Mention de MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Domaine : SCIENCES ET TECHNOLOGIE
UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

TD **GEOMETRIE S$_3$**
Année : 2020

Conseil du jour : *"La symétrie est omniprésente chez les êtres vivants, dans la nature, dans l'art et même dans l'Univers étendu (ou super amas)."*

EXERCICE I(Différentiabilité, dérivée direction et gradient)

Soit F l'application définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3+2xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées directionnelles en $(0,0)$ dans la direction donnée par un vecteur unitaire $(cost; sint)$; $t \in [0; 2\pi[$. Calculer, s'il existe, la dérivée directionnelle au point $p(1,-1)$ dans la direction de vecteur $\vec{u}\left(-\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)$.
3. Quelle est le lien entre le gradient d'une fonction différentiable et la dérivée directionnelle ?
4. F est-elle différentiable en $(0,0)$? en $p(1,-1)$?

EXERCICE II(Différentiabilité)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(3+2y)x^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \quad \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Et f admet-elle de différentielle ? Si oui, déterminer $Df(x,y)$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.
3. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y \partial x}$. Qu'en déduire ?

EXERCICE III

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 et $F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$F(x,y) = \frac{f(x^2+y^2) - f(0)}{x^2+y^2}.$$

1. Déterminer $lim_{(x,y)\to(0,0)} F(x,y)$. On prolonge F par continuité en $(0,0)$ et on suppose de surcroît f de classe C^2.
2. Justifier que F est différentiable en $(0,0)$ et y préciser sa différentielle.
3. Montrer que F est de classe C^1.

EXERCICE IV

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0) \\ 0 \quad \text{si } (x,y) = (1,0) \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ et, en $(1,0)$.
2. Calculer le gradient de f pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ et celui en $(1,0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$. Et f est-elle de classe C^1 en $(1,0)$
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(1,0)\}$ et en $(1,0)$?

EXERCICE V(Développement limité de Taylor) Calculer les polynômes de Taylor à l'ordre 1 (ie, l'équation du plan tangent) et à l'ordre 2 au voisinage du point (x_0, y_0) des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y) = 1 - 3x + y + 2x^3y - xy^2$ au voisinage du point $(-1,2)$.
2. $f(x,y) = 2 + x - 3y + x^3 - xy + y^3$ au voisinage du point $(1,-1)$.

EXERCICE VI (Théorème des Fonctions Implicites)

On considère la fonction F de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$ telle que $F(x,y) := e^{x-y} - 1 - x - y$.

1. Montrer que F est de classe C^1.
2. Montrer qu'au voisinage de $(0,0)$, $F(x,y) = 0$ équivaut à $y = \varphi(x)$, où φ est une fonction de classe C^1.
3. Calculer $\varphi'(0)$.

EXERCICE VII

Montrer que l'équation $x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0$ permet d'exprimer z en fonction de (x,y) au voisinage de $(1,1,1)$. Calculer alors $\frac{\partial z(1,1)}{\partial x}$ et $\frac{\partial z(1,1)}{\partial y}$.

EXERCICE VIII (Théorème d'Inversion Locale)

Montrer que les applications suivantes est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ dans son image respective que l'on déterminera :

1. $f(x,y) = (xe^y, ye^x + 3)$.
2. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par $f(x,y,z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$.
   — a) Calculer le rang de la matrice jacobienne de f en un point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
   — b) Montrer qu'au voisinage de tout point $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, f est un difféomorphisme local de classe C^1.
   — c) L'application f est-elle un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^3$ sur $f(\mathbb{R}^3)$.
3. Montrer que l'application : $f :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (sin(x) + sh(y)\,; sh(x) + sin(y))$$

   est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

EXERCICE IX (Extrema)

1. Déterminer et établir la natures des points critiques de chacune des fonctions suivantes :
   — a) $f(x,y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$ dans $\mathbb{R}^2$.
   — b) $f(x,y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$ dans $\mathbb{R}^2$.
   — c) $f(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$ dans $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les extrema locaux et globaux des fonctions suivantes :

- a) $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.
- b) $f(x,y) = y\left(x^2 + (lny)^2\right)$ sur $\mathbb{R}\times]0,+\infty[$
- c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$.

<u>EXERCICE X</u> (Immersion, Submersion, Plongement)

Les fonctions suivantes sont-elles immersion ? submersion ? plongement ? Justifier votre réponse :

1. $f(x,y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.
2. $f(x,y) = (xe^y, ye^x + 3, x - y)$.
3. $f(x,y,z) = (x^2 + y, xy - x + 4)$.
4. $f(x,y) = (xy, y^2 + 3, 3y, x^3 + 1)$.

<u>EXERCICE XI</u> (Sous-variété)

1. L'ensemble S définie par $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que } x^3+4xy+z^2-3yz^2-3=0\}$ est-il une sous-variété d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera ?
   Soit un point $p = (1,1,1)$. Si possible, détérminer l'espace tangent T_pS de S au point p et préciser sa dimension.
2. Même question sur l'ensemble S définie par
   $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que } (x^3 - 4xy + 3 = 0, x - 5y + z^2 = 0)\}$ avec $p = (1,1,2)$.