MECANIQUE DU SOLIDE

AIDE MEMOIRE

Hery RAMAROTAFIKA

Maître de conférences

***L**aboratoire DYACO - Faculté des Sciences - Université d'Antananarivo*
Tél : 034 07 531 11 – 032 07 531 11
Mail: hery_ramarotafika@yahoo.com

I .CINEMATIQUE DU SOLIDE

Le solide (S) considéré, lié au repère $S = (A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$*, est en mouvement par rapport au repère fixe* $Ro = (O; \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$.

I.1.TORSEUR CINEMATIQUE

1. *Pour deux points A et B liés au solide (S), les éléments de réduction du torseur cinématique au point A et au point B sont respectivement :*

$$[\Omega]_A = \left[\vec{\Omega}_{S/R_0}, \vec{V}_{R_O}(A \in S)\right] \qquad (I.1)$$

$$[\Omega]_B = \left[\vec{\Omega}_{S/R_0}, \vec{V}_{R_O}(B \in S)\right] \qquad (I.2)$$

2. *la relation d'antisymétrie du torseur cinématique est*

$$\vec{V}_{R_O}(B \in S) = \vec{V}_{R_O}(A \in S) + \vec{\Omega}_{S/R_0} \wedge \overrightarrow{AB} \qquad (I.3)$$

Cette relation est aussi appelée relation fondamentale de la cinématique du solide

I.2.REGLE DE DERIVATION

Pour deux repères quelconques R et Rp donnés, la règle de dérivation est la suivante :

$$\left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{/R} = \left.\frac{d\vec{X}}{dt}\right|_{/Rp} + \vec{\Omega}_{Rp/R} \wedge \vec{X} \qquad (I.4)$$

Cette règle permet d'écrire les résultats dans un repère de projection Rp donné lorsque tous les vecteurs entrant dans cette relation sont exprimés dans le même repère Rp.

I.3.COMPOSITION DE MOUVEMENTS

Pour les mouvements d'un point M par rapport au repère absolu $R = (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *(mouvement absolu) et par rapport au repère relatif* $R' = (O'; \vec{x'}, \vec{y'}, \vec{z'})$*, (mouvement relatif) on a :*

1. ***composition de vitesses :*** $\vec{V}_R(M) = \vec{V}_{R'}(M) + \vec{V}_R(M \in R')$ *(I.5)*

   où la vitesse d'entraînement est $\vec{V}_R(M \in R') = \vec{V}_R(O') + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M}$ *(I.6)*

   et la vitesse relative : $\vec{V}_{R'}(M) = \dfrac{d}{dt/R'}(O'\vec{M})$

2. ***composition d'accélérations :***

$$\vec{\Gamma}_R(M) = \vec{\Gamma}_{R'}(M) + \vec{\Gamma}_C(M) + \vec{\Gamma}_e(M) \quad \text{avec :} \qquad (I.8)$$

l'accélération relative $\vec{\Gamma}_{R'} = \dfrac{d}{dt/R'}(\vec{V}_{R'}(M))$, *(I.9)*

l'accélération de Coriolis : $\vec{\Gamma}_C(M) = 2.\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge \vec{V}_{R'}(M)$ *et l'accélération (I.10)*

d'entraînement : $\vec{\Gamma}_e(M) = \vec{\Gamma}_R(O') + \dfrac{d}{dt/R}(\vec{\Omega}_{R'/R}) \wedge O'\vec{M} + \vec{\Omega}_{R'/R} \wedge (\vec{\Omega}_{R'/R} \wedge O'\vec{M})$ *(I.11)*

I.4.LES ANGLES D'EULER (ψ, θ, ϕ)

Pour déterminer les angles d'Euler, il faut d' abord déterminer l'axe des nœuds et après seulement on détermine les angles d'Euler

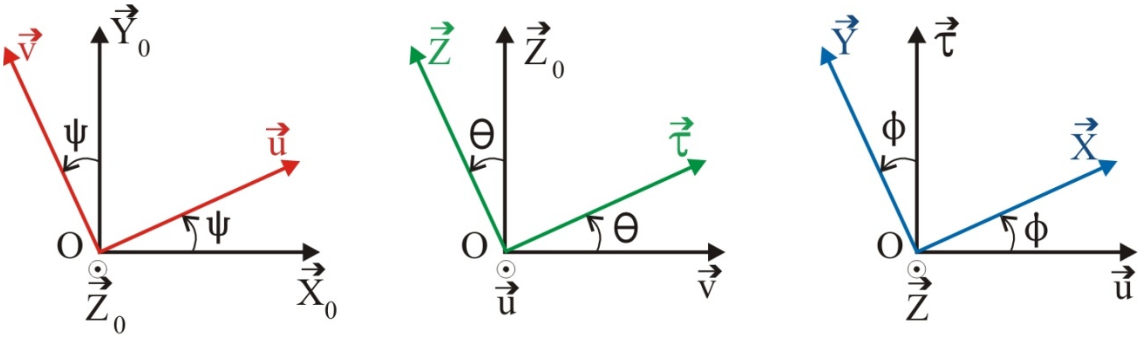
L'axe des nœuds est défini par : $(O, \vec{u}) = (O; \vec{x}_o, \vec{y}_o) \cap (O; \vec{x}, \vec{y})$ *et le trièdre* $(\vec{u}, \vec{z}_o, \vec{z})$ *est direct.*

1. *La précession est la rotation* $(\psi, \vec{z}_o)$ *qui transforme* $Ro = (O; \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$ *en*

   $R1 = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_o)$ *avec* $\vec{\Omega}_{R1/Ro} = \dot{\psi}\,\vec{z}_o$

2. *La nutation est la rotation* $(\theta, \vec{u})$ *qui transforme* $R1 = (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_o)$ *en* $R2 = (O; \vec{u}, \vec{\tau}, \vec{z})$ *avec* $\vec{\Omega}_{R2/R1} = \dot{\theta}\vec{u}$
3. *et la rotation propre* $(\phi, \vec{z})$ *transforme* $R2 = (O; \vec{u}, \vec{\tau}, \vec{z})$ *en* $S = (A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ *avec* $\vec{\Omega}_{S/R2} = \dot{\phi}\vec{z}$
4. *Dans chacune de ces rotations il faut écrire le tableau de changement de base*
5. *Le vecteur instantané de rotation du repère S par rapport à Ro est*

$\vec{\Omega}_{S/Ro} = \dot{\psi}\vec{z}_o + \dot{\theta}\vec{u} + \dot{\phi}\vec{z}$ *qu'on exprimera, à titre d'exercice, dans les repères Ro , R1, R2 et S*



I.5.CINEMATIQUE DE CONTACT DE DEUX SOLIDES

Les deux solides S1 et S2 en mouvement par rapport à Ro sont en contact ponctuel permanent au point I .Ce point de contact I est triple : un point I lié à (S1) noté $I \in S1$, *un point I lié à (S2) noté* $I \in S2$, *un point I lié à l'espace rattaché à Ro appelé point géométrique et noté (I).*

Pour le mouvement de (S1) par rapport à (S2) , le vecteur de glissement de (S1) sur (S2)au point (I) est noté $\vec{V}g = \vec{V}(S1/S2)_I = \vec{V}_{S2}(I \in S1)$.

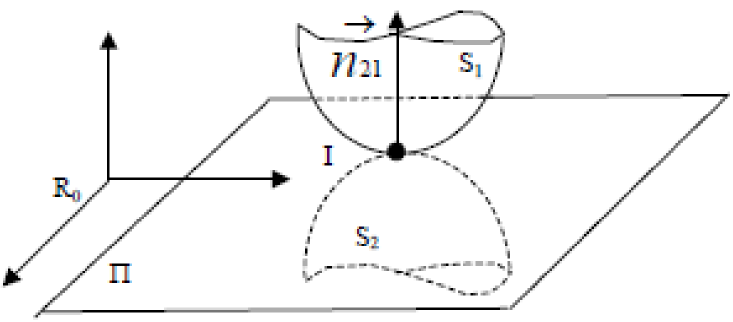
On peut le calculer à l'aide de la composition de vitesses :

-soit par $\vec{V}g = \vec{V}_{S2}(I \in S1) = \vec{V}_R(I \in S1) - \vec{V}_R(I \in S2)$ *pour S2 repère relatif et R le repère absolu considéré ;*

-soit par $\vec{V}g = \vec{V}_{S2}(I \in S1) = \vec{V}_{S2}(I) - \vec{V}_{S1}(I)$ *où I est le point géométrique de contact, S1 le repère relatif et S2 le repère absolu (composition de vitesses).*

Il faut noter que le vecteur vitesse du point géométrique I est calculé par dérivation direct.

Dans le mouvement de contact de (S1) sur (S2), au point (I) s'effectue aussi le mouvement de roulement et le mouvement de pivotement. On parle alors de mouvement de roulement sans glissement lorsque $\vec{V}_g$ *est nul et de mouvement de roulement avec glissement lorsque* $\vec{V}_g$ *est non nul.*



I.6.MOUVEMENT PLAN SUR PLAN

1. *définition : Le mouvement du solide (S) est dit plan sur le plan fixe (Po) lorsque les trajectoires de tous les points de ce solide sont planes et parallèles au plan (Po).*
2. *caractéristiques : on considérera le mouvement du plan* $P=(A;\vec{x},\vec{y})$ *sur le plan fixe* $Po=(O;\vec{x}_o,\vec{y}_o)$ *, ces deux plans sont, à tout instant t, en coïncidence l'un sur l'autre. Les caractéristiques du mouvement plan sur plan sont :*
   - *le centre instantané de rotation I défini par :* $\vec{V}_{Po}(I\in P)=\vec{0}$ *(I.12)*

de cette relation on déduit la position du CIR(I) par $A\bar{I}=\dfrac{\vec{\Omega}_{S/Ro}}{\Omega^2}\wedge\vec{V}_{Ro}(A\in S)$ *(I.13)*

   - *la base (Co) de ce mouvement est l'ensemble des positions du CIR(I) qui varie par rapport à Po : (Co)={CIR(I)/Po}.*
   - *La roulante (C) de ce mouvement est l'ensemble des positions du CIR(I) qui varie par rapport à P : (C)={CIR(I)/P}*
3. *Propriétés du mouvement plan sur plan:*
   - *Le CIR(I) a même vitesse par rapport à Po et P :*
     $\vec{V}_{Po}(I)=\vec{V}_P(I)$, *(I.14)*
   - *Connaissant dans Po la trajectoire* (C_M) *d'un point M lié à P, le CIR(I) se trouve sur la perpendiculaire en M à la tangente en M à la trajectoire* (C_M)*.*
   - *Etant donnés un point fixe B dans le plan Po et une droite variable (D) liée au plan P, le CIR(I) se trouve sur la perpendiculaire en B à la droite (D).*

II.CINETIQUE DU SOLIDE

On distinguera le mouvement du solide (S) par rapport au repère galiléen $Ro=(O;\vec{x}_o,\vec{y}_o,\vec{z}_o)$ *de vecteur quantité de mouvement* $\vec{P}_{Ro}(S)=m\vec{V}_{Ro}(G\in S)$ *; et le mouvement du solide (S) autour de son centre de masse G (appelé aussi mouvement par rapport au repère de Koenig* $K=(G;\vec{x}_o,\vec{y}_o,\vec{z}_o)$ *) de vecteur quantité de mouvement nul.*

II.1.FORMULAIRE

TYPES DE MOUVEMENTS	VECTEUR MOMENT CINETIQUE EN UN POINT A et G:	VECTEUR MOMENT DYNAMIQUE EN UN POINTA et G :	ENERGIE CINETIQUE DU SOLIDE (S)
MOUVEMENT AUTOUR D'UN POINT FIXE A PAR RAPPORT à Ro $\vec{V}_{Ro}(A\in S)=\vec{0}$	$\vec{\sigma}_{Ro}(A,S)=J(A,S).\vec{\Omega}_{S/Ro}$	$\vec{\delta}_{Ro}(A,S)=\dfrac{d}{dt/Ro}(\vec{\sigma}_{Ro}(A,S))$	$Ec_{Ro}(S)=$ $\dfrac{1}{2}.\vec{\sigma}_{Ro}(A,S).\vec{\Omega}_{S/Ro}$
MOUVEMENT AUTOUR DU CENTRE DE MASSE G	$\vec{\sigma}_K(G,S)=J(G,S).\vec{\Omega}_{S/Ro}$	$\vec{\delta}_K(G,S)=\dfrac{d}{dt/Ro}(\vec{\sigma}_K(G,S))$	$Ec_K(S)=$ $\dfrac{1}{2}.\vec{\sigma}_K(G,S)..\vec{\Omega}_{S/Ro}$
MOUVEMENT QUELCONQUE (pour un point A quelconque)	$\vec{\sigma}_{Ro}(A,S)=\vec{\sigma}_K(G,S)+$ $m\vec{V}_{Ro}(G\in S)\wedge G\vec{A}$	$\vec{\delta}_{Ro}(A,S)=\dfrac{d}{dt/Ro}(\vec{\sigma}_{Ro}(A,S)$ $+\vec{V}_{Ro}(A)\wedge m\vec{V}_{Ro}(G\in S)$. Ou encore : $\vec{\delta}_{Ro}(A,S)=\vec{\delta}_K(G,S)+$ $m\vec{\Gamma}_{Ro}(G\in S)\Lambda G\vec{A}$	$Ec_{Ro}(S)=Ec_K(S)+$ $\dfrac{1}{2}m\vec{V}^2_{Ro}(G)$

Conseil : avant d'appliquer les formules, il faut reconnaître le type de mouvement du solide(quelconque ou autour d'un point fixe)

II.2. : TORSEUR CINETIQUE :

Eléments de réduction du torseur cinétique aux deux points A et B du solide (S) :

au point A : $[\sigma]_{A\in S}=[\ m\vec{V}_{Ro}(G\in S)\ ,\ \vec{\sigma}_{Ro}(A,S)\ ]$ *(II.1)*

au point B : $[\sigma]_{B\in S}=[\ m\vec{V}_{Ro}(G\in S)\ ,\ \vec{\sigma}_{Ro}(B,S)\ ]$ *(II.2)*

la relation d'antisymétrie de ce torseur en ces deux points A et B est:

$$\vec{\sigma}_{Ro}(B\in S)=\vec{\sigma}_{Ro}(A\in S)+m\vec{V}_{Ro}(G\in S)\wedge A\vec{B} \quad (II.3)$$

II.3.CALCULS *de la position du centre de masse G et de l'opérateur d'inertie* $J(O,S)/R=(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

II.3.1 Position du centre de masse G d'un solide continu :

$$mO\vec{G}=\int_{M\in S}O\vec{M}.dm(M) \quad (II.4)$$

1. *Exploiter les éléments de symétrie du solide (S) par rapport au repère de calcul : le centre de masse G se trouve toujours sur les éléments de symétrie du solide s'il y en a.*
2. *Ecrire cette relation vectorielle dans le système d'axes cartésiens.*
3. *dans le calcul, commencer par définir l'élément M de masse dm(M) dans le repère de calcul adapté à la forme du solide.*
4. *Faire le calcul dans ce repère adapté en respectant les bornes d'intégration qui doivent couvrir tout le solide concerné.*

II.3.2 <u>Calcul de l'opérateur d'inertie d'un solide continu</u> $J(O,S)/R = (O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

a)- Il faut exploiter l'une des propriétés suivantes lorsqu'elle se présente.

1. *Si un axe du repère R est un axe de révolution matérielle du solide (S), l'opérateur d'inertie est dit cylindrique de la forme : J(O,S) =(A,A,C)/R où C est relatif à l'axe de révolution.*
2. *Si deux axes du repère R sont axes de révolution matérielle du solide (S), l'opérateur d'inertie est dit sphérique de la forme : J(O,S) =(A,A,A)/R .*
3. *Si un axe du repère R est un axe de symétrie matérielle du solide (S), les éléments non diagonaux de* $J(O,S)/R = (O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *relatifs à cet axe sont nuls. (Par exemple , si* $(O;\vec{x})$ *est un axe de symétrie matérielle du solide (S), les éléments Joxy et Joxz sont nuls).*
4. *Si deux axes du repère R sont des axes de symétrie matérielle du solide (S), l'opérateur d'inertie est diagonal de la forme : J(O,S)= (A,B,C) / R .*
5. *Si un plan du repère R est un plan de symétrie pour le solide (S), les éléments non diagonaux non relatif à ce plan sont nuls. (Par exemple , si le plan* $(O,\vec{x},\vec{y})$ *est un plan de symétrie matérielle du solide (S), Joxy ≠ 0 et Joxz=Joyz=0). En conséquence, lorsque deux plans du repère R sont les plans de symétrie matérielle du solide (S), l'opérateur d'inertie est diagonal :*
   J(O,S)= (A,B,C) / R .

b)- Pour les calculs, reprendre 3 et 4 dans II.3.1.

II.3.3 <u>théorème de Huygens</u> :

Le théorème de Huygens permet de calculer l'opérateur d'inertie $J(O,S)/R = (O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *à partir de l'opérateur d'inertie* $J(G,S)/R_G = (G;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *et vice versa . Les deux repères doivent être en translation de vecteur* $\vec{OG} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + \gamma\vec{z}$ *.*

Les expressions déduites de ce théorème sont :

$J_{Ox} = J_{Gx} + m(\beta^2 + \gamma^2)$ $J_{Oy} = J_{Gy} + m(\alpha^2 + \gamma^2)$ $J_{Oz} = J_{Gz} + m(\alpha^2 + \beta^2)$	$J_{Oxy} = J_{Gxy} + m\alpha\beta$ $J_{Oxz} = J_{Gxz} + m\alpha\gamma$ $J_{Oyz} = J_{Gyz} + m\beta\gamma$

II.3.4 : Moment d'inertie d'un solide par rapport à un axe $(\Delta) = (O;\vec{u})$

$$J_{\Delta} = J_{(O,\vec{u})} = {}^t[u].J(O,S)/R(O;\vec{x},\vec{y},\vec{z}).[u].$$

Notons que ces matrices sont exprimées dans la même base du repère R

II.3.5 exercices :

A titre d'exercices, l'étudiant doit déterminer la position du centre de masse G et l'opérateur d'inertie $J(O,S)/R = (O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *des portions des solides homogènes (S) suivants : quart de cerceau, quart de disque, demi-sphère S(O,a), demi- boule S(O,a), cône de sommet O , triangle rectangle OAB , cube de sommet O, cylindre de hauteur h et de base circulaire(o,a).*

Appliquer également le théorème de Huygens lorsque c'est possible.