Cours de Mécanique du Solide

Niveau Licence

Hery RAMAROTAFIKA

Maître de conférences

***L**aboratoire DYACO - Faculté des Sciences - Universitéd'Antananarivo*
Tél : 034 07 531 11 – 032 07 531 11
Mail: hery_ramarotafika@yahoo.com

CHAPITRE IV

GEOMETRIE DES MASSES

GEOMETRIE DES MASSES

Objectifs du chapitre

Afin de comprendre et de pouvoir décrire les mouvements des systèmes matériels, il est important de connaître la répartition géométrique afin de se préparer aux concepts de cinétiques et dynamiques des solides.

L'intérêt de cette partie est de nous permettre de connaître un certain nombre de données sur la répartition des masses des systèmes. Nous, nous intéresserons à la détermination :

- des centres de masse du solide
- des moments d'inertie, des produits d'inertie par rapport à des axes et aux tenseurs d'inertie des solides quelconques dans différents repères.

L'opérateur d'inertie sert à caractériser la répartition des masses d'un solide, afin d'étudier par la suite, un mouvement quelconque de celui-ci.

1. Notions de masse d'un système matériel

A chaque système matériel (S) est associé, une quantité scalaire positive invariable en mécanique classique, appelée : **masse du système**

La masse d'un solide fait référence à la quantité de matière contenue dans le volume de ce solide.

Cet invariant scalaire obéit aux propriétés mathématiques suivantes :

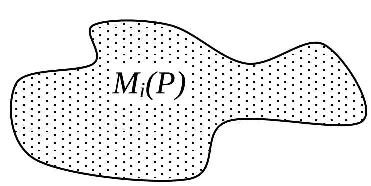
Additivité des masses

La masse d'un système matériel (S) est égale à la somme des masses qui le composent.

Exemple : masse d'un livre = somme des masses des feuilles qu'il contient.

La masse d'un système matériel est définie par la grandeur scalaire suivante :

$$M = \int_{P \in (S)} dm(P)$$



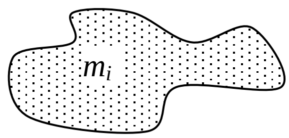
L'élément $dm(P)$ est la mesure de la masse au voisinage du point (P).

Un système matériel est un ensemble discret ou continu des points matériels ou encore une réunion d'ensembles continus ou discrets de points matériels.

1.1. Systèmes discrets

La masse d'un système discret est la somme des n points matériels discrets de masses m_i :

$$m = \sum_{i=1}^{n} m_i$$



1.2. Systèmes continus

Si le système est constitué d'un ensemble continu de masses, la masse du système s'écrirait sous la forme d'une intégrale continue : $m = \int_{(S)} dm(P)$

- **Le système (S) est un volume**

La masse s'écrirait : $m = \int_V \rho(P)dv$

$\rho(P)$ est la masse volumique au point P et dv un élément de volume du solide (S)

- **Le système (S) est une surface :** (cas des plaques fines) l'épaisseur est négligeable devant les deux autres dimensions.

La masse s'écrirait : $m = \int_S \sigma(P)ds$

$\sigma(P)$ est la densité surfacique au point P et ds un élément de surface du solide (S)

- **Le système (S) est linaire :** (cas des tiges fines) les deux dimensions sont négligeables devant la longueur de la tige.

La masse s'écrirait : $m = \int_L \lambda(P)dl$

$\lambda(P)$ est la densité linéique au point P et -un élément de longueur du solide (S)

Dans les systèmes homogènes (solides homogènes) la densité des solides est constante.

2. Centre d'inertie (centre de masse) des solides

On appelle centre d'inertie d'un système matériel (S) le point G défini par la relation :

$$\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm = \vec{0}$$

où P est un point du solide avec $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et $\overrightarrow{OG} = x_G\,\vec{i} + y_G\,\vec{j} + z_G\,\vec{k}$

Soit O le centre d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ nous pouvons écrire dans ce repère : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{GP}$ $\int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm = \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OG}\, dm + \underbrace{\int_{P\in(S)} \overrightarrow{GP}\, dm}_{=0}$ alors nous obtenons :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{\int_{P\in(S)} dm} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm \quad ; \quad \overrightarrow{OG} = \frac{1}{m} \int_{P\in(S)} \overrightarrow{OP}\, dm$$

Les coordonnées du centre d'inertie G d'un système homogène sont déterminées par des calculs utilisant les éléments infinitésimaux tel que : *dl* pour les éléments linéaires, *ds* pour les éléments surfaciques et *dv* pour les éléments volumiques. Ainsi nous pouvons écrire :

$$x_G = \frac{\int_{P\in(S)} x\ dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} x\ dm\,, \quad y_G = \frac{\int_{P\in(S)} y\ dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} y\ dm \quad , \quad z_G = \frac{\int_{P\in(S)} z\ dm}{\int_{P\in(S)} dm} = \frac{1}{m}\int_{P\in(S)} z\ dm$$

Remarques :

- Le centre d'inertie des masses homogènes coïncide avec le centre d'inertie de leurs volumes s'ils sont volumiques ou de leurs surfaces s'ils sont surfaciques.
- Si le solide présente des éléments de symétrie (axes ou plans) son centre d'inertie est nécessairement situé sur ces éléments de symétrie.

3. Centre d'inertie d'un système composé

Dans la réalité, c'est le cas le plus souvent rencontré, les calculs sont élémentaires en raisonnant sur chacun des éléments qui composent les systèmes.

On détermine d'abord le centre d'inertie de chaque élément Δ_i du système au point G_i , puis on détermine le centre d'inertie G du système comme barycentre des points G_i .

Soient les éléments d'un système composé : $\Delta_1, \Delta_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \Delta_n$ ayant pour centres d'inertie respectifs : $G_1, G_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, G_n$ ayant pour vecteurs positions dans un repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \vec{r}_n$:

Le centre d'inertie de ce système est donné par : $\vec{r}_G = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}$; où Δ_i est la i$^{\text{ième}}$ quantité.

Elle peut être un élément de longueur, de surface, de volume ou de masse.

Le centre d'inertie du système aura pour coordonnées :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i} \quad , \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \ \Delta_i}{\sum_{i=1}^{n} \Delta_i}$$

où : x_i, y_i, z_i sont les coordonnées des points G_i où l'élément Δ_i est concentré.

Si les Δ_i sont des éléments de masses alors on peut écrire :

$$x_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i \ \mathrm{m}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad y_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i \ \mathrm{m}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i} \quad , \quad z_G = \frac{\sum_{i=1}^{n} z_i \ \mathrm{m}_i}{\sum_{i=1}^{n} m_i}$$

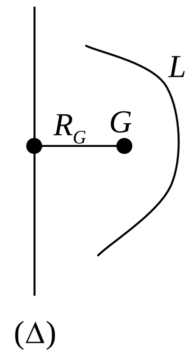
4. Théorème de Guldin

Une seconde méthode pour la détermination des centres d'inertie des solides linéaires ou surfaciques homogènes fut trouvée par Guldin. Elle consiste à faire tourner ces solides autour des axes qu'ils n'interceptent pas. Les solides linéaires décriront des surfaces et les solides surfaciques décriront des volumes.

4.1. 1er Théorème de Guldin

La surface S engendrée par la rotation d'un arc de courbe de longueur L autour d'un axe (Δ) sans l'intercepter dans son plan est égale au produit de la longueur L de l'arc par la longueur de la circonférence $2\pi R_G$ décrite par le centre d'inertie G de l'arc de courbe.

Soit L la longueur de l'arc et G son centre d'inertie.



La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie G par rapport à l'axe (Δ) est donnée par : $2\pi R_G$, alors la surface décrite par cet élément est égale à :

$$S_{/\Delta} = 2\pi\ R_G\ L \qquad \text{d'où} \qquad R_G = \frac{S_{/\Delta}}{2\pi L}$$

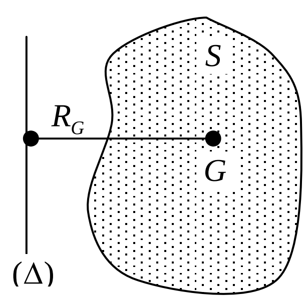
Dans le cas d'un système homogène de plusieurs éléments on aura : $R_G = \dfrac{S_{totale/\Delta}}{2\pi L_{totale}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe $(O,\vec{y})$ nous aurons : $x_G = \dfrac{S_{/oy}}{2\pi L}$

si l'axe (Δ) représente l'axe $(O,\vec{x})$ nous aurons : $y_G = \dfrac{S_{/ox}}{2\pi L}$

4.2. 2ième Théorème de Guldin

Une surface plane homogène S , limitée par une courbe fermée simple et tournant autour d'un axe (Δ) sans le rencontrer engendre un volume V.



Le volume V engendré est égal au produit de la surface S par la longueur du périmètre $2\pi R_G$ décrit par le centre d'inertie G de cette surface autour de l'axe (Δ) .

Soit S la surface et R_G la distance de son centre d'inertie à (Δ).

La longueur (périmètre) décrite par la rotation du centre d'inertie G par rapport à l'axe (Δ) est donnée par : $2\pi R_G$, alors le volume décrit par cette surface est égal à :

$$V_{/\Delta} = 2\pi \ R_G \ \text{S} \qquad \text{d'où} \qquad R_G = \frac{V_{/\Delta}}{2\pi S}$$

Dans le cas d'un système homogène composé de plusieurs surfaces on aura :

$$R_G = \frac{V_{totale/\Delta}}{2\pi \ \text{S}_{totale}}$$

si l'axe (Δ) représente l'axe $(O,\vec{y})$ nous aurons : $x_G = \dfrac{V_{total/oy}}{2\pi \ S_{totale}}$

si l'axe (Δ) représente l'axe $(O,\vec{x})$ nous aurons : $y_G = \dfrac{V_{total/ox}}{2\pi S_{totale}}$

5. Opérateur d'inertie (tenseur d'inertie) : Moment d'inertie et produit d'inertie

La notion d'opérateur d'inertie permet d'exprimer les divers torseurs, déjà vue précédemment, afin de faciliter l'étude de la cinétique et de la dynamique des solides.

5.1 Opérateur produit vectoriel

Considérons deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{V}$ dont les composantes sont exprimées dans une base orthonormée directe $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$:

$$\vec{u} = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k} \quad , \quad \vec{V} = X \vec{i} + Y \vec{j} + Z \vec{k}$$

Le produit vectoriel des deux vecteurs s'écrit : $\vec{u} \wedge \vec{V} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_y Z - u_z Y \\ u_z X - u_x Z \\ u_x Y - u_y X \end{bmatrix}$

Comme le vecteur $\vec{u}$ est connu et $\vec{V}$ quelconque, on constate que l'on peut passer du vecteur $\vec{V}$ au vecteur $\vec{u} \wedge \vec{V}$ par une opération linéaire très simple à vérifier. Le produit vectoriel est distributif, par rapport à l'addition et à la multiplication, nous pouvons alors écrire :

$\forall\ \lambda \in IR$ et $\forall \vec{V} \in IR^3$ on a : $\vec{u} \wedge \lambda \vec{V} = \lambda(\vec{u} \wedge \vec{V})$

$\forall \vec{V_1}, \vec{V_2} \in IR^3$ on a aussi : $\vec{u} \wedge (\vec{V_1} + \vec{V_2}) = \vec{u} \wedge \vec{V_1} + \vec{u} \wedge \vec{V_2}$

on peut conclure que l'on passe du vecteur $\vec{V}$ au vecteur $\vec{u} \wedge \vec{V}$, par application d'un opérateur linéaire que l'on notera : $[A]$; d'où l'écriture : $\vec{u} \wedge \vec{V} = [A]\vec{V}$ qui se traduit sous forme matricielle dans la base orthonormée $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par :

$$\begin{bmatrix} u_y Z - u_z Y \\ u_z X - u_x Z \\ u_x Y - u_y X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = [A] \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}$$

La matrice $\begin{bmatrix} 0 & -u_z & u_y \\ u_z & 0 & -u_x \\ -u_y & u_x & 0 \end{bmatrix}$ est antisymétrique dans cette base.

Pour déterminer le tenseur d'inertie, nous avons besoin d'un nouvel opérateur qui est le double produit Vectoriel : $\left(\vec{u} \wedge (\vec{V} \wedge \vec{u})\right) = -\left(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{V})\right)$ car le produit vectoriel est antisymétrique. D'après les relations précédentes, nous pouvons écrire cet opérateur sous la forme : $\left(\vec{u} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{V})\right) = \vec{u} \wedge \left([A]\vec{V}\right) = [A]^2 \vec{V}$.

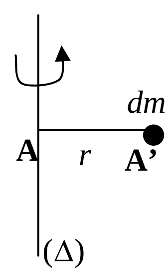
Cet opérateur est aussi un opérateur linéaire et son écriture sous la forme matricielle dans la base $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est la suivante : $[A]^2 = \begin{bmatrix} -(u_y^2+u_z^2) & u_x u_y & u_x u_z \\ u_x u_y & -(u_x^2+u_z^2) & u_y u_z \\ u_x u_z & u_y u_z & -(u_x^2+u_y^2) \end{bmatrix}$

On voit bien que la matrice $[A]^2$ est symétrique et de même pour la matrice $[B] = -[A]^2$, alors nous utiliserons cette dernière afin de représenter les tenseurs d'inertie d'un solide dans une base orthonormée $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

5.2. Opérateur d'inertie

5.2.1. Définition du moment d'inertie d'un solide

Soit un solide de masse dm lié à une tige *(AA')* de masse négligeable, en rotation autour d'un axe (Δ). Si on applique un couple au système (tige + masse), il se mettra à tourner librement autour de l'axe (Δ). L'étude dynamique de ce système se fera dans les prochains chapitres. Le temps nécessaire à cet élément de masse dm pour atteindre une vitesse de rotation donnée est proportionnel à la masse dm et au carré de la distance r qui sépare la masse de l'axe (Δ). C'est pour cette raison que le produit $r^2 dm$ est appelé moment d'inertie de la masse dm par rapport à l'axe (Δ).



5.2.2. Matrice d'inertie : Moments et produits d'inertie d'un solide

Soit un repère orthonormé $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ et un solide *(S)* tel que $O \in (S)$. Le moment d'inertie de ce solide par rapport au point O est obtenu en intégrant la relation $r^2 dm$. $I_O = \int_{(S)} r^2 dm$

les intégrales sont calculées sur le solide. Celui-ci peut être linéaire, surfacique ou volumique. L'élément d'intégration *dm(P)* est situé en un point P du solide.

L'opérateur d'inertie s'écrit : $I_O(\vec{V}) = -\int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{V})dm$, le vecteur $\vec{V}$ est indépendant du point P. Le point P est un point quelconque du solide *(S)* et *dm* est l'élément de masse entourant le point P. Le tenseur d'inertie du solide au point O est représenté dans la base $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ par une matrice notée $I_O(S)_{/R}$: appelée matrice d'inertie en O dans la base $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ du solide *(S)* :

$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

La matrice $I_O(S)_{/R}$ est symétrique, réelle et diagonisable. Elle admet trois valeurs propres réelles et trois directions propres réelles et orthogonales.

- Les valeurs propres sont appelées moments principaux d'inertie ;
- Les directions propres sont appelées axes principaux d'inertie.

Si le point P a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le vecteur $\overrightarrow{OP}$ a pour expression : $\overrightarrow{OP} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$ et d'après ce que l'on vient de voir précédemment, $I_O(\vec{V}) = -\int_{(S)} \overrightarrow{OP} \wedge (\overrightarrow{OP} \wedge \vec{V})dm$, les éléments de la matrice d'inertie s'écriraient sous la forme :

Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Ox)* : $I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm$

Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Oy)* : $I_{yy} = \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm$

Moment d'inertie par rapport à l'axe *(Oz)* : $I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm$

Moment d'inertie par rapport au plan *(Oxy)* : $I_{xy} = \int_{(S)} xydm$: ou produit d'inertie

Moment d'inertie par rapport au plan *(Oxz)* : $I_{xz} = \int_{(S)} xzdm$: ou produit d'inertie

Moment d'inertie par rapport au plan *(Oyz)* : $I_{yz} = \int_{(S)} yzdm$: ou produit d'inertie

5.2.3. Solides présentant des plans de symétrie

Certains solides présentent des formes particulières admettant des plans de symétrie par rapport aux axes du repère $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ choisi. Pour chaque plan de symétrie, les produits d'inertie sur les deux autres plans sont nuls :

(xOy) plan de symétrie ====> $I_{xz} = I_{yz} = 0$

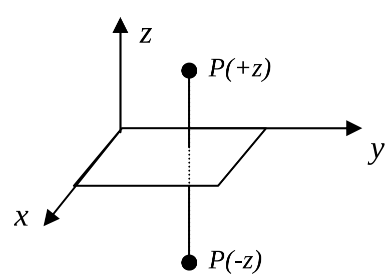
(yOz) plan de symétrie ====> $I_{xz} = I_{xy} = 0$

(xOz) plan de symétrie ====> $I_{xy} = I_{yz} = 0$

a) si *(xOy)* est un plan de symétrie du solide

P(+z) est symétrique du point *P(-z)* par rapport au plan *(xOy)* d'où :

$\int_{P\in(S)} xzdm = 0$ et $\int_{P\in(S)} yzdm = 0$ donc $I_{xz} = I_{yz} = 0$



$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas l'axe $\overrightarrow{Oz}$ qui est perpendiculaire au plan *(xOy)* est un axe principal d'inertie ; nous pouvons le montrer facilement par le produit suivant :

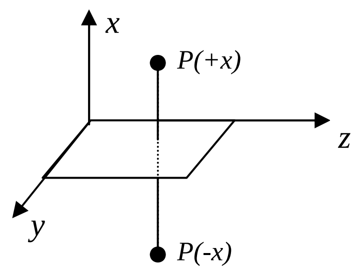
$$\begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = I_{zz} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

En effet, tout axe orthogonal à un plan de symétrie matérielle est axe principal d'inertie sur tous les points du plan.

b) si *(yOz)* est un plan de symétrie du solide

P(+x) est symétrique du point *P(-x)* par rapport au plan *(yOz)* d'où :

$\int_{P\in(S)} xzdm = 0$ et $\int_{P\in(S)} xydm = 0$ donc $I_{xz} = I_{xy} = 0$



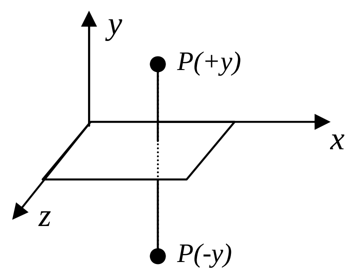
$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & -I_{yz} \\ 0 & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas l'axe $\overrightarrow{Ox}$ perpendiculaire au plan *(yOz)* est un axe principal d'inertie .

c) si *(xOz)* est un plan de symétrie du solide

P(+y) est symétrique du point *P(-y)* par rapport au plan *(xOz)* d'où :

$\int_{P\in(S)} yzdm = 0$ et $\int_{P\in(S)} xydm = 0$ donc $I_{yz} = I_{xy} = 0$



$$I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & -I_{xz} \\ 0 & I_{yy} & \\ -I_{xz} & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans ce cas l'axe $\overrightarrow{Oy}$ perpendiculaire au plan *(xOz)* est un axe principal d'inertie.

5.2.4 Solides présentant un axe de symétrie

Soit $\overrightarrow{Ox}$ un axe de symétrie matérielle d'un solide *(S)*. Pour chaque élément de masse *dm* du solide ayant une coordonnée *(+x)* nous pouvons lui associer un élément *dm* symétrique par rapport à l'axe $\overrightarrow{Ox}$ et de coordonnée *(-x)* de telle sorte que: $\int_{P\in(S)} xzdm = 0$ et $\int_{P\in(S)} xydm = 0$

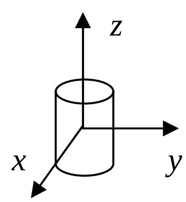
On remarque de la même manière que précédemment, l'axe $\overrightarrow{Ox}$ est un axe principal d'inertie. Tout axe de symétrie matériel est un axe principal d'inertie sur tous les points de l'axe.

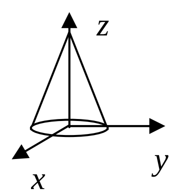
Remarques

- Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses plans sont des plans de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.
- Tout repère orthogonal direct, dont deux de ses axes sont des axes de symétrie matérielle du solide, est un repère principal d'inertie du solide.

5.3. Solides à symétrie de révolution

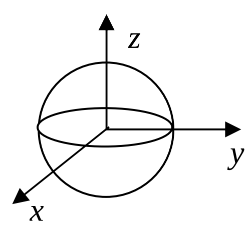
Dans le cas des solides ayant un axe de révolution tel que (cylindre, disque, cône, etc…), la masse est répartie de façon symétrique autour de cet axe. Soit un cylindre d'axe de révolution $\overrightarrow{Oz}$ dans un repère orthonormé $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. Tout plan passant par l'axe $\overrightarrow{Oz}$ est un plan de symétrie, d'après ce que l'on a vu précédemment tous les produits d'inertie sont nuls. $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz}$





5.4. Solides à symétrie sphériques

Pour tout solide à symétrie sphérique (sphère pleine où creuse) de centre O, tous les repères $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ ayant pour centre le même point O sont des repères principaux d'inertie.



Les trois axes du repère jouent le même rôle, alors tous les moments d'inertie sont égaux :

$I_{xx} = I_{yy} = I_{zz}$ et tous les produits d'inertie sont nuls car tous les plans sont des plans de symétrie : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$

Nous pouvons écrire :

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 3I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)dm + \int_{(S)} (x^2 + z^2)dm + \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm = 2\int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)dm$$

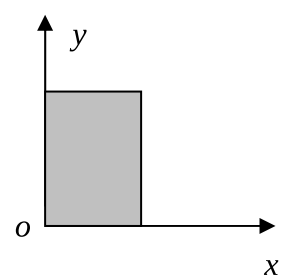
$$I_{xx} = \frac{2}{3}\int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2)dm$$

5.5. Solides plans

Dans le cas des solides plans, l'une des coordonnées de l'élément dm est nulle. Si le solide est dans le plan (xOy) alors z = 0 .

On déduit immédiatement que : $I_{xx} = \int_{(S)} y^2 dm$, $I_{yy} = \int_{(S)} x^2 dm$ d'où :

$$I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2)dm = I_{xx} + I_{yy} \text{ ; et } I_{xz} = I_{yz} = 0 \text{ ; } \quad I_{xy} = \int_{(S)} xydm$$



Le moment d'inertie par rapport à l'axe perpendiculaire au plan du solide est égal à la somme des moments par rapport aux deux axes du plan du solide.

5.6. Moments d'inertie par rapport à *O* , aux axes et aux plans du repère $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

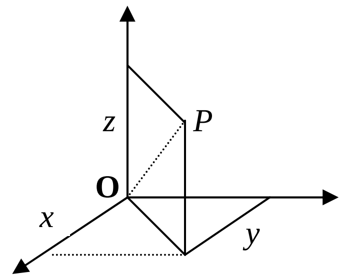
Le moment d'inertie d'un solide *(S)* déjà défini précédemment par rapport à un point *O*, un axe où un plan est donné par l'intégrale : $\int_{(S)} r^2 dm(P)$ où P est un point du solide et r la distance du point *P* par rapport au point *O*, par rapport à l'axe ou par rapport aux plans du repère.

a) Moment d'inertie par rapport au point *O*.

il est donné par : $I_O = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance $OP^2 = x^2 + y^2 + z^2$

alors : $I_O = \int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm(P)$



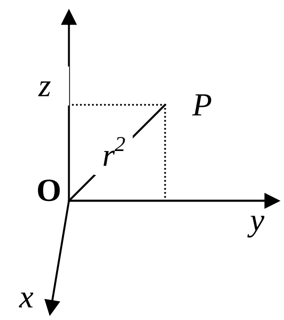
b) Moment d'inertie par rapport aux axes

b.1.) axe $\overrightarrow{Ox}$

il est donné par : $I_{xx} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Ox;

d'où $OP^2 = y^2 + z^2$; alors : $I_{xx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm(P)$

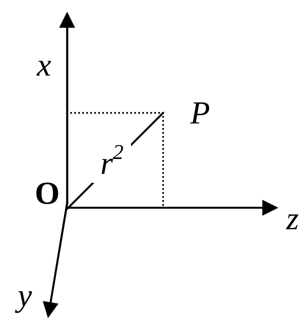


b.2.) axe $\overrightarrow{Oy}$

il est donné par : $I_{yy} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Oy ;

d'où $OP^2 = x^2 + z^2$; alors : $I_{xx} = \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm(P)$

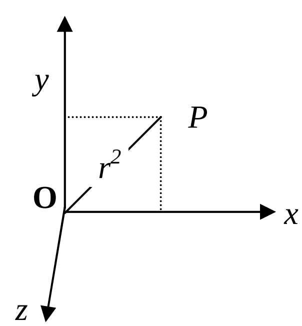


b.3.) axe $\overrightarrow{Oz}$

il est donné par : $I_{zz} = \int_{(S)} r^2 dm(P)$

où r^2 : représente la distance du point P à l'axe Oz ;

d'où $OP^2 = x^2 + y^2$; alors : $I_{zz} = \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm(P)$



Les moments d'inertie par rapport aux plans *(xOy)*, *(xOz)*, *(yOz)* sont donnés en fonction de la distance qui sépare le point *(P)* du plan considéré, ce qui se traduit par les équations suivantes :

$$I_{xOy} = \int_{(S)} z^2 dm(P) \quad , \quad I_{xOz} = \int_{(S)} y^2 dm(P) \quad , \quad I_{yOz} = \int_{(S)} x^2 dm(P)$$

Il résulte des différentes relations précédentes que :

a) La somme des moments d'inertie d'un solide par rapport aux trois axes d'un repère orthonormé est égale au double du moment d'inertie du solide par rapport au centre du repère.

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = \int_{(S)} (y^2 + z^2) dm + \int_{(S)} (x^2 + z^2) dm + \int_{(S)} (x^2 + y^2) dm$$

$$= 2\int_{(S)} (x^2 + y^2 + z^2) dm = 2I_O$$

$$I_{xx} + I_{yy} + I_{zz} = 2I_O$$

b) La somme des moments d'inertie d'un solide par rapport à deux plans perpendiculaires est égale au moment d'inertie du solide par rapport à l'axe d'intersection des deux plans.

$$I_{yOx} + I_{zOx} = I_{xx} \quad , \quad I_{xOy} + I_{zOy} = I_{yy} \quad , \quad I_{xOz} + I_{yOz} = I_{zz}$$

6. Détermination des axes principaux et des moments principaux d'inertie

Soit une matrice d'inertie d'un solide *(S)*, dans une base orthonormée $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de la forme : $I_O(S)_{/R} = \begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}$, il existe au moins une base orthonormée de même centre O et de vecteurs unitaires $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, notée $R_P(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ appelée base principale ou repère principal d'inertie au point *O*.

Dans cette base principale, les axes $(O,\vec{e_1})$, $(O,\vec{e_2})$, $(O,\vec{e_3})$ sont les axes principaux d'inertie et la matrice d'inertie est une matrice diagonale. Les éléments de cette diagonale sont appelés moments principaux d'inertie dans cette base.

La matrice d'inertie dans la base $R_P(O,\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ s'écrirait : $I_O(S)_{/R_P} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$

avec I_1, I_2, I_3 moments principaux.

Les axes $(O,\vec{e_1})$, $(O,\vec{e_2})$, $(O,\vec{e_3})$ étant des axes principaux, nous pouvons écrire :

$I_O(S)_{/R}\,\vec{e_1} = I_1\,\vec{e_1}$, $I_O(S)_{/R}\,\vec{e_2} = I_2\,\vec{e_2}$, $I_O(S)_{/R}\,\vec{e_3} = I_3\,\vec{e_3}$

D'une façon générale nous aurons :

$$\begin{bmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} A-I_1 & -F & -E \\ -F & B-I_2 & -D \\ -E & -D & C-I_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vec{e_1} \\ \vec{e_2} \\ \vec{e_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

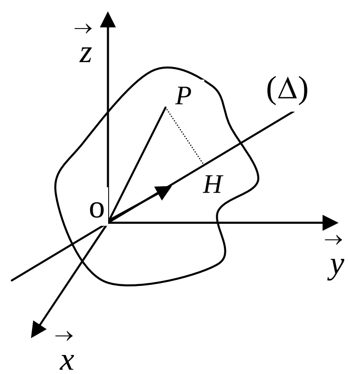
Les vecteurs unitaires $(\vec{e_1},\vec{e_2},\vec{e_3})$ ne sont pas nuls, alors ce système admet une solution si le déterminant de la matrice est nul : $\begin{vmatrix} A-I_1 & -F & -E \\ -F & B-I_2 & -D \\ -E & -D & C-I_3 \end{vmatrix} = 0$

La solution de cette équation scalaire donne les trois valeurs propres qui sont les moments principaux d'inertie. En reportant ces valeurs propres dans l'équation $I_O(S)_{/R}\,\vec{e_i} = I_i\,\vec{e_i}$ on obtient les vecteurs propres qui ne sont autre que les directions principales.

7. Moment d'inertie par rapport à un axe $\Delta(O,\vec{n})$ quelconque dans un repère orthonormé direct $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$

Soit *(P)* un point du solide *(S)* de masse m et un axe (Δ) passant par le centre O du repère de vecteur unitaire $\vec{n}$. Le moment d'inertie par rapport à l'axe (Δ) est donné par :

$I_\Delta = \int_{(P\in S)} r^2 dm = \int_{(P\in S)} HP^2 dm$; avec $HP = \left|\overrightarrow{HP}\right| = r$; distance de l'élément matériel *dm(P)* à l'axe (Δ), H est la projection orthogonale de P sur cet axe.



Nous avons : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HP}$, on déduit que : $\vec{n}\wedge(\overrightarrow{OH}+\overrightarrow{HP}) = \vec{n}\wedge\overrightarrow{OH} + \vec{n}\wedge\overrightarrow{HP}$

Comme $\begin{cases} \vec{n} // \overrightarrow{OH} \\ \vec{n} \perp \overrightarrow{HP} \end{cases}$ et $\left|\vec{n}\right| = 1$ alors : $\left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{OP}\right| = \left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{HP}\right| = \left|\overrightarrow{OP}\right| = r$

Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{OP}$ ont pour coordonnées $\vec{n} = \begin{cases} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{cases}$ et $\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

Les composantes du vecteur unitaire $\vec{n}$ porté par l'axe (Δ) sont appelées cosinus directeurs.

Nous avons alors $\left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{OP}\right| = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta z - \gamma y \\ \gamma x - \alpha z \\ \alpha y - \beta x \end{pmatrix}$

D'où : $\left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{OP}\right|^2=\left|\vec{n}\wedge\overrightarrow{HP}\right|^2=(\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2=r^2$

En remplaçant r^2 dans l'expression : $I_\Delta=\int_{(P\in S)} r^2dm$ on aboutit à :

$$I_\Delta=\int_{(P\in S)}\left((\beta z-\gamma y)^2+(\gamma x-\alpha z)^2+(\alpha y-\beta x)^2\right)dm$$

$$I_\Delta=\alpha^2\int_{(P\in S)}(y^2+z^2)dm+\beta^2\int_{(P\in S)}(x^2+z^2)dm+\gamma^2\int_{(P\in S)}(x^2+y^2)dm$$
$$-2\alpha\beta\int_{(P\in S)}xydm-2\alpha\gamma\int_{(P\in S)}xzdm-2\beta\gamma\int_{(P\in S)}yzdm$$

$I_\Delta=\alpha^2I_{xx}+\beta^2I_{yy}+\gamma^2I_{zz}-2\alpha\beta I_{xy}-2\alpha\gamma I_{xz}-2\beta\gamma I_{yz}$; cette expression représente l'ellipsoïde d'inertie, elle peut se mettre sous la forme matricielle suivante :

$$I_\Delta=(\alpha\quad,\beta\quad,\gamma)\begin{bmatrix}I_{xx}&-I_{xy}&-I_{xz}\\-I_{xy}&I_{yy}&-I_{yz}\\-I_{xz}&-I_{yz}&I_{zz}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\vec{n}^T.I_O(S).\vec{n}$$

Le moment d'inertie d'un solide (S) par rapport à un axe (Δ) passant par un point O et de vecteur unitaire $\vec{n}$ est égal au produit doublement contracté du tenseur d'inertie O par le vecteur unitaire $\vec{n}$.

8. Produit d'inertie par rapport à deux axes orthogonaux $\Delta(O,\vec{u})$ et $\Delta'(O,\vec{v})$

8.1. Définition

Le produit d'inertie noté I_{uv} est défini comme étant l'intégrale des coordonnées x_u et x_v du point P relativement au axes $\Delta(O,\vec{u})$ et $\Delta'(O,\vec{v})$: $I_{uv}=\int_{P(S)}x_ux_vdm$

x_u : coordonnée de P sur l'axe $\Delta(O,\vec{u})$ tel que : $x_u=\overrightarrow{OP}\bullet\vec{u}$

x_v : coordonnée de P sur l'axe $\Delta'(O,\vec{v})$ tel que : $x_v=\overrightarrow{OP}\bullet\vec{v}$

Le tenseur d'inertie étant connu au point O , le produit d'inertie par rapport aux deux axes a pour expression : $I_{uv} = -\vec{v}.I_O(S).\vec{u}$

8.2. Démonstration

Deux propriétés vectorielles seront utilisées dans la démonstration de l'expression du produit d'inertie :

- le produit mixte dont on connaît la règle de permutation : $(\vec{V}_1,\vec{V}_2,\vec{V}_3) = (\vec{V}_3,\vec{V}_1,\vec{V}_2) = (\vec{V}_2,\vec{V}_3,\vec{V}_1)$
- le double produit vectoriel dont on connaît le résultat.

$$(\vec{A}\wedge\vec{B})\bullet(\vec{C}\wedge\vec{D}) = (\vec{A}\bullet\vec{C})(\vec{B}\bullet\vec{D}) - (\vec{A}\bullet\vec{D})(\vec{B}\bullet\vec{C})$$

on pose : $\vec{A} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{B} = \vec{u}$, $\vec{C} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{D} = \vec{v}$

$$(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u})\bullet(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{v}) = (\overrightarrow{OP}\bullet\vec{u})(\vec{u}\bullet\vec{v}) - (\overrightarrow{OP}\bullet\vec{v})(\vec{u}\bullet\overrightarrow{OP}) = -(\overrightarrow{OP}\bullet\vec{v})(\vec{u}\bullet\overrightarrow{OP})$$

car : $(\vec{u}\bullet\vec{v}) = 0$

$$(\overrightarrow{OP}\bullet\vec{v})(\vec{u}\bullet\overrightarrow{OP}) = -(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{u})\bullet(\overrightarrow{OP}\wedge\vec{v})$$

$$= -(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP})\bullet(\vec{v}\wedge\overrightarrow{OP})$$

$$= -\left((\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}),\ \vec{v},\ \overrightarrow{OP})\right)$$

$$(\overrightarrow{OP}\bullet\vec{v})(\vec{u}\bullet\overrightarrow{OP}) = -\left((\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP}),\ \vec{v},\ \overrightarrow{OP})\right) = -\left(\vec{v},\ \overrightarrow{OP},\ (\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP})\right) = -\vec{v}\bullet(\overrightarrow{OP}\wedge(\vec{u}\wedge\overrightarrow{OP})$$

$$= -\vec{v}\bullet\left[\vec{u}(\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OP}) - \overrightarrow{OP}(\vec{u}\bullet\overrightarrow{OP})\right] = \underbrace{-\left(\vec{v}\bullet\vec{u}\right)(\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OP})}_{1} + \underbrace{\left(\vec{v}\bullet\overrightarrow{OP}\right)(\vec{u}\bullet\overrightarrow{OP})}_{2}$$

Soit : $\overrightarrow{OP} = \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$; $\vec{u} = \begin{cases} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{cases}$; $\vec{v} = \begin{cases} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{cases}$

(1) : $-\left(\vec{v}\bullet\vec{u}\right)(\overrightarrow{OP}\bullet\overrightarrow{OP})=-(v_1u_1+v_2u_2+v_3u_3)(x^2+y^2+z^2)$

$$=-v_1u_1(x^2+y^2+z^2)-v_2u_2(x^2+y^2+z^2)-v_3u_3(x^2+y^2+z^2)$$

$$\left(\vec{v}\bullet\overrightarrow{OP}\right)(\vec{u}\bullet\overrightarrow{OP})=(v_1x+v_2y+v_3z)(u_1x+u_2y+u_3z)=v_1u_1\ x^2+v_1u_2\ xy+v_1u_3\ xz$$

(2) $\quad +v_2u_1\ xy+v_2u_2\ y^2+v_2u_3\ yz$

$$+v_3u_1\ xz+v_3u_2\ yz+v_3u_3\ z^2$$

$$(1)+(2)\ \Rightarrow x_u.x_v=-v_1u_1(y^2+z^2)-v_2u_2(x^2+z^2)-v_3u_3(x^2+y^2)$$
$$+(v_1u_2+v_2u_1)\ xy+(v_1u_3+v_3u_1)\ xz+(v_2u_3+v_3u_2\ yz$$

Le produit d'inertie est donné par l'intégrale : $I_{uv}=\int\limits_{P(S)}x_ux_v dm$ d'où

$$I_{uv}=-v_1u_1\int\limits_{P\in S}(y^2+z^2)dm-v_2u_2\int\limits_{P\in S}(x^2+z^2)dm-v_3u_3\int\limits_{P\in S}(x^2+y^2)dm$$
$$+(v_1u_2+v_2u_1)\int\limits_{P\in S}xydm+(v_1u_3+v_3u_1)\int\limits_{P\in S}xzdm+(v_2u_3+v_3u_2)\int\limits_{P\in S}yzdm$$

Cette expression s'écrira sous forme matricielle :

$$I_{uv}=(-v_1,-v_2,-v_3)\begin{bmatrix}I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz}\\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz}\\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\\ u_3\end{pmatrix}\quad\Leftrightarrow\qquad I_{uv}=-\vec{v}.I_O(S).\vec{u}$$

Le produit d'inertie du solide *(S)* par rapport aux axes orthogonaux $\Delta(O,\vec{u})$ et $\Delta'(O,\vec{v})$ est égal à l'opposé du produit doublement contracté du tenseur d'inertie $I_O(S)$ par les vecteurs unitaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

9. Changement de repère.

Soit un repère orthonormé fixe: $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et un repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation par rapport à celui-ci. A l'aide de la matrice de passage nous pouvons exprimer le moment d'inertie dans l'un des repères et le déduire dans l'autre repère et inversement.

En effet nous pouvons écrire :

$$\begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} = P_{R_1 \to R_0} \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \begin{pmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{pmatrix} = P_{R_0 \to R_1} \begin{pmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{pmatrix} \quad , \text{ avec } : P_{R_0 \to R_1} = P^T_{R_1 \to R_0}$$

La matrice de passage de R_0 vers R_1 notée : $P_{R_0 \to R_1}$; permet de déduire la matrice d'inertie du solide dans le repère R_1 en la connaissant dans le repère R_0 et inversement.

$$I_O(S)_{/R_1} = P^T_{R_0 \to R_1} . I_O(S)_{/R_0} . P_{R_0 \to R_1}$$

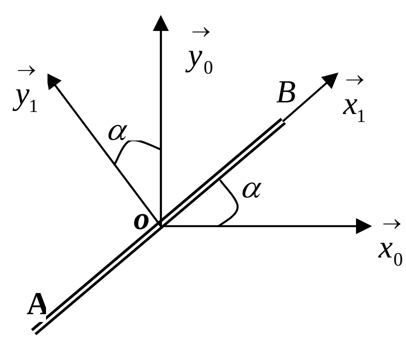
$$I_O(S)_{/R_0} = P^T_{R_1 \to R_0} . I_O(S)_{/R_1} . P_{R_1 \to R_0}$$

Exemple d'application :

Déterminer la matrice d'inertie de la barre AB de longueur L de masse m dans le repère $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en rotation par rapport au repère fixe $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$.

En déduire la matrice d'inertie dans le repère R_0.

On détermine la matrice d'inertie de la barre dans le repère R_1 : Nous avons un solide linéaire : $dm = \lambda dx$; $y = 0$ et $z = 0$ d'où : $I_{xy} = I_{xz} = I_{yz} = 0$ et $I_{xx} = 0$



$$I_{yy} = I_{zz} = \int_{(S)} x^2 dm = \int_{-L}^{+L} x^2 \lambda dx = \frac{mL^2}{3} \quad \text{d'où : } I_O(S)_{R_1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_1}$$

On détermine la matrice de passage de R_1 vers R_0 en exprimant les vecteurs unitaires de R_1 en fonction de ceux de R_0 :

$$\begin{aligned} \vec{x}_1 &= \cos\alpha\, \vec{x}_0 + \sin\alpha\, \vec{y}_0 + 0.\vec{z}_0 \\ \vec{y}_1 &= -\sin\alpha\, \vec{x}_0 + \cos\alpha\, \vec{y}_0 + 0.\vec{z}_0 \\ \vec{z}_1 &= 0.\vec{x}_0 + 0.\vec{y}_0 + \vec{z}_0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \vec{x}_1 \\ \vec{y}_1 \\ \vec{z}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{x}_0 \\ \vec{y}_0 \\ \vec{z}_0 \end{bmatrix}$$

avec : $P_{R_1 \to R_0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $P_{R_0 \to R_1} = P^T_{R_1 \to R_0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

La matrice d'inertie dans le repère R_0 sera égale à : $I_O(S)_{/R_0} = P^T_{R_1 \to R_0} . I_O(S)_{/R_1} . P_{R_1 \to R_0}$

$$I_O(S)_{/R_0} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

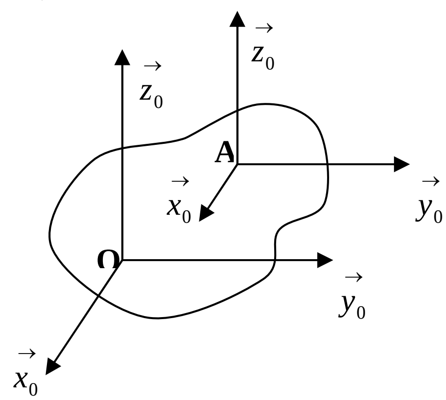
$$I_O(S)_{/R_0} = \begin{bmatrix} \frac{mL^2}{3}\sin^2\alpha & -\frac{mL^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha & 0 \\ -\frac{mL^2}{3}\sin\alpha\cos\alpha & \frac{mL^2}{3}\cos^2\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{bmatrix}_{R_0}$$

10. Translation du repère R de centre O vers un centre A

On considère un solide *(S)* dont la matrice d'inertie est connue au point O d'un repère fixe $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$. Soit un point A de coordonnées (x_A, y_A, z_A) centre du repère $R(A,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ en translation par rapport à $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$.

La matrice d'inertie au point A du solide *(S)* est donnée par :

$$I_A(S)_{R_0} = \begin{bmatrix} I_{Axx} & -I_{Axy} & -I_{Axz} \\ -I_{Axy} & I_{Ayy} & -I_{Ayz} \\ -I_{Axz} & -I_{Ayz} & I_{Azz} \end{bmatrix}_{R_0}$$



Les éléments de cette matrice s'obtiennent en remplaçant le vecteur $\overrightarrow{OP}$ comme précédemment par le vecteur $\overrightarrow{AP}$ dans l'opérateur d'inertie.

Nous avons en effet : $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x - x_A)\,\vec{x}_0 + (y - y_A)\,\vec{y}_0 + (z - z_A)\,\vec{z}_0$

On obtient ainsi les moments et les produits d'inertie en A :

$$I_{Axx} = \int_{(S)} \left((y - y_A)^2 + (z - z_A)^2\right) dm$$

$$I_{Axx} = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\,dm + y_A^2 \int_{(S)} dm + z_A^2 \int_{(S)} dm - 2y_A \int_{(S)} y\,dm - 2z_A \int_{(S)} z\,dm$$

Soit m la masse du solide *(S)* et G son centre d'inertie. Les coordonnées (x_G, y_G, z_G) du centre d'inertie dans le repère $R(O,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ déjà exprimé au début du chapitre, ont pour expression : $x_G = \frac{1}{m}\int_{(S)} x\,dm$; $y_G = \frac{1}{m}\int_{(S)} y\,dm$; $z_G = \frac{1}{m}\int_{(S)} z\,dm$

$$\int_{(S)} x\,dm = m x_G \quad ; \quad \int_{(S)} y\,dm = m y_G \quad ; \quad \int_{(S)} z\,dm = m z_G$$

En remplaçant ces termes dans l'expression de I_{Axx} , on obtient :

$I_{Axx} = I_{Oxx} + m\left((y_A^2 + z_A^2) - 2y_A y_G - 2z_A z_G\right)$, et par permutation les autres termes

$I_{Ayy} = I_{Oyy} + m\left((x_A^2 + z_A^2) - 2x_A x_G - 2z_A z_G\right)$

$I_{Azz} = I_{Ozz} + m\left((x_A^2 + y_A^2) - 2x_A x_G - 2y_A y_G\right)$

De la même manière pour les produits d'inertie nous avons :

$$I_{Axy} = \int_{(S)} (x - x_A)(y - y_A)dm = \int_{(S)} xydm - x_A \int_{(S)} ydm - y_A \int_{(S)} xdm + x_A y_A \int_{(S)} dm$$

$I_{Axy} = I_{Oxy} - m\left((x_A y_G + y_A x_G - x_A y_A\right)$ et par permutation les autres termes

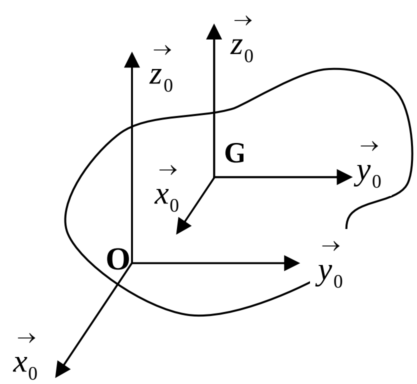
$I_{Axz} = I_{Oxz} - m\left((x_A z_G + z_A x_G - x_A z_A\right)$

$I_{Ayz} = I_{Oyz} - m\left((y_A z_G + z_A y_G - y_A z_A\right)$

11. Théorème de HUYGENS

Si le tenseur d'inertie est connu au centre d'inertie G du solide *(S)* dans la base $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$; alors on peut déterminer le tenseur d'inertie au point O dans la même base.

Reprenons le cas précédent avec le point A qui coïncide avec le centre d'inertie du solide *(S)*, nous aurons dans le repère $R(G, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$: $\overrightarrow{GP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OG}$



En remplaçant par les opérateurs d'inertie on obtient : $I_G(S)_{/R_0} = I_O(S)_{/R_0} - J_{OG}(S)_{/R_0}$

En utilisant les relations trouvées précédemment, en changeant le centre du repère en *G*, nous déduisons facilement :

$$I_{Gxx} = I_{Oxx} + m\big((y_G^2 + z_G^2) - 2y_G y_G - 2z_G z_G\big) = I_{Oxx} - m(y_G^2 + z_G^2)$$

$$I_{Gyy} = I_{Oyy} + m\big((x_G^2 + z_A^2) - 2x_G x_G - 2z_G z_G\big) = I_{Oyy} - m(x_G^2 + z_A^2)$$

$$I_{Gzz} = I_{Ozz} + m\big((x_G^2 + y_G^2) - 2x_G x_G - 2y_G y_G\big) = I_{Ozz} - m(x_G^2 + y_G^2)$$

De la même manière pour les produits d'inertie nous avons :

$$I_{Gxy} = I_{Oxy} - m\big((x_G y_G + y_G x_G - x_G y_G\big) = I_{Oxy} - mx_G y_G$$

$$I_{Gxz} = I_{Oxz} - m\big((x_G z_G + z_G x_G - x_G z_G\big) = I_{Oxz} - mx_G z_G$$

$$I_{Gyz} = I_{Oyz} - m\big((y_G z_G + z_G y_G - y_G z_G\big) = I_{Oyz} - my_G z_G$$

d'où : $$J_{OG}(S)_{R_0} = \begin{bmatrix} m(y_G^2 + z_G^2) & -mx_G y_G & -mx_G z_G \\ -mx_G y_G & m(x_G^2 + z_G^2) & -my_G z_G \\ -mx_G z_G & -my_G z_G & m(x_G^2 + y_G^2) \end{bmatrix}_{R_0}$$

Ces expressions permettent de déterminer la matrice d'inertie du solide en *O* : $I_O(S)_{R_0}$, dans le repère $R(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$, en connaissant la matrice d'inertie en G : $I_G(S)_{R_0}$ dans le même repère car elle est plus souvent facile à déterminer.

$$I_O(S)_{R_0} = I_G(S)_{R_0} + J_{OG}(S)_{R_0}$$

Cette expression permet de connaître les six relations de Huygens, qui lient les moments d'inertie et les produits d'inertie en un point O d'un repère et le centre d'inertie *G* du solide dans le même repère.

$$I_{Oxx} = I_{Gxx} + m(y_G^2 + z_G^2) \qquad I_{Oxy} = I_{Gxy} + mx_G y_G$$

$$I_{Oyy} = I_{Gyy} + m(x_G^2 + z_A^2) \qquad I_{Oxz} = I_{Gxz} + mx_G z_G$$

$$I_{Ozz} = I_{Gzz} + m(x_G^2 + y_G^2) \qquad I_{Oyz} = I_{Gyz} + my_G z_G$$

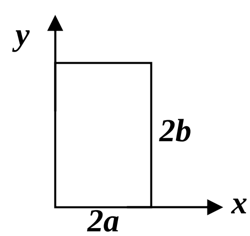
Le théorème de Huygens est très pratique car il permet de déterminer le moment d'inertie d'un solide dans n'importe point O de l'espace centre du repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, en connaissant le moment d'inertie au centre d'inertie G de coordonnées $((x_G, y_G, z_G)$ par rapport au même repère.

Exemple :

Déterminer le moment d'inertie au point O de la plaque mince rectangulaire de masse m , de longueur $2a$ et de largeur $2b$ de centre d'inertie $G\ (a, b, 0)$

On détermine le moment d'inertie de la plaque au point G, puis par le théorème de Huygens, on le déduit au point O.

Les plans (xGz) et (yGz) sont des plans de symétrie, alors tous les produits d'inertie sont nuls : $I_{Gxy} = I_{Gxz} = I_{Gyz} = 0$; la matrice d'inertie en G est diagonale.



Masse de la plaque : $m = \sigma\, 4ab$

Nous avons un solide plan : $z = 0 \quad \Rightarrow \quad I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy}$,

$$I_{Gxx} = \int_S y^2 dm = \int_S y^2 \sigma ds = \sigma \int_S y^2 dxdy = \sigma \int_{-a}^{+a} dx \int_{-b}^{+b} y^2 dy = \sigma.2a\frac{2}{3}b^3 = \sigma 4ab\frac{b^2}{3} = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_{Gxx} = \int_S x^2 dm = \int_S x^2 \sigma ds = \sigma \int_S x^2 dxdy = \sigma \int_{-a}^{+a} x^2 dx \int_{-b}^{+b} dy = \sigma.\frac{2}{3}a^3.2b = \sigma 4ab\frac{a^2}{3} = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_{Gzz} = I_{Gxx} + I_{Gyy} = \frac{m}{3}(a^2 + b^2)$$

CINETIQUE

1. Définition

La résultante cinétique (quantité de mouvement), **le moment cinétique** (moment de la quantité de mouvement), **la résultante dynamique** (quantité d'accélération), **le moment dynamique** et **l'énergie cinétique**, constituent les éléments de la cinétique.

La cinétique a pour objet l'étude des relations entre les éléments de la cinématique et la géométrie des masses.

2. Résultante cinétique, moment cinétique

- La résultante cinétique (quantité de mouvement) d'un point matériel M, de masse m et de vitesse $\vec{V}(M)$ est définie par la grandeur vectorielle :

$$\vec{P} = m\vec{V}(M) \;;$$

- Le moment cinétique $\vec{\sigma}_A$ du point matériel M en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A, il a pour grandeur :

$$\vec{\sigma}_A = \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{V}(M)$$

2.1. Quantité de mouvement d'un système matériel *(S)*

a) Système matériel discret :

Le système est constitué d'un ensemble de point M_i de masse m_i et de vitesses $\vec{V}(M_i)$ dans un repère *R*.

- **La résultante cinétique** (quantité de mouvement) du système est donnée par la grandeur vectorielle : $\vec{P} = \sum_i m_i \vec{V}(M_i)$
- **Le moment cinétique** $\vec{\sigma}_A$ du système matériel *(S)* en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A, il a pour grandeur vectorielle : $\vec{\sigma}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{V}(M_i)$

b) Système matériel continu :

Dans le cas d'un système matériel continu *(S)* : linéaire, surfacique où volumique nous avons :

- **La résultante cinétique** (quantité de mouvement) du système matériel continu, est donnée par la grandeur vectorielle : $\vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm$;

- **Le moment cinétique** $\vec{\sigma}_A$ du système matériel continu *(S)* en un point A quelconque de l'espace est donné par le moment de la quantité de mouvement en A , il a pour grandeur vectorielle : $\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm$

3. Torseur cinétique

Soit un solide *(S)* de masse *m* et de centre d'inertie *G*, en mouvement par rapport à un repère fixe *R*. Soit *M* un point de ce solide et deux points A et B quelconque de l'espace mais connus dans le repère *R*.

Par définition nous avons les moments cinétiques en A et B qui sont donnés par :

$$\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm \quad \text{et} \quad \vec{\sigma}_B = \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M)dm$$

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm - \int_S \overrightarrow{BM} \wedge \vec{V}(M)dm = \int_S (\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{BM}) \wedge \vec{V}(M)dm = \int_S \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}(M)dm$$

$$\vec{\sigma}_A - \vec{\sigma}_B = \overrightarrow{AB} \wedge \int_S \vec{V}(M)dm = \overrightarrow{AB} \wedge \vec{P}$$

cette relation est appelée loi de variation du moment cinétique

On constate que le moment cinétique obéit à la loi des transports des moments. Nous pouvons alors construire un torseur cinétique dont les éléments de réduction sont : la résultante cinétique et le moment cinétique.

$$[C]_A = \begin{cases} \vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm \\ \vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm \end{cases}$$

$\vec{P} = \int_S \vec{V}(M)dm$: résultante cinétique ou quantité de mouvement du système *(S)*

$\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}(M)dm$: Moment cinétique au point A du système *(S)* dans le repère *R*.

3.1. Expression de la résultante cinétique d'un système matériel

Soit un solide *(S)* de masse m et de centre d'inertie G, en mouvement par rapport à un repère orthonormé fixe $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Quel que soit $M \in (S)$ nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\,dm = \vec{0}$

Les points G et M sont Mobiles dans le repère $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$, nous pouvons écrire :

$\overrightarrow{GM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OG}$ et leurs vitesses sont liées par la relation :

$$\frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} - \frac{d\,\overrightarrow{OG}}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt} = \vec{V}(M) - \vec{V}(G)$$

En dérivant cette expression par rapport au temps sous le signe intégrale, on obtient :

$$\int_S \frac{d\,\overrightarrow{GM}}{dt}\,dm = \int_S \left(\vec{V}(M) - \vec{V}(G)\right) dm = \vec{0}$$

$$\int_S \vec{V}(M)\,dm = \vec{V}(G)\int_S dm = m\vec{V}(G) \qquad \text{ce qui donne : } \vec{P} = m\vec{V}(G)$$

La résultante du torseur cinétique est la quantité de mouvement du centre de la masse affectée de la masse totale du système : $\vec{P} = m\vec{V}(G)$

3.2. Propriétés du moment cinétique

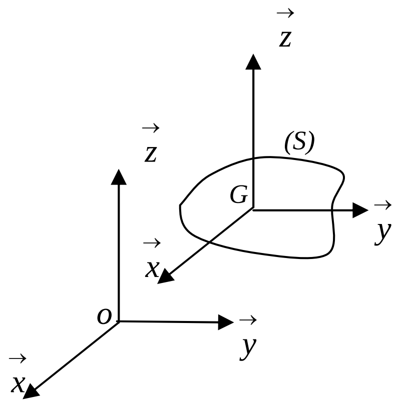
3.2.1. Théorème de Koënig

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G / R_0) = \vec{0}$

Nous allons chercher une relation entre :

- le moment cinétique du système en G dans son mouvement par rapport à R_0 et
- le moment cinétique du système en G dans son mouvement par rapport à R_G.



Soit M un point du système matériel :

Sa vitesse dans le repère R_0 est donnée par : $\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(G) + \vec{V}^G(M)$

Son moment cinétique au point G dans R_0 s'écrira : $\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(M)dm$

Son moment cinétique au point G dans R_G s'écrira : $\vec{\sigma}_{G/R_G} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm$

Nous avons alors :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{V}^0(G) + \vec{V}^G(M) \right) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^0(G)dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm$$

or nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ on obtient finalement :

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{V}^0(G) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm = \vec{\sigma}_{G/R_G}$$

$$\vec{\sigma}_{G/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G}$$

Le moment cinétique en G centre d'inertie du système est le même qu'il soit présenté dans le repère R_0 ou dans le repère R_1.

En un point A quelconque de l'espace nous aurons par la formule de transport :

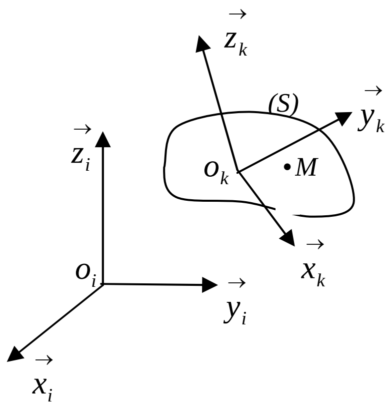
$$\vec{\sigma}_{A/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^0(G)$$

Nous avons ainsi le théorème de Koënig pour le moment cinétique.

3.3. Moment cinétique d'un solide (S) indéformable, lié à un repère R_k en mouvement quelconque par rapport à un repère fixe R_i .

Soit M un point du solide, sa vitesse est donnée par la cinématique du solide, elle a pour expression : $\vec{V}^i(M) = \vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M}$

Le moment cinétique au point O_k est donné par : $\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(M)dm$



En remplaçant l'expression de la vitesse dans celle du moment cinétique, nous obtenons :

$$\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{V}^i(O_k) + \vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$$

$$\vec{\sigma}^i(O_k) = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k)dm + \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$$

avec : $\vec{\sigma}_1 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k)dm$ et $\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$

Expression de $\vec{\sigma}_1$:

$$\vec{\sigma}_1 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \vec{V}^i(O_k)dm = \int_S \left(\overrightarrow{O_k G} + \overrightarrow{GM} \right) \wedge \vec{V}^i(O_k)dm$$

$$= \int_S \overrightarrow{O_k G} \wedge \vec{V}^i(O_k)dm + \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{V}^i(O_k)$$

$$\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{O_k G} \wedge \vec{V}^i(O_k) \int_S dm + \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{V}^i(O_k)$$

Comme G est le centre d'inertie du solide, nous avons alors : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$

d'où : $\underline{\vec{\sigma}_1 = \overrightarrow{O_k G} \wedge m\vec{V}^i(O_k)}$

Expression de $\vec{\sigma}_2$:

$$\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm$$

Afin de développer cette expression, nous utilisons les coordonnées du point M dans le repère R_k et les composantes du vecteur vitesse de rotation $\vec{\Omega}_k^i$ dans le repère R_k.

$$\overrightarrow{O_k M} = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}} \quad ; \quad \vec{\Omega}_k^i = \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \wedge \\ z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \\ \Omega_y \wedge \\ \Omega_z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}} = \underset{R_k}{\begin{cases} x \\ y \wedge \\ z \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} z\Omega_y - y\Omega_z \\ x\Omega_z - z\Omega_x \\ y\Omega_x - x\Omega_y \end{cases}}$$

$$\overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) = \underset{R_k}{\begin{cases} y(y\Omega_x - x\Omega_y) - z(x\Omega_z - z\Omega_x) \\ z(z\Omega_y - y\Omega_z) - x(y\Omega_x - x\Omega_y) = \\ x(x\Omega_z - z\Omega_x) - y(z\Omega_y - y\Omega_z) \end{cases}} \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x(y^2 + z^2) - \Omega_y xy - \Omega_z xz \\ -\Omega_x xy + \Omega_y (x^2 + z^2) - \Omega_z yz \\ -\Omega_x xz - \Omega_y yz + \Omega_z (x^2 + z^2) \end{cases}}$$

$$\vec{\sigma}_2 = \int_S \overrightarrow{O_k M} \wedge \left(\vec{\Omega}_k^i \wedge \overrightarrow{O_k M} \right) dm = \underset{R_k}{\begin{cases} \Omega_x \int_S (y^2 + z^2) dm - \Omega_y \int_S xydm - \Omega_z \int_S xzdm \\ -\Omega_x \int_S xydm + \Omega_y \int_S (x^2 + z^2) dm - \Omega_z \int_S yzdm \\ -\Omega_x \int_S xzdm - \Omega_y \int_S yzdm + \Omega_z \int_S (x^2 + z^2) dm \end{cases}}$$

cette expression peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{\vec{\sigma}_2 = [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i}$$

on aboutit à l'expression finale : $\vec{\sigma}^i(O_k) = \vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2$ qui s'écrira :

$$\underline{\vec{\sigma}^i(O_k) = \overrightarrow{O_kG} \wedge m\vec{V}^i(O_k) + [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i}$$

Cas particuliers :

- Si le repère R_k est fixe par rapport à R_i alors $\vec{V}^i(O_k) = \vec{0} \Rightarrow$ $\underline{\vec{\sigma}^i(O_k) = [I_{ok}]\vec{\Omega}_k^i}$
- Si le point O_k est confondu avec le centre G alors $\overrightarrow{O_kG} = \vec{0} \Rightarrow$ $\underline{\vec{\sigma}^i(G) = [I_G]\vec{\Omega}_k^i}$

3.4. Théorème de Koënig pour un système matériel *(S)*

Sous la forme généralisée nous avons :

$$\vec{\sigma}^i(M) = \vec{\sigma}^k(G) + \overrightarrow{MG} \wedge m\vec{V}^i(G) \qquad \text{avec} \qquad \vec{\sigma}^i(G) = \vec{\sigma}^k(G)$$

Nous pouvons ainsi écrire la relation sous la forme :

$$\vec{\sigma}^i(M) = [I_G]\vec{\Omega}_k^i + \overrightarrow{MG} \wedge m\vec{V}^i(G)$$

I_G : est le moment d'inertie du système en son centre d'inertie.

4. Torseur dynamique

4.1. Définition

Soit M un point du système matériel *(S)* en mouvement par rapport à un repère fixe R.

L'accélération du point M est donnée par : $\vec{\gamma}(M) = \dfrac{d\vec{V}(M)}{dt}$

- On appelle résultante dynamique ou (quantité d'accélération) du point M :

$$\vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm \quad \text{ou} \quad \vec{D} = \sum_i m_i\,\vec{\gamma}(M_i)$$

- On appelle moment dynamique, le moment de la résultante dynamique (moment de la quantité d'accélération) par rapport à un point A du repère R :

$$\vec{\delta}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M)dm \quad \text{où} \quad \vec{\delta}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i\,\vec{\gamma}(M_i)$$

On construit le torseur dynamique avec ces deux grandeurs comme éléments de réduction de ce torseur. Le torseur dynamique en un point A du repère R s'exprime sous la forme :

$$[D]_A = \begin{cases} \vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm \\ \vec{\delta}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}(M)dm \end{cases} \quad \text{où} \quad [D]_A = \begin{cases} \vec{D} = \sum_i m_i \vec{\gamma}(M_i) \\ \vec{\delta}_A = \sum_i \overrightarrow{AM}_i \wedge m_i \vec{\gamma}(M_i) \end{cases}$$

Le système étudié n'est pas nécessairement indéformable comme pour le torseur cinétique. Le moment dynamique obéit aussi de la même manière à la formule de transport des moments. Les moments dynamiques en deux points quelconques A et B sont liés par :

$$\vec{\delta}_A = \vec{\delta}_B + \overrightarrow{AB} \wedge \vec{D}$$

4.2. Calcul de la résultante dynamique

Soit G le centre d'inertie du système dans le repère R , la résultante dynamique s'écrit :

$$\vec{D} = \int_S \vec{\gamma}(M)dm = \int_S \frac{d\vec{V}(M)}{dt}dm = \frac{d}{dt}\int_S \vec{V}(M)dm = \frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d(m\vec{V}(G))}{dt} = m\vec{\gamma}(G)$$

Si la masse du système est constante, la résultante dynamique est égale au produit de la masse par l'accélération de son centre d'inertie.

$$\vec{D} = m\vec{\gamma}(G)$$

La résultante du torseur dynamique est égale à la quantité d'accélération du centre d'inertie du système affectée de la masse totale.

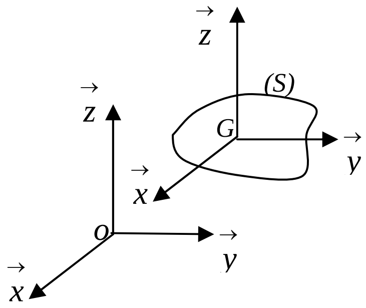
4.3. Théorème de Koënig relatif au moment dynamique

Soit $R_0(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G / R_0) = \vec{0}$

Nous allons chercher une relation entre :

- le moment dynamique du système en G dans son mouvement par rapport à R_0 **et**
- le moment dynamique du système en G dans son mouvement par rapport à R_G .



Soit M un point du système matériel:

Son accélération dans le repère R_0 est donnée par : $\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^0(G) + \vec{\gamma}^G(M)$

Son moment dynamique au point G dans R_0 s'écrira : $\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^0(M)dm$

Son moment dynamique au point G dans R_G s'écrira : $\vec{\delta}_{G/R_G} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^G(M)dm$

Alors : $\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \left(\vec{\gamma}^0(G) + \vec{\gamma}^G(M) \right) dm = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^0(G)dm + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^G(M)dm$

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM}\, dm \wedge \vec{\gamma}^0(G) + \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{\gamma}^G(M)dm$$

or nous avons par définition du centre d'inertie : $\int_S \overrightarrow{GM}\, dm = \vec{0}$ on obtient finalement :

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \int_S \overrightarrow{GM} \wedge \vec{V}^G(M)dm = \vec{\delta}_{G/R_G}$$

$$\vec{\delta}_{G/R_0} = \vec{\delta}_{G/R_G}$$

Le moment dynamique en G centre d'inertie du système est le même, qu'il soit présenté dans le repère R_0 ou dans le repère R_1. En un point A quelconque de l'espace nous aurons par la formule de transport : $\vec{\sigma}_{A/R_0} = \vec{\sigma}_{G/R_G} + \overrightarrow{AG} \wedge m\vec{V}^0(G)$

Nous avons ainsi le théorème de Koënig pour le moment dynamique.

4.4. Relation entre torseur cinétique et torseur dynamique

Soit A un point quelconque du repère R_0 pas nécessairement un point du système matériel et un point M du système matériel. Nous avons le moment cinétique au point A qui est donné par : $\vec{\sigma}_A = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M)dm$

Dérivons cette expression :

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{AM} \wedge \vec{V}^0(M)\right)dm = \int_S \frac{d^0 \overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{V}^0(M)dm + \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \frac{d^0 \vec{V}^0(M)}{dt} dm$$

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \frac{d^0 \overrightarrow{AM}}{dt} \wedge \vec{V}^0(M)dm + \vec{\delta}_A$$

or nous avons : $\dfrac{d^0 \overrightarrow{AM}}{dt} = \vec{V}^0(M) - \vec{V}^0(A)$

$$\frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} = \int_S \left(\vec{V}^0(M) - \vec{V}^0(A)\right) \wedge \vec{V}^0(M)dm + \vec{\delta}_A \quad \Rightarrow \quad \frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} = -\vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G) + \vec{\delta}_A$$

on obtient ainsi la relation finale entre le moment cinétique et le moment dynamique

$$\vec{\delta}_A = \frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} + \vec{V}^0(A) \wedge m\vec{V}^0(G)$$

Cette relation ne doit en aucun cas être confondue avec la formule de transport.

4.5. Cas particuliers

Dans certains cas particuliers la dérivée du torseur cinétique est égale au torseur dynamique :

$$\vec{\delta}_A = \frac{d^0 \vec{\sigma}_A}{dt} \qquad \textbf{Si :} \begin{cases} 1)\ A \text{ est fixe dans } R_0 & \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) = \vec{0} \\ 2)\ A \text{ est confondu avec } G & \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) \wedge \vec{V}^0(G) = \vec{0} \\ 3)\ \vec{V}^0(A) // \vec{V}^0(G) = \vec{0} & \Leftrightarrow \quad \vec{V}^0(A) \wedge \vec{V}^0(G) = \vec{0} \end{cases}$$

Dans ces trois cas particuliers seulement, nous pouvons écrire :

$$\vec{D}_A = \frac{d\vec{C}_A}{dt} \quad \text{avec} \quad [D]_A = \begin{cases} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{cases} \quad \text{et} \quad [C]_A = \begin{cases} \vec{P} \\ \vec{\sigma}_A \end{cases}$$

5. Energie cinétique

5.1. Définition

L'énergie cinétique d'un système matériel continu *(S)* en mouvement par rapport à un repère fixe R_0 est définie par la quantité scalaire exprimée par la relation : $E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)^2 dm$

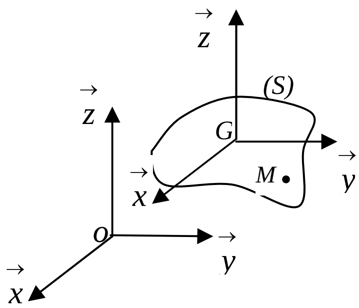
5.2. Théorème de Koënig relatif à l'énergie cinétique

Soit $R_0(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ un repère orthonormé fixe. Le référentiel de Koënig (appelé aussi référentiel barycentrique) $R_G(G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ est le référentiel lié au centre d'inertie du solide dont les axes sont parallèles à ceux du repère fixe.

La vitesse du repère R_G par rapport au repère R_0 est nul : $\vec{\Omega}(R_G/R_0)=\vec{0}$

Nous allons chercher une relation entre :

- L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à R_0 **et**
- L'énergie cinétique du système dans son mouvement par rapport à R_G



Soit M un point du système matériel. La loi de composition des vitesses donne :

$$\vec{V}^0(M)=\vec{V}^0(G)+\vec{V}^G(M)$$

en remplaçant cette expression dans celle de l'énergie cinétique nous aurons :

$$E_C^0=\int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)+\vec{V}^G(M)\right)^2 dm=\frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2\int_S dm+\int_S \vec{V}^0(G)\bullet\vec{V}^G(M)dm+\frac{1}{2}\int_S\left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

or nous avons : $\vec{V}^G(M)=\dfrac{d^G\overrightarrow{GM}}{dt}$ dans le repère R_G

$$E_C^0=\frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2\int_S dm+\vec{V}^0(G)\bullet\frac{d}{dt}\int_S\overrightarrow{GM}dm+\frac{1}{2}\int_S\left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

nous avons aussi par définition du centre d'inertie que : $\int_S \overrightarrow{GM}dm=\vec{0}$

L'expression de l'énergie cinétique devient :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 \int_S dm + \frac{1}{2}\int_S \left(\vec{V}^G(M)\right)^2 dm$$

qui s'écrit aussi sous la forme réduite : $E_C^0 = \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 \int_S dm \; + \; E_C^G$

L'énergie cinétique du système *(S)* en mouvement quelconque par rapport au repère R_0 est égale à l'énergie cinétique du système dans son mouvement autour de son centre d'inertie *G* augmentée de l'énergie cinétique du centre d'inertie affecté de la masse totale du système.

Cette relation constitue le théorème de Koënig pour l'énergie cinétique.

5.3 Solide indéformable en mouvement quelconque

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe et $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié à un solide indéformable et de centre de d'inertie *G*.

Le solide est en mouvement quelconque tel que $O_1 \in (S)$. La vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_0 est : $\vec{\Omega}_1^0$

Soit M un point quelconque du solide, nous avons par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

L'énergie cinétique du solide *(S)* est donnée par :

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)^2 dm = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right)^2 dm$$

$$E_C^0 = \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right)\left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) dm$$

$$= \vec{V}^0(O_1) \bullet \int_S \frac{1}{2}\left(\vec{V}^0(M)\right) dm + \int_S \frac{1}{2}\vec{V}^0(M) \bullet \left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) dm$$

$$= \frac{1}{2}\vec{V}^0(O_1) \bullet m\vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \int_S \frac{1}{2}\overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{V}^0(M) dm$$

L'expression du moment cinétique déjà développée auparavant est donnée par :

$$\vec{\sigma}^0(O_1) = \int_S \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{V}^0(M) dm$$

Nous avons alors l'énergie cinétique en fonction du moment cinétique du solide:

$$E_C^0 = \frac{1}{2}\vec{V}^0(O_1) \bullet m\vec{V}^0(G) + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \vec{\sigma}^0(O_1)$$

Si le centre O_1 du repère R_1 est confondu avec le centre d'inertie G du solide : $O_1 \equiv G$ alors :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \vec{\sigma}^0(G)$$

Le moment cinétique en G s'écrit : $\vec{\sigma}^0(G) = I_G\,\vec{\Omega}_1^0$ on aboutit à la relation finale :

$$E_C^0 = \frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2 + \vec{\Omega}_1^{0^T} \bullet I_G\,\vec{\Omega}_1^0$$

$\frac{1}{2}m\left(\vec{V}^0(G)\right)^2$: est l'énergie cinétique de translation du solide

$\vec{\Omega}_1^{0^T} \bullet I_G\,\vec{\Omega}_1^0$: est l'énergie cinétique de rotation du solide autour de son centre d'inertie G.

L'énergie cinétique totale d'un solide en mouvement quelconque dans l'espace est égale à la somme de l'énergie cinétique de translation de son centre d'inertie affectée de la masse du solide et de l'énergie cinétique de rotation autour du centre d'inertie.

Cette relation constitue le théorème de Koënig pour l'énergie cinétique.

L'énergie cinétique totale peut s'exprimer en fonction des torseurs cinématiques et cinétique au point O_1 en la mettant sous la forme :

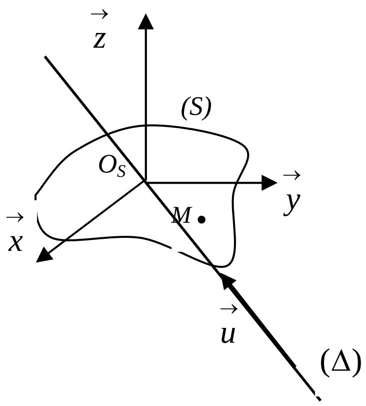
$$E_C^0 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(M) \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} m\vec{V}^0(G) \\ \vec{\sigma}^0(O_1) \end{pmatrix}$$

L'énergie cinétique totale d'un solide est égale à la moitié du produit scalaire du torseur cinématique par le torseur cinétique au point O_1 exprimé dans le repère R_0.

$$E_C^0 = \frac{1}{2}[V]_{O_1} \bullet [C]_{O_1}$$

5.4. Solide indéformable en mouvement de rotation pur

Dans le cas où le solide est en mouvement de rotation pur autour d'un axe Δ passant par un point O_S du solide et de vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que : $\Delta(O_S, \vec{u})$ avec $\vec{\Omega}_S^0 = \Omega \vec{u}$ .Le moment d'inertie par rapport à cet axe est donné par : $I_\Delta = \vec{u}^T . I_{O_S} . \vec{u}$



L'énergie cinétique de rotation pure est donnée par :

$$E_C^0 = \frac{1}{2} \vec{\Omega}_S^{0\,T} . I_{O_S} . \vec{\Omega}_S^0 = \frac{1}{2} \Omega \vec{u}^T . I_{O_S} . \Omega \vec{u} = \frac{1}{2} \Omega^2 \vec{u}^T . I_{O_S} . \vec{u} = \frac{1}{2} \Omega^2 . I_\Delta$$

5.5. Energie cinétique d'un ensemble de solides

L'énergie cinétique d'un ensemble de solides *(S)* constitué des solides *(S_1 , S_2, S_3, ……S_n)* dans un repère R_0 est égale à la somme des énergies cinétiques de chaque solide exprimée dans le même repère.

$$E_C^0(S) = \sum_i E_C^0(S_i)$$