\iff h=\frac{4}{3}\left(\frac{8}{r^2}-r\right).$$
Il s'agit alors de maximiser la fonction
$$g(r)=S(r,h(r))=\pi(4r^2+2hr)=\frac{4}{3}\pi\left(\frac{16}{r}+r^2\right)$$
On a
$$g'(r)=\frac{8}{3}\pi\left(r-\frac{8}{r^2}\right)=0\iff r=2$$
et $g''(r)=\frac{8}{3}\pi\left(1+16/r^3\right)>0$ donc $r=2$ est un minimum et $h(2)=0$.

Exercice 4.34

Soit le solide constitué d'un cylindre de rayon $r>0$ et hauteur $h>0$ surmonté par une demi-sphère de rayon $r>0$ comme dans la figure ci-contre. Maximiser le volume du solide pour une surface fixée égale à 5π.
Rappel : un cylindre de rayon de base R et de hauteur H a volume $\pi R^2 H$ et surface totale $2(\pi R^2)+2\pi RH$, une sphère de rayon R a volume $\frac{4}{3}\pi R^3$ et surface $4\pi R^2$.



CORRECTION. La surface du solide est la somme de la surface du disque de base πr^2 avec la surface latérale du cylindre $2\pi rh$ et la surface de la demi-sphère $2\pi r^2$:
$$S(r,h)=\pi(3r^2+2hr).$$
Le volume du solide est la somme du volume du cylindre πr^2h et du volume de la demi-sphère $\frac{2}{3}\pi r^3$:
$$V(r,h)=\pi\left(hr^2+\frac{2}{3}r^3\right).$$

1. Méthode des multiplicateurs de LAGRANGE : on introduit la fonction lagrangienne
$$\mathscr{L}(r,h,\mu)=V(r,h)-\mu(5\pi-S(r,h))=\pi\left(hr^2+\frac{2}{3}r^3\right)-\mu\left(5\pi-\pi(3r^2+2hr)\right).$$
On cherche les points critiques de la fonction lagrangienne :
$$\nabla\mathscr{L}=\mathbf{0}\iff\begin{cases}\pi(2hr+2r^2)-\mu(-\pi(6r+2h))=0,\\ \pi r^2-\mu(-\pi(2r))=0,\\ \pi(3r^2+2hr)=5\pi,\end{cases}\iff\begin{cases}2hr+2r^2+\mu(6r+2h)=0,\\ r^2+\mu(2r)=0,\\ 3r^2+2hr=5,\end{cases}\iff\begin{cases}r=h=1,\\ \mu=-\frac{1}{2}.\end{cases}$$

2. Méthode de réduction : on élimine h de la contrainte :

$$\pi(3r^2+2hr)=5 \iff h=\frac{5}{2r}-\frac{3}{2}r.$$

Il s'agit alors de minimiser la fonction

$$g(r)=V(r,h(r))=\pi\left(h(r)r^2+\frac{2}{3}r^3\right)=\pi\left(\frac{5}{2}r-\frac{3}{2}r^3+\frac{2}{3}r^3\right)=\pi\left(\frac{5}{2}r-\frac{5}{6}r^3\right).$$

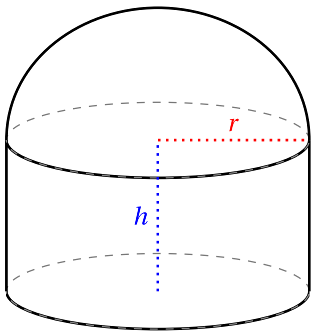
On a

$$g'(r)=\pi\left(\frac{5}{2}-\frac{5}{2}r^2\right)=0 \iff r=1$$

et $g''(r)=\pi(-5r)<0$ donc $r=1$ est un maximum et $h(1)=1$.

Exercice 4.35

Soit le solide constitué d'un cylindre de rayon $r>0$ et hauteur $h>0$ surmonté par une demi-sphère de rayon $r>0$ comme dans la figure ci-contre. Minimiser la surface du solide pour un volume fixé égale à $\frac{5}{3}\pi$ *Rappel : un cylindre de rayon de base R et de hauteur H a volume* $\pi R^2 H$ *et surface totale* $2(\pi R^2)+2\pi RH$*, une sphère de rayon R a volume* $\frac{4}{3}\pi R^3$ *et surface* $4\pi R^2$.



Correction. La surface du solide est la somme de la surface du disque de base πr^2 avec la surface latérale du cylindre $2\pi rh$ et la surface de la demi-sphère $2\pi r^2$:

$$S(r,h)=\pi(3r^2+2hr).$$

Le volume du solide est la somme du volume du cylindre $\pi r^2 h$ et du volume de la demi-sphère $\frac{2}{3}\pi r^3$:

$$V(r,h)=\pi\left(hr^2+\frac{2}{3}r^3\right).$$

1. Méthode des multiplicateurs de Lagrange : on introduit la fonction lagrangienne

$$\mathscr{L}(r,h,\mu)=S(r,h)-\mu\left(\frac{5}{3}\pi-V(r,h)\right)=\pi(3r^2+2hr)-\mu\left(\frac{5}{3}\pi-\pi\left(hr^2+\frac{2}{3}r^3\right)\right).$$

On cherche les points critique de la fonction lagrangienne :

$$\nabla\mathscr{L}=\mathbf{0} \iff \begin{cases}\pi(6r+2h)-\mu\left(-\pi(2hr+2r^2)\right)=0,\\ \pi(2r)-\mu\left(-\pi r^2\right)=0,\\ \pi\left(hr^2+\frac{2}{3}r^3\right)=\frac{5}{3}\pi,\end{cases} \iff \begin{cases}6r+2h+\mu(2hr+2r^2)=0,\\ 2r+\mu r^2=0,\\ \left(hr^2+\frac{2}{3}r^3\right)=\frac{5}{3},\end{cases} \iff \begin{cases}r=h=1,\\ \mu=-2.\end{cases}$$

2. Méthode de réduction : on élimine h de la contrainte :

$$\pi\left(hr^2+\frac{2}{3}r^3\right)=\frac{5}{3}\pi \iff h=\frac{5}{3r^2}-\frac{2}{3}r.$$

Il s'agit alors de minimiser la fonction

$$g(r)=S(r,h(r))=\pi(3r^2+2h(r)r)=\pi\left(3r^2+\frac{10}{3r}-\frac{4}{3}r^2\right)=\pi\left(\frac{10}{3r}+\frac{5}{3}r^2\right).$$

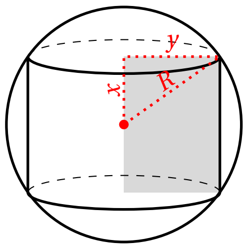
On a

$$g'(r)=\pi\left(-\frac{10}{3r^2}+\frac{10}{3}r\right)=0 \iff r=1$$

et $g''(r)=\pi\left(\frac{20}{3r^3}+\frac{10}{3}\right)>0$ donc $r=1$ est un minimum et $h(1)=1$.

Exercice 4.36

Trouver le cylindre de volume maximal inscrit dans une sphère de rayon $R>0$ fixé…



1. …avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE (i.e. minimisation d'une fonction $f(x,y)$ sous une contrainte $g(x,y)=0$) [NB : on se contentera de trouver le point critique] ;
2. … avec la méthode des extrema libres en éliminant une variable de la contrainte (par exemple en minimisant une fonction $h(x)=f(x,y(x))$) [NB : après avoir trouvé le point critique, établir sa nature].

Suggestion : voir la figure ci-contre pour déduire la contrainte.

CORRECTION. Notons $y>0$ le rayon de base du cylindre et $x>0$ sa demi-hauteur du cylindre.

1. Avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE il s'agit de maximiser la fonction $f(x,y)=2\pi xy^2$ sous la contrainte $g(x,y)=R^2-x^2-y^2=0$. On écrit la fonction de LAGRANGE
$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)-\lambda g(x,y)=2\pi xy^2-\lambda(R^2-x^2-y^2)$$
et on cherche les points critiques de F :
$$\vec{\nabla}F(x,y,\lambda)=\begin{pmatrix}2\pi y^2+2\lambda x\\ 4\pi xy+2\lambda y\\ x^2+y^2-R^2\end{pmatrix}.$$
On a $\vec{\nabla}F(x,y,\lambda)=\vec{0}$ ssi $(x,y,\lambda)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}}R,\sqrt{\frac{2}{3}}R,\pi\frac{2}{\sqrt{3}}R\right)$.
2. Avec la méthode des extrema libres il s'agit d'éliminer une variable de la contrainte, par exemple en posant $y=\sqrt{R^2-x^2}$ et on minimise la fonction $h(x)=f(x,y(x))$:
$$h(x)=f(x,y(x)=\sqrt{R^2-x^2})=2\pi x(R^2-x^2).$$
On cherche d'abord les points critiques :
$$h'(x)=2\pi(R^2-3x^2)$$
et $h'(x)=0$ ssi $x=\frac{R}{\sqrt{3}}$. On étudie la nature du point critique en étudiant la dérivée seconde :
$$h''(x)=-12\pi x, \qquad h''\left(\frac{R}{\sqrt{3}}\right)<0$$
donc $x=\frac{R}{\sqrt{3}}$ est un maximum.

Exercice 4.37

Trouver trois nombres réels positifs dont le produit vaut 1728 et dont la somme est minimale :

1. avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE (*i.e.* minimisation d'une fonction $f(x,y,z)$ sous une contrainte $g(x,y,z)=0$), [on se contentera de trouver le point critique sans en étudier sa nature] ;
2. avec la méthode des extrema libres en «éliminant» une variable de la contrainte (en minimisant une fonction $h(x,y)=f(x,y,z(x,y))$) ; *après avoir trouvé le point critique, établir sa nature.*

CORRECTION. Il s'agit de minimiser la fonction $f(x,y,z)=x+y+z$ sous la contrainte $g(x,y,z)=xyz-1728=0$.

1. On écrit la fonction de LAGRANGE
$$F(x,y,z,\lambda)=f(x,y,z)-\lambda g(x,y,z)=x+y+z-\lambda(xyz-1728)$$
et on cherche le(s) point(s) critique(s) de F :
$$\vec{\nabla}F(x,y,z,\lambda)=\begin{pmatrix}1-\lambda yz\\ 1-\lambda xz\\ 1-\lambda xy\\ 1728-xyz\end{pmatrix}.$$
On a $\vec{\nabla}F(x,y,z,\lambda)=\vec{0}$ ssi $(x,y,z,\lambda)=(12,12,12,1/144)$.

2. On réécrit la contrainte sous la forme $z = \frac{1728}{xy}$ et on l'injecte dans la fonction à minimiser :

$$h(x, y) = f(x, y, z(x, y)) = x + y + z(x, y) = x + y - \frac{1728}{xy}.$$

On cherche d'abord le(s) point(s) critique(s) :

$$\vec{\nabla} h(x, y) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1728}{x^2 y} \\ 1 - \frac{1728}{xy^2} \end{pmatrix}$$

et $\vec{\nabla} h(x, y) = \vec{0}$ ssi $(x, y) = (12, 12)$. On établie la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$\partial_{xx} h(x, y) = \frac{3456}{x^3 y}, \qquad \partial_{yy} h(x, y) = \frac{3456}{xy^3}, \qquad \partial_{xy} h(x, y) = \frac{1728}{x^2 y^2},$$

$$\partial_{xx} h(12, 12) = \frac{1}{6} > 0, \qquad \partial_{yy} h(12, 12) = \frac{1}{6}, \qquad \partial_{xy} h(12, 12) = \frac{1}{12}$$

et $\partial_{xx} h(12, 12) \partial_{yy} h(12, 12) - (\partial_{xy} h(12, 12))^2 = \frac{1}{48} > 0$ donc $(12, 12)$ est un minimum.

Exercice 4.38

Trouver le parallélépipède de volume 1 dont la somme des longueurs des arrêtes est minimale

Correction.

1. Avec la méthode des multiplicateurs de Lagrange il s'agit de minimiser la fonction $f(x, y, z) = 4x + 4y + 4z$ sous la contrainte $g(x, y, z) = xyz - 1 = 0$. On écrit la fonction de Lagrange

$$F(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda g(x, y, z) = 4(x + y + z) - \lambda(xyz - 1)$$

et on cherche le(s) point(s) critique(s) de F :

$$\vec{\nabla} F(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} 4 - \lambda yz \\ 4 - \lambda xz \\ 4 - \lambda xy \\ 1 - xyz \end{pmatrix}.$$

On a $\vec{\nabla} F(x, y, z, \lambda) = \vec{0}$ ssi $(x, y, z, \lambda) = (1, 1, 1, 4)$.

2. Avec la méthode des extrema libres il s'agit d'éliminer une variable de la contrainte, par exemple en posant $z = \frac{1}{xy}$, et de minimiser ensuite la fonction $h(x, y) = f(x, y, z(x, y))$:

$$h(x, y) = f\left(x, y, \frac{1}{xy}\right) = 4\left(x + y + \frac{1}{xy}\right).$$

On cherche d'abord le(s) point(s) critique(s) :

$$\vec{\nabla} h(x, y) = \begin{pmatrix} 4 - \frac{4}{x^2 y} \\ 4 - \frac{4}{xy^2} \end{pmatrix}$$

et $\vec{\nabla} h(x, y) = \vec{0}$ ssi $(x, y) = (1, 1)$. On établie la nature du point critique en étudiant le déterminant de la matrice hessienne :

$$\partial_{xx} h(x, y) = \frac{8}{x^3 y}, \qquad \partial_{yy} h(x, y) = \frac{8}{xy^3}, \qquad \partial_{xy} h(x, y) = \frac{4}{x^2 y^2},$$

$$\partial_{xx} h(1, 1) = 8 > 0, \qquad \partial_{yy} h(1, 1) = 8, \qquad \partial_{xy} h(1, 1) = 4$$

et $\partial_{xx} h(1, 1) \partial_{yy} h(1, 1) - (\partial_{xy} h(1, 1))^2 = 48 > 0$ donc $(1, 1)$ est un minimum.

Exercice 4.39

Si un courant électrique I traverse un circuit électrique de résistance R, la quantité de chaleur émise en une unité de temps est proportionnelle à I^2R. Calculer la décomposition du courant I en trois courants I_1, I_2, I_3 à l'aide de trois résistances R_1, R_2, R_3 pour que la chaleur émise soit minimale…

1. … avec la méthode des multiplicateurs de LAGRANGE, *i.e.* en minimisant la fonction $f(I_1, I_2, I_3) = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + I_3^2R_3$ sous la contrainte $g(I_1, I_2, I_3) = I_1 + I_2 + I_3 - I$, (on se contentera de trouver le point critique sans en étudier la nature)
2. … en réduisant le problème à une minimisation libre par élimination d'une variable dans la contrainte $I = I_1 + I_2 + I_3$.

CORRECTION.

1. On maximise le lagrangien $L(I_1, I_2, I_3, \lambda) = f(I_1, I_2, I_3) - \lambda g(I_1, I_2, I_3)$.

   Points critiques : $\nabla L(I_1, I_2, I_3, \lambda) = \begin{pmatrix} 2I_1R_1 - \lambda \\ 2I_2R_2 - \lambda \\ 2I_3R_3 - \lambda \\ I - I_1 - I_2 - I_3 \end{pmatrix}$ donc $\nabla L(I_1, I_2, I_3, \lambda) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

   $$(I_1, I_2, I_3, \lambda) = \left(\frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I, \frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I, \frac{R_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I, \frac{2R_1R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I \right).$$

   Conclusion : $(I_1, I_2, I_3) = \left(\frac{R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} I, \frac{R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} I, \frac{R_1R_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} I \right)$ est un extremum de f sous la contrainte $g(I_1, I_2, I_3) = 0$.

2. On maximise $\tilde{f}(I_1, I_2) = f(I_1, I_2, I - I_1 - I_2) = I_1^2R_1 + I_2^2R_2 + (I - I_1 - I_2)^2R_3$.

   Points critiques : $\nabla \tilde{f}(I_1, I_2) = \begin{pmatrix} 2I_1R_1 - 2(I - I_1 - I_2)R_3 \\ 2I_2R_2 - 2(I - I_1 - I_2)R_3 \end{pmatrix}$ et l'on a $\nabla \tilde{f}(I_1, I_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si et seulement si

   $$(I_1, I_2) = \left(\frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I, \frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I \right).$$

   Classification : $\partial_{I_1I_1} \tilde{f}(I_1, I_2) = 2(R_1 + R_3) > 0$, $\partial_{I_2I_2} \tilde{f}(I_1, I_2) = 2(R_2 + R_3)$ et $\partial_{I_1I_2} \tilde{f}(I_1, I_2) = 2R_3$, donc $\partial_{I_1I_1} \tilde{f}(I_1, I_2) \cdot \partial_{I_2I_2} \tilde{f}(I_1, I_2) - \left(\partial_{I_1I_2} \tilde{f}(I_1, I_2)\right)^2 = 4(R_1 + R_3)(R_2 + R_3) - 4R_3^2 > 0$ pour tout $(I_1, I_2) \in \mathbb{R}^2$.

   Conclusion : $(I_1, I_2) = \left(\frac{R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} I, \frac{R_1R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3} I \right)$ est un minimum de $\tilde{f}$ donc

   $$(I_1, I_2, I_3) = \left(\frac{R_2R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I, \frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I, \frac{R_1R_2}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3} I \right)$$

   est un minimum de f sous la contrainte $g(I_1, I_2, I_3) = 0$.