CHAPITRE V

CINETIQUE

1. Définition

La résultante cinétique (quantité de mouvement), **le moment cinétique** (moment de la quantité de mouvement), **la résultante dynamique** (quantité d'accélération), **le moment dynamique** et **l'énergie cinétique**, constituent les éléments de la cinétique.

La cinétique a pour objet l'étude des relations entre les éléments de la cinématique et la géométrie des masses.

2. Résultante cinétique, moment cinétique

- La résultante cinétique (quantité de mouvement) d'un point matériel M, de masse m et de vitesse $\vec{V}(M)$ est définie par la grandeur vectorielle :

$$\vec{P} = m\vec{V}(M) \;;$$

- Le moment cinétique $\vec{\sigma}_A$ du point matériel M en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A, il a pour grandeur :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}(M)$$

2.1. Quantité de mouvement d'un système matériel *(S)*

a) Système matériel discret :

Le système est constitué d'un ensemble de point M_i de masse m_i et de vitesses $\vec{V}(M_i)$ dans un repère *R*.

- **La résultante cinétique** (quantité de mouvement) du système est donnée par la grandeur vectorielle : $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}(M_i)$

- **Le moment cinétique** $\vec{\sigma}_A$ du système matériel *(S)* en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A, il a pour grandeur vectorielle : $\vec{\sigma}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}(M_i)$

b) Système matériel continu :

Dans le cas d'un système matériel continu *(S)* : linéaire, surfacique où volumique nous avons :

- **La résultante cinétique** (quantité de mouvement) du système matériel continu, est donnée par la grandeur vectorielle : $\vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm$;

- **Le moment cinétique** $\vec{\sigma}_A$ du système matériel continu *(S)* en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A, il a pour grandeur vectorielle : $\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm$

3. Torseur cinétique

Soit un solide *(S)* de masse *m* et de centre d'inertie *G*, en mouvement par rapport à un repère fixe *R*. Soit *M* un point de ce solide et deux points A et B quelconque de l'espace mais connus dans le repère *R*.

Par définition nous avons les moments cinétiques en A et B qui sont donnés par :

$$\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_B = \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M)dm$$

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm - \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M)dm = \int_S (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{V}(M)dm = \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}(M)dm$$

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \int_S \vec{V}(M)dm = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}$$

cette relation est appelée loi de variation du moment cinétique

On constate que le moment cinétique obéit à la loi des transports des moments. Nous pouvons alors construire un torseur cinétique dont les éléments de réduction sont : la résultante cinétique et le moment cinétique.

$$[C]_A = \begin{cases} \vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm \\ \vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm \end{cases}$$

$\vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm$: résultante cinétique ou quantité de mouvement du système *(S)*

$\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm$: Moment cinétique au point A du système *(S)* dans le repère *R*.

3.1. Expression de la résultante cinétique d'un système matériel

Soit un solide *(S)* de masse *m* et de centre d'inertie *G*, en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Quel que soit $M \in (S)$ nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$

Les points G et M sont Mobiles dans le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, nous pouvons écrire :

$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}$ et leurs vitesses sont liées par la relation :

$$\frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} - \frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt} = \vec{V}(M) - \vec{V}(G)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps sous le signe intégrale, on obtient :

$$\int_S \frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt}\, dm = \int_S \left(\vec{V}(M) - \vec{V}(G)\right) dm = \vec{0}$$

$$\int_S \vec{V}(M)\, dm = \vec{V}(G) \int_S dm = m\vec{V}(G) \qquad \text{ce qui donne : } \vec{P} = m\vec{V}(G)$$

La résultante du torseur cinétique est la quantité de mouvement du centre de la masse affectée de la masse totale du système : $\vec{P} = m\vec{V}(G)$

3.2. Propriétés du moment cinétique

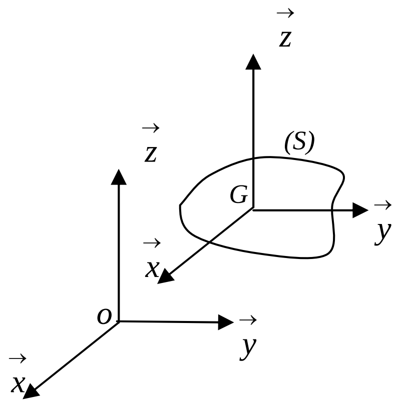
3.2.1. Théorème de Koënig

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G / R_0) = \vec{0}$

Nous allons chercher une relation entre :

- le moment cinétique du système en G dans son mouvement par rapport à R_0 et
- le moment cinétique du système en G dans son mouvement par rapport à R_G.



Soit M un point du système matériel :

Sa vitesse dans le repère R_0 est donnée par : $\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(G) + \vec{V}^G(M)$

Son moment cinétique au point G dans R_0 s'écrira : $\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(M)dm$

Son moment cinétique au point G dans R_G s'écrira : $\vec{\sigma}_{G/R_G} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm$

Nous avons alors :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}^0(G) + \vec{V}^G(M) \right) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(G)dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm$$

or nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ on obtient finalement :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{V}^0(G) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm = \vec{\sigma}_{G/R_G}$$

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G}$$

Le moment cinétique en G centre d'inertie du système est le même qu'il soit présenté dans le repère R_0 ou dans le repère R_1.

En un point A quelconque de l'espace nous aurons par la formule de transport :

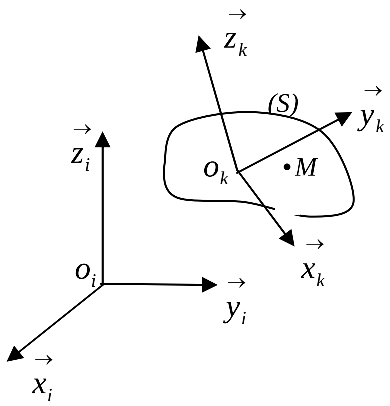
$$\vec{\sigma}_{A/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^0(G)$$

Nous avons ainsi le théorème de Koënig pour le moment cinétique.

3.3. Moment cinétique d'un solide (S) indéformable, lié à un repère R_k en mouvement quelconque par rapport à un repère fixe R_i .

Soit M un point du solide, sa vitesse est donnée par la cinématique du solide, elle a pour expression : $\vec{V}^i(M) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_k M}$

Le moment cinétique au point O_k est donné par : $\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(M) dm$



En remplaçant l'expression de la vitesse dans celle du moment cinétique, nous obtenons :

$$\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$$

$$\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k) dm + \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$$

avec : $\vec{\sigma}_1 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k) dm$ et $\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}^i_k \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$

Expression de $\vec{\sigma}_1$:

$$\vec{\sigma}_1 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k) dm = \int_S \left(\overrightarrow{O_k G} + \overrightarrow{GM} \right) \wedge \vec{V}^i(O_k) dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{O_k G} \wedge \vec{V}^i(O_k) dm + \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{V}^i(O_k)$$

$$\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{O_k G} \wedge \vec{V}^i(O_k) \int_S dm + \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{V}^i(O_k)$$

Comme G est le centre d'inertie du solide, nous avons alors : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$

d'où : $\underline{\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{O_k G} \wedge m\vec{V}^i(O_k)}$

Expression de $\vec{\sigma}_2$:

$$\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$$

Afin de développer cette expression, nous utilisons les coordonnées du point M dans le repère R_k et les composantes du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k^i$ dans le repère R_k .

$$\overrightarrow{O_k M} = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}} \quad ; \quad \vec{\Omega}_k^i = \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \wedge \\ z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \\ \Omega_y \wedge \\ \Omega_z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}} = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \wedge \\ z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} z\Omega_y - y\Omega_z \\ x\Omega_z - z\Omega_x \\ y\Omega_x - x\Omega_y \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) = \underset{R_k}{\begin{cases} y(y\Omega_x - x\Omega_y) - z(x\Omega_z - z\Omega_x) \\ z(z\Omega_y - y\Omega_z) - x(y\Omega_x - x\Omega_y) \\ x(x\Omega_z - z\Omega_x) - y(z\Omega_y - y\Omega_z) \end{cases}} = \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x(y^2+z^2) - \Omega_y xy - \Omega_z xz \\ -\Omega_x xy + \Omega_y(x^2+z^2) - \Omega_z yz \\ -\Omega_x xz - \Omega_y yz + \Omega_z(x^2+z^2) \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm = \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \int_S (y^2+z^2)dm - \Omega_y \int_S xydm - \Omega_z \int_S xzdm \\ -\Omega_x \int_S xydm + \Omega_y \int_S (x^2+z^2)dm - \Omega_z \int_S yzdm \\ -\Omega_x \int_S xzdm - \Omega_y \int_S yzdm + \Omega_z \int_S (x^2+z^2)dm \end{cases}}$$

cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\vec{\sigma}_2 = [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i}$$

on aboutit à l'expression finale : $\vec{\sigma}^i(O_k) = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$ qui s'écrira :

$$\underline{\vec{\sigma}^i(O_k) = \overrightarrow{O_k G} \wedge m\vec{V}^i(O_k) + [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i}$$

Cas particuliers :

- Si le repère R_k est fixe par rapport à R_i alors $\vec{V}^i(O_k) = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{\sigma}^i(O_k) = [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i}$
- Si le point O_k est confondu avec le centre G alors $\overrightarrow{O_k G} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\underline{\vec{\sigma}^i(G) = [I_G]\vec{\Omega}_k^i}$

3.4. Théorème de Koënig pour un système matériel *(S)*

Sous la forme généralisée nous avons :

$$\vec{\sigma}^i(M) = \vec{\sigma}^k(G) + \overrightarrow{MG} \wedge m\vec{V}^i(G) \qquad \text{avec} \qquad \vec{\sigma}^i(G) = \vec{\sigma}^k(G)$$

Nous pouvons ainsi écrire la relation sous la forme :

$$\vec{\sigma}^i(M) = [I_G]\vec{\Omega}_k^i + \overrightarrow{MG} \wedge m\vec{V}^i(G)$$

I_G : est le moment d'inertie du système en son centre d'inertie.

4. Torseur dynamique

4.1. Définition

Soit M un point du système matériel *(S)* en mouvement par rapport à un repère fixe R.

L'accélération du point M est donnée par : $\vec{\gamma}(M) = \dfrac{d\vec{V}(M)}{dt}$

- On appelle résultante dynamique ou (quantité d'accélération) du point M :

$$\vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm \quad \text{ou} \quad \vec{D} = \sum_i m_i \vec{\gamma}(M_i)$$

- On appelle moment dynamique, le moment de la résultante dynamique (moment de la quantité d'accélération) par rapport à un point A du repère R :

$$\vec{\delta}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M)dm \quad \text{où} \quad \vec{\delta}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{\gamma}(M_i)$$

On construit le torseur dynamique avec ces deux grandeurs comme éléments de réduction de ce torseur. Le torseur dynamique en un point A du repère R s'exprime sous la forme :

$$[D]_A = \begin{cases} \vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm \\ \vec{\delta}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M)dm \end{cases} \quad \text{où} \quad [D]_A = \begin{cases} \vec{D} = \sum_i m_i \vec{\gamma}(M_i) \\ \vec{\delta}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{\gamma}(M_i) \end{cases}$$

Le système étudié n'est pas nécessairement indéformable comme pour le torseur cinétique. Le moment dynamique obéit aussi de la même manière à la formule de transport des moments. Les moments dynamiques en deux points quelconques A et B sont liés par :

$$\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{D}$$

4.2. Calcul de la résultante dynamique

Soit G le centre d'inertie du système dans le repère R , la résultante dynamique s'écrit :

$$\vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm = \int_S \frac{d\vec{V}(M)}{dt} dm = \frac{d}{dt}\int_S \vec{V}(M)dm = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V}(G))}{dt} = m\vec{\gamma}(G)$$

Si la masse du système est constante, la résultante dynamique est égale au produit de la masse par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\vec{D} = m\vec{\gamma}(G)$$

La résultante du torseur dynamique est égale à la quantité d'accélération du centre d'inertie du système affectée de la masse totale.

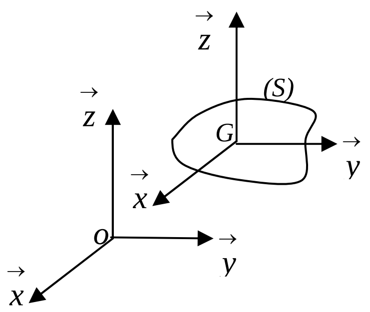
4.3. Théorème de Koënig relatif au moment dynamique

Soit $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G / R_0) = \vec{0}$

Nous allons chercher une relation entre :

- le moment dynamique du système en G dans son mouvement par rapport à R_0 **et**
- le moment dynamique du système en G dans son mouvement par rapport à R_G .



Soit M un point du système matériel:

Son accélération dans le repère R_0 est donnée par : $\vec{\gamma}^{0}(M) = \vec{\gamma}^{0}(G) + \vec{\gamma}^{G}(M)$

Son moment dynamique au point G dans R_0 s'écrira : $\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^{0}(M)dm$

Son moment dynamique au point G dans R_G s'écrira : $\vec{\delta}_{G/R_G} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^{G}(M)dm$

Alors : $\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\gamma}^{0}(G) + \vec{\gamma}^{G}(M) \right) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^{0}(G)dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^{G}(M)dm$

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{\gamma}^{0}(G) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^{G}(M)dm$$

or nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ on obtient finalement :

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^{G}(M)dm = \vec{\delta}_{G/R_G}$$

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \vec{\delta}_{G/R_G}$$

Le moment dynamique en G centre d'inertie du système est le même, qu'il soit présenté dans le repère R_0 ou dans le repère R_1. En un point A quelconque de l'espace nous aurons par la formule de transport : $\vec{\sigma}_{A/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^{0}(G)$

Nous avons ainsi le théorème de Koënig pour le moment dynamique.

4.4. Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique

Soit A un point quelconque du repère R_0 pas nécessairement un point du système matériel et un point M du système matériel. Nous avons le moment cinétique au point A qui est donné par : $\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M)dm$

Dérivons cette expression :

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M)\right)dm = \int_S \frac{d^0\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{V}^0(M)dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d^0\vec{V}^0(M)}{dt}dm$$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \frac{d^0\overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{V}^0(M)dm + \vec{\delta}_A$$

or nous avons : $\dfrac{d^0\overrightarrow{AM}}{dt} = \vec{V}^0(M) - \vec{V}^0(A)$

$$\frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \left(\vec{V}^0(M) - \vec{V}^0(A)\right) \wedge \vec{V}^0(M)dm + \vec{\delta}_A \quad \Rightarrow \quad \frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} = -\vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G) + \vec{\delta}_A$$

on obtient ainsi la relation finale entre le moment cinétique et le moment dynamique

$$\vec{\delta}_A = \frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G)$$

Cette relation ne doit en aucun cas être confondue avec la formule de transport.

4.5. Cas particuliers

Dans certains cas particuliers la dérivée du torseur cinétique est égale au torseur dynamique :

$$\vec{\delta}_A = \frac{d^0\vec{\sigma}_A}{dt} \quad \textbf{Si :} \begin{cases} 1)\ A \textit{ est fixe dans } R_0 & \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) = \vec{0} \\ 2)\ A \textit{ est confondu avec } G & \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) \wedge \vec{V}^0(G) = \vec{0} \\ 3)\ \vec{V}^0(A) // \vec{V}^0(G) = \vec{0} & \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) \wedge \vec{V}^0(G) = \vec{0} \end{cases}$$

Dans ces trois cas particuliers seulement, nous pouvons écrire :

$$\vec{D}_A = \frac{d\vec{C}_A}{dt} \quad \text{avec} \quad [D]_A = \begin{cases} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{cases} \quad \text{et} \quad [C]_A = \begin{cases} \vec{P} \\ \vec{\sigma}_A \end{cases}$$

5. Energie cinétique

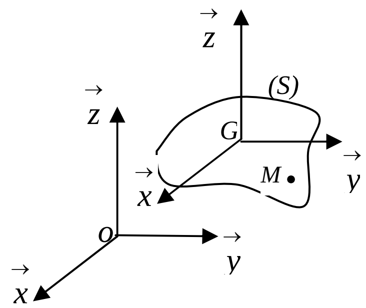
5.1. Définition

L'énergie cinétique d'un système matériel continu *(S)* en mouvement par rapport à un repère fixe R_0 est définie par la quantité scalaire exprimée par la relation : $E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)^2 dm$

5.2. Théorème de Koënig relatif à l'énergie cinétique

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G/R_0)=\vec{0}$



Nous allons chercher une relation entre :

- L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à R_0 **et**
- L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à R_G

Soit M un point du système matériel. La loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{V}^0(M)=\vec{V}^0(G)+\vec{V}^G(M)$$

en remplaçant cette expression dans celle de l'énergie cinétique nous aurons :

$$E_C^0=\int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)+\vec{V}^G(M)\right)^2 dm=\frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2\int_S dm+\int_S \vec{V}^0(G)\bullet\vec{V}^G(M)dm+\frac{1}{2}\int_S\left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

or nous avons : $\vec{V}^G(M)=\dfrac{d^G\overrightarrow{GM}}{dt}$ dans le repère R_G

$$E_C^0=\frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2\int_S dm+\vec{V}^0(G)\bullet\frac{d}{dt}\int_S\overrightarrow{GM}dm+\frac{1}{2}\int_S\left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

nous avons aussi par définition du centre d'inertie que : $\int_S\overrightarrow{GM}dm=\vec{0}$

L'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 \int_S dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

qui s'écrit aussi sous la forme réduite : $E_C^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 \int_S dm \; + \; E_C^G$

L'énergie cinétique du système *(S)* en mouvement quelconque par rapport au repère R_0 est égale à l'énergie cinétique du système dans son mouvement autour de son centre d'inertie *G* augmentée de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de la masse totale du système.

Cette relation constitue le théorème de Koënig pour l'énergie cinétique.

5.3 Solide indéformable en mouvement quelconque

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe et $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à un solide indéformable et de centre de d'inertie *G.*

Le solide est en mouvement quelconque tel que $O_1 \in (S)$. La vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0 est : $\vec{\Omega}_1^0$

Soit M un point quelconque du solide, nous avons par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

L'énergie cinétique du solide *(S)* est donnée par :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)^2 dm = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)^2 dm$$

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)\left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) dm$$

$$= \vec{V}^0(O_1) \bullet \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right) dm + \int_S \frac{1}{2}\vec{V}^0(M) \bullet \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) dm$$

$$= \frac{1}{2}\vec{V}^0(O_1) \bullet m\vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \int_S \frac{1}{2}\overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{V}^0(M) dm$$

L'expression du moment cinétique déjà développée auparavant est donnée par :

$$\vec{\sigma}^0(O_1) = \int_S \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{V}^0(M) dm$$

Nous avons alors l'énergie cinétique en fonction du moment cinétique du solide:

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\vec{V}^0(O_1) \bullet m\vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \vec{\sigma}^0(O_1)$$

Si le centre O_1 du repère R_1 est confondu avec le centre d'inertie G du solide : $O_1 \equiv G$ alors :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \vec{\sigma}^0(G)$$

Le moment cinétique en G s'écrit : $\vec{\sigma}^0(G) = I_G\,\vec{\Omega}_1^0$ on aboutit à la relation finale :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_1^{0T} \bullet I_G\,\vec{\Omega}_1^0$$

$\frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2$: est l'énergie cinétique de translation du solide

$\vec{\Omega}_1^{0T} \bullet I_G\,\vec{\Omega}_1^0$: est l'énergie cinétique de rotation du solide autour de son centre d'inertie G.

L'énergie cinétique totale d'un solide en mouvement quelconque dans l'espace est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation de son centre d'inertie affectée de la masse du solide et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre d'inertie.

Cette relation constitue le théorème de Koënig pour l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique totale peut s'exprimer en fonction des torseurs cinématiques et cinétique au point O_1 en la mettant sous la forme :

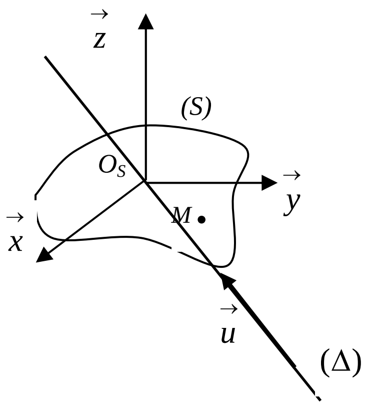
$$E_C^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(M) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} m\vec{V}^0(G) \\ \vec{\sigma}^0(O_1) \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique totale d'un solide est égale à la moitié du produit scalaire du torseur cinématique par le torseur cinétique au point O_1 exprimé dans le repère R_0.

$$E_C^0 = \frac{1}{2}[V]_{O_1} \bullet [C]_{O_1}$$

5.4. Solide indéformable en mouvement de rotation pur

Dans le cas où le solide est en mouvement de rotation pur autour d'un axe Δ passant par un point O_S du solide et de vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que : $\Delta(O_S, \vec{u})$ avec $\vec{\Omega}_S^0 = \Omega \vec{u}$ .Le moment d'inertie par rapport à cet axe est donné par : $I_\Delta = \vec{u}^T . I_{O_S} . \vec{u}$



L'énergie cinétique de rotation pure est donnée par :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_S^{0\,T} . I_{O_S} . \vec{\Omega}_S^0 = \frac{1}{2} \Omega \vec{u}^T . I_{O_S} . \Omega \vec{u} = \frac{1}{2} \Omega^2 \vec{u}^T . I_{O_S} . \vec{u} = \frac{1}{2} \Omega^2 . I_\Delta$$

5.5. Energie cinétique d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solides *(S)* constitué des solides *(S_1 , S_2, S_3, ……S_n)* dans un repère R_0 est égale à la somme des énergies cinétiques de chaque solide exprimée dans le même repère.

$$E_C^0(S) = \sum_i E_C^0(S_i)$$