Mention de MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE
Domaine : SCIENCES ET TECHNOLOGIE
UNIVERSITE D'ANTANANARIVO

TD_1 **GEOMETRIE S_3**

Année : 2022 - 2022

Conseil du jour : *"L'homme est destiné à vivre pour étudier éternellement et apprendre pour mieux vivre librement."* .

<u>EXERCICE I</u>(Différentiabilité)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\frac{x^2-2y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer $\nabla f(x,y)$.
3. Montrer que ∇f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
4. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes en tout point.
5. Que pouvez-vous déduire du calcul de $\frac{\partial f(0,0)}{\partial x\partial y}$ et $\frac{\partial f(0,0)}{\partial y\partial x}$.

<u>EXERCICE II</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y)=\begin{cases} \frac{(x-1)y^2}{(x-1)^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0)\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ et, en $(1,0)$.
2. Calculer le gradient de f pour $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ et celui en $(1,0)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$. Et f est-elle de classe C^1 en $(1,0)$
4. Que peut-on conclure sur la différentiabilité de f sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(1,0)\}$ et en $(1,0)$?

<u>EXERCICE III</u>(Développement limité de Taylor) Calculer les polynômes de Taylor à l'ordre 1 (ie. l'équation du plan tangent) et à l'ordre 2 au voisinage du point (x_0,y_0) des fonctions $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ suivantes :

1. $f(x,y)=1+x+y+x^3+xy^3$ au voisinage du point $(-1,1)$.
2. $f(x,y)=1+x+y+x^2-xy+y^2$ au voisinage du point $(1,2)$.

<u>EXERCICE IV</u> (Théorème des Fonctions Implicites)

On consid'ere la courbe plane d'équation $ye^x+e^y\sin(2x)=0$.

1. Vérifier que l'équation ci-dessus définit une et une seule fonction $y=\varphi(x)$ au voisinage de $(0,0)$.
2. Calculer $\varphi'(0)$ et écrire l'équation de la droite-tangente au graphe de la fonction φ en le point $(0,\varphi(0))$.

3. En déduire la limite de $\frac{y}{x}$ quand (x, y) tend vers $(0, 0)$ en étant sur la courbe.

EXERCICE V

Montrer que l'équation $x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0$ permet d'exprimer z en fonction de (x, y) au voisinage de $(1, 1, 1)$. Calculer alors $\frac{\partial z(1,1)}{\partial x}$ et $\frac{\partial z(1,1)}{\partial y}$.

EXERCICE VI (Théorème d'Inversion Locale)

Montrer que les applications suivantes est un difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ dans son image respective que l'on déterminera :

1. $f(x, y) = (xe^y, ye^x + 3)$.
2. $f(x, y, z) = (e^{2y} + e^{2z}, e^{2x} - e^{2z}, x - y)$.

EXERCICE VII (Extrema)

Déterminer et établir la natures des points critiques de chacune des fonctions suivantes :

1. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$ dans $\mathbb{R}^2$.
2. $f(x, y) = y^3 + 3x^2y - 6x^2 - 6y^2 + 2$ dans $\mathbb{R}^2$.
3. $f(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + xyz - z + y$ dans $\mathbb{R}^3$.

EXERCICE VIII (Immersion, Submersion, Plongement)

Les fonctions suivantes sont-elles immersion ? submersion ? plongement ? Justifier votre réponse :

1. $f(x, y) = x^2 + y^3 - 2xy - y$.
2. $f(x, y) = (xe^y, ye^x + 3, x - y)$.
3. $f(x, y, z) = (x^2 + y, xy - x + 4)$.
4. $f(x, y) = (xy, y^2 + 3, 3y, x^3 + 1)$.

EXERCICE VIII (Sous-variété)

1. L'ensemble S définie par $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que } x^3 + 4xy + z^2 - 3yz^2 - 3 = 0\}$ est-il une sous-variété d'un ouvert de $\mathbb{R}^3$ que l'on précisera ?
   Soit un point $p = (1, 1, 1)$. Si possible, déterminer l'espace tangent T_pS de S au point p et préciser sa dimension.
2. Même question sur l'ensemble S définie par
   $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tel que } (x^3 - 4xy + 3 = 0, x - 5y + z^2 = 0)\}$ avec $p = (1, 1, 2)$.