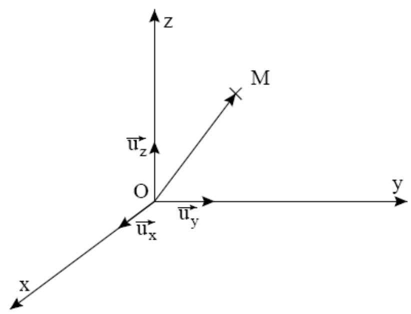
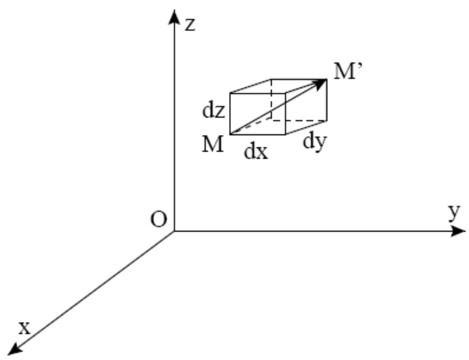
# COORDONNÉES CARTÉSIENNES, CYLINDRIQUES, SPHÉRIQUES

On considère un point $M$ et le référentiel $\Re = \left(O;\vec{u}_x,\vec{u}_y,\vec{u}_z\right)$. Toutes les vitesses et déplacements dans ce chapitre sont calculés dans le référentiel $\Re$.

## I. COORDONNÉES CARTÉSIENNES

Le point $M$ est repéré par les coordonnées cartésiennes $\left(x,y,z\right)$.




$-\infty < x,y,z < \infty$

$\overrightarrow{OM} = x\vec{u}_x + y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y + \dot{z}\vec{u}_z = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{u}_x + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{u}_y + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$

**Le déplacement élémentaire vaut : $\mathrm{d}\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}x\vec{u}_x + \mathrm{d}y\vec{u}_y + \mathrm{d}z\vec{u}_z$.**
**Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.**

On en déduit : $\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

$x = cte$ : $\mathrm{d}S_x = \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$

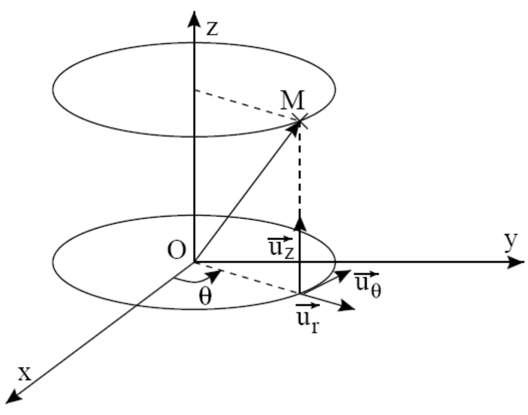
$y = cte$ : $\mathrm{d}S_y = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z$

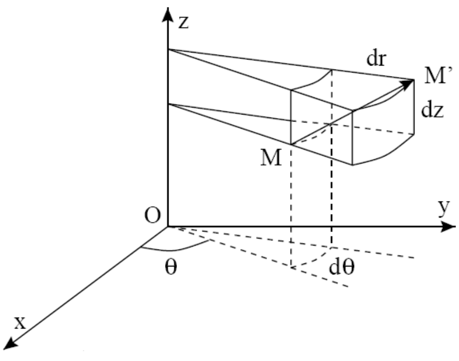
$z = cte$ : $\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

## II. COORDONNÉES CYLINDRIQUES

Le point $M$ est repéré par les coordonnées cylindriques $\left(r,\theta,z\right)$.

**On utilisera les coordonnées cylindriques dès que la distance à l'axe *Oz* joue un rôle important dans l'exercice.**



$\boxed{0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le 2\pi, -\infty < z < +\infty}$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r + z\vec{u}_z$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + \dot{z}\vec{u}_z = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$$

**Le déplacement élémentaire vaut :** $\mathrm{d}\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\vec{u}_z$ **.**
**Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.**

On en déduit : $\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)(r\mathrm{d}\theta)(\mathrm{d}z)$.

$r = cte$ : $\mathrm{d}S_r = r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$

$\theta = cte$ : $\mathrm{d}S_\theta = \mathrm{d}r\,\mathrm{d}z$

$z = cte$ : $\mathrm{d}S_z = \mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta$

On a souvent besoin du volume élémentaire compris entre les cylindres de rayon $r$ et de rayon $r + \mathrm{d}r$.

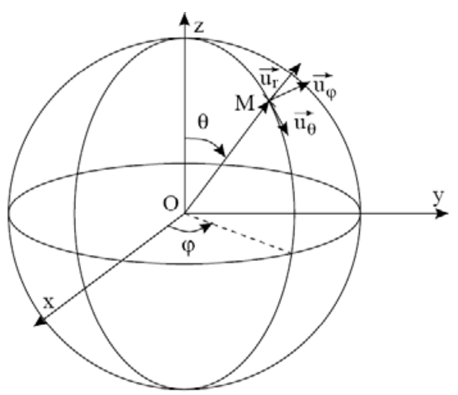
$$\pi(r+\mathrm{d}r)^2 H - \pi r^2 H = \pi r^2\left(1+\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^2 H - \pi r^2 H = \pi r^2\left(1+\frac{2\mathrm{d}r}{r}\right)H - \pi r^2 H = 2\pi r\mathrm{d}rH$$

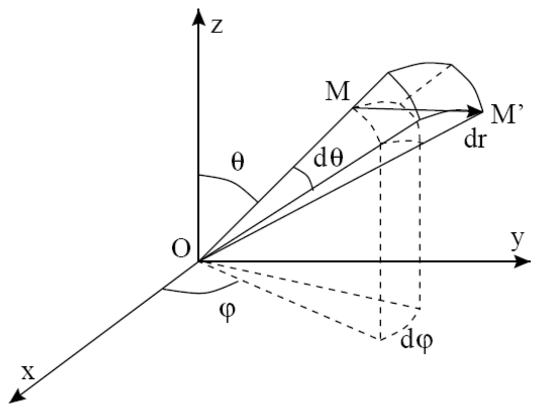
**Le volume élémentaire compris entre les cylindres de rayon $r$ et de rayon $r$ + d$r$ est la surface du cylindre de rayon $r$ et de hauteur $H$ multipliée par d$r$ :** $\mathrm{d}\tau = 2\pi r\mathrm{d}rH$

## III. COORDONNÉES SPHÉRIQUES

Le point $M$ est repéré par les coordonnées cylindriques $(r,\theta,\varphi)$.

**On utilisera les coordonnées sphériques dès que la distance au centre joue un rôle important dans l'exercice.**




Géographie terrestre :

$\vec{u}_r$ est dirigé selon la verticale ascendante du lieu.

$\vec{u}_\theta$ est dirigé vers le sud.

$\vec{u}_\varphi$ est dirigé vers l'est.

$\theta$ est appelé la colatitude. $\varphi$ est la longitude.

$\boxed{0 \le r < \infty, 0 \le \theta \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi}$

$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$

$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u}_r + r\dot{\theta}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\dot{\varphi}\vec{u}_\varphi = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + r\sin\theta\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\varphi$$

**Le déplacement élémentaire vaut :** $\mathrm{d}\vec{l} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\vec{u}_r + r\mathrm{d}\theta\vec{u}_\theta + r\sin\theta\mathrm{d}\varphi\vec{u}_\varphi$ **.**
**Il sert pour calculer les surfaces et volumes élémentaires.**

On en déduit : $\mathrm{d}\tau = (\mathrm{d}r)(r\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi)$.

$r = cte$ : $\mathrm{d}S_r = (r\mathrm{d}\theta)(r\sin\theta\mathrm{d}\varphi)$

$\theta = cte$ : $\mathrm{d}S_\theta = (\mathrm{d}r)(r\sin\theta\mathrm{d}\varphi)$

$\varphi = cte$ : $\mathrm{d}S_\varphi = \mathrm{d}r\,r\mathrm{d}\theta$

On a souvent besoin du volume élémentaire compris entre les sphères de rayon $r$ et de rayon $r + \mathrm{d}r$.

$$\frac{4}{3}\pi(r+\mathrm{d}r)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{\mathrm{d}r}{r}\right)^3 - \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi r^3\left(1+\frac{3\mathrm{d}r}{r}\right) - \frac{4}{3}\pi r^3 = 4\pi r^2\mathrm{d}r$$

**Le volume élémentaire compris entre les sphères de rayon *r* et de rayon *r* + d*r* est la surface de la sphère de rayon *r* multipliée par d*r* :** $\mathrm{d}\tau = 4\pi r^2\mathrm{d}r$

## IV. PRODUIT VECTORIEL AVEC UNE BASE ORTHONORMÉE DIRECTE

On a souvent besoin dans les exercices de calculer $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta$ dans les exercices.

**Un moyen mnémotechnique est d'écrire les 6 vecteurs unitaires à la suite :** $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ **.**
**Si on a trois vecteurs unitaires en suivant, alors** $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ **:** $\vec{u}_r = \vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z$ **ou** $\vec{u}_\theta = \vec{u}_z \wedge \vec{u}_r$
**Sinon, il faut mettre un signe négatif :** $\vec{u}_z \wedge \vec{u}_\theta = -\vec{u}_r$
**C'est très pratique à utiliser sans être obligé d'utiliser en permanence les trois doigts de la main !!!**