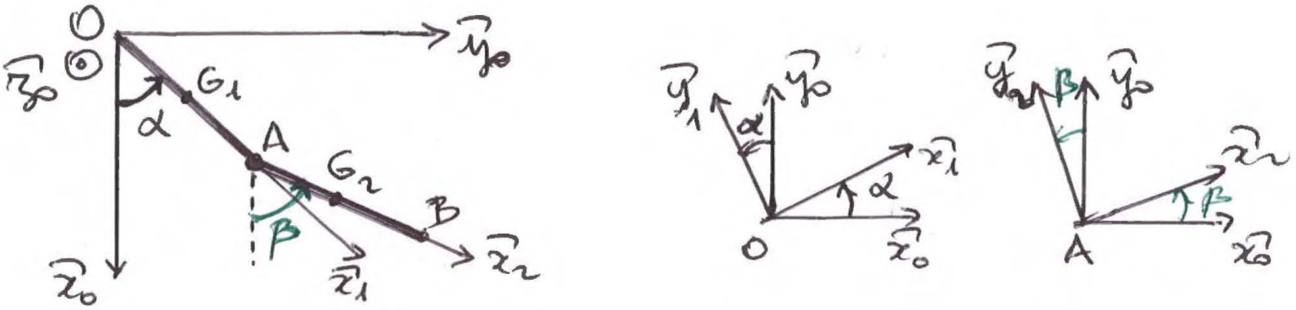
PROBLEME DE CINETIQUE



PRELIMINAIRE :

1) Expression de $\vec{x_1}, \vec{y_1}, \vec{x_2}, \vec{y_2}$ dans R_0

$$\begin{cases} \vec{x_1} = \cos\alpha\, \vec{x_0} + \sin\alpha\, \vec{y_0} \\ \vec{y_1} = -\sin\alpha\, \vec{x_0} + \cos\alpha\, \vec{y_0} \\ \vec{x_2} = \cos\beta\, \vec{x_0} + \sin\beta\, \vec{y_0} \\ \vec{y_2} = -\sin\beta\, \vec{x_0} + \cos\beta\, \vec{y_0} \end{cases}$$

PARTIE A :

2) Torseur cinématique $[\Omega_1]_O$ de (T_1)

$$[\Omega_1]_O = [\vec{\Omega}_{R_1/R_0}, \vec{V}_{R_0}(O \in T_1)]$$

avec
$$\begin{cases} \vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \dot{\alpha}\, \vec{z_0} \\ \vec{V}_{R_0}(O \in T_1) = \vec{0} \quad \text{car } O \text{ fixe} \end{cases}$$

3) * Torseur cinématique $[\Omega_1]_{G_1}$ de (T_1)

$$[\Omega_1]_{G_1} = [\vec{\Omega}_{R_1/R_0}, \vec{V}_{R_0}(G_1 \in T_1)]$$

avec $\vec{V}_{R_0}(G_1 \in T_1) = \underbrace{\vec{V}_{R_0}(O \in T_1)}_{=\vec{0}} + \underbrace{\vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{OG_1}}_{\dot{\alpha}\vec{z_0} \wedge \frac{L}{2}\vec{x_1} = \frac{L}{2}\dot{\alpha}\vec{y_1}}$

d'où $\vec{V}_{R_0}(G_1 \in T_1) = \frac{L}{2} \dot{\alpha}\, \vec{y_1}$

$$\Rightarrow \vec{V}_{R_0}(G_1 \in T_1) = \frac{L}{2} \dot{\alpha} (-\sin\alpha\, \vec{x_0} + \cos\alpha\, \vec{y_0})$$

(ou bien par dérivation directe $\vec{V}_{R_0}(G_1 \in T_1) = \left.\dfrac{d\vec{OG_1}}{dt}\right|_{R_0}$)

* Accélération $\vec{\Gamma}_{R_0}(G_1 \in T_1)$

$$\vec{\Gamma}_{R_0}(G_1 \in T_1) = \left.\frac{d\vec{V}_{R_0}(G_1 \in T_1)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$= \left.\frac{d\vec{V}_{R_0}(G_1 \in T_1)}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{V}_{R_0}(G_1 \in T_1)$$

$$= \frac{L}{2}\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge \frac{L}{2}\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 = \frac{L}{2}\left(\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 - \dot{\alpha}^2\,\vec{x}_1\right)$$

$$= \frac{L}{2}\left[-\dot{\alpha}^2(\cos\alpha\,\vec{x}_0 + \sin\alpha\,\vec{y}_0) + \ddot{\alpha}(-\sin\alpha\,\vec{x}_0 + \cos\alpha\,\vec{y}_0)\right]$$

$$= \frac{L}{2}\left[(-\dot{\alpha}^2\cos\alpha - \ddot{\alpha}\sin\alpha)\,\vec{x}_0 + (-\dot{\alpha}^2\sin\alpha + \ddot{\alpha}\cos\alpha)\,\vec{y}_0\right]$$

4) Torseur cinématique $[\Omega_2]_{G_2}$ de (T_2)

$$[\Omega_2]_{G_2} = \left[\vec{\Omega}_{R_2/R_0},\ \vec{V}_{R_0}(G_2 \in T_2)\right]$$

avec $\vec{\Omega}_{R_2/R_0} = \dot{\beta}\,\vec{z}_0$

et $\vec{V}_{R_0}(G_2 \in T_2) = \left.\dfrac{d\vec{OG_2}}{dt}\right|_{R_0} = \left.\dfrac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{R_0} + \left.\dfrac{d\vec{AG_2}}{dt}\right|_{R_0}$

avec $\left.\dfrac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{R_0} = \underbrace{\left.\dfrac{d\vec{OA}}{dt}\right|_{R_1}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge \vec{OA}$ avec $\vec{OA} = L\,\vec{x}_1$

$$= \dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge L\,\vec{x}_1 = L\,\dot{\alpha}\,\vec{y}_1$$

et $\left.\dfrac{d\vec{AG_2}}{dt}\right|_{R_0} = \underbrace{\left.\dfrac{d\vec{AG_2}}{dt}\right|_{R_2}}_{=\vec{0}} + \vec{\Omega}_{R_2/R_0} \wedge \vec{AG_2}$ avec $\vec{AG_2} = \frac{L}{2}\vec{x}_2$

$$= \dot{\beta}\,\vec{z}_0 \wedge \frac{L}{2}\vec{x}_2 = \frac{L}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{R_0}(G_2 \in T_2) = L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2$$

$$\Rightarrow \vec{V}_{R_0}(G_2 \in T_2) = L\dot{\alpha}\,(-\sin\alpha\,\vec{x}_0 + \cos\alpha\,\vec{y}_0) + \frac{L}{2}\dot{\beta}\,(-\sin\beta\,\vec{x}_0 + \cos\beta\,\vec{y}_0)$$

$$= L\left[\left(-\dot{\alpha}\sin\alpha - \frac{\dot{\beta}}{2}\sin\beta\right)\vec{x}_0 + \left(\dot{\alpha}\cos\alpha + \frac{\dot{\beta}}{2}\cos\beta\right)\vec{y}_0\right]$$

* Accélération $\vec{\Gamma}_{R_0}(G_2 \in T_2)$

$$\vec{\Gamma}_{R_0}(G_2 \in T_2) = \left.\frac{d\vec{V}_{R_0}(G_2 \in T_2)}{dt}\right|_{R_0} = \left.\frac{d\left(L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2\right)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$= \left.\frac{d(L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1)}{dt}\right|_{R_1} + \vec{\Omega}_{R_1/R_0} \wedge L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \left.\frac{d\left(\frac{L}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2\right)}{dt}\right|_{R_2} + \vec{\Omega}_{R_2/R_0} \wedge \frac{L}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2$$

$$= L\ddot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \underbrace{\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 \wedge L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1}_{-L\dot{\alpha}^2\vec{x}_1} + \frac{L}{2}\ddot{\beta}\,\vec{y}_2 + \underbrace{\dot{\beta}\,\vec{z}_0 \wedge \frac{L}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2}_{-\frac{L}{2}\dot{\beta}^2\vec{x}_2}$$

$$= L(-\dot{\alpha}^2\vec{x}_1 + \ddot{\alpha}\,\vec{y}_1) + \frac{L}{2}(-\dot{\beta}^2\vec{x}_2 + \ddot{\beta}\,\vec{y}_2)$$

$$= L\left[\left(-\dot{\alpha}^2\cos\alpha - \frac{\dot{\beta}^2}{2}\cos\beta - \ddot{\alpha}\sin\alpha - \frac{\ddot{\beta}}{2}\sin\beta\right)\vec{x}_0 + \left(-\dot{\alpha}^2\sin\alpha - \frac{\dot{\beta}^2}{2}\sin\beta + \ddot{\alpha}\cos\alpha + \frac{\ddot{\beta}}{2}\cos\beta\right)\vec{y}_0\right]$$

PARTIE B

5) Centre de masse G de (Σ)

$$(m+m)\,\vec{OG} = m\,\vec{OG}_1 + m\,\vec{OG}_2$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{m\,\vec{OG}_1 + m\,\vec{OG}_2}{2m} = \frac{1}{2}\vec{OG}_1 + \frac{1}{2}\vec{OG}_2$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{OG}_1 + \vec{OA} + \vec{AG}_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}L\vec{x}_1 + L\vec{x}_1 + \frac{1}{2}L\vec{x}_2\right)$$

$$= \frac{L}{4}(3\vec{x}_1 + \vec{x}_2) = \frac{L}{4}\left[3(\cos\alpha\,\vec{x}_0 + \sin\alpha\,\vec{y}_0) + (\cos\beta\,\vec{x}_0 + \sin\beta\,\vec{y}_0)\right]$$

$$\Rightarrow \vec{OG} = \frac{L}{4}\left[(3\cos\alpha + \cos\beta)\,\vec{x}_0 + (3\sin\alpha + \sin\beta)\,\vec{y}_0\right]$$

6) Opérateur d'inertie $J(O,T_1)_{/R_1}$

$$J(O,T_1)_{/R_1} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

$A = \int_{M\in T} (y^2+z^2)\,dm$ $\quad D = \int yz\,dm$

$B = \int (x^2+z^2)\,dm$ $\quad E = \int xz\,dm$

$C = \int (x^2+y^2)\,dm$ $\quad F = \int xy\,dm$

Comme la tige est sur l'axe $(O,\vec{x}_1) \Rightarrow y = z = 0$

$\Rightarrow A = 0\ ,\ B = C\ ,\ D = E = F = 0$

$\Rightarrow J(O,T_1)_{/R_1} = \text{diagonal}(0, B, B)$

avec $B = \int_{M\in T_1} x^2\,dm = \int_0^L \frac{m}{L} x^2\,dx = \frac{mL^2}{3}$

$\Rightarrow J(O,T_1)_{/R_1} = \text{diagonal}\left(0, \frac{mL^2}{3}, \frac{mL^2}{3}\right)$

7) Opérateur d'inertie $J(G_2,T_2)_{/R'_2}$

La tige est sur l'axe $(O,\vec{x}_2) \Rightarrow y = z = 0$

$\Rightarrow A = 0\ ,\ B = C\ ,\ D = E = F = 0$

$\Rightarrow J(G_2,T_2)_{/R'_2} = \text{diagonal}(0, B, B)$

avec $B = \int_{M\in T_2} x^2\,dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \frac{m}{L} x^2\,dx = \frac{m}{L}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$

$= \frac{mL^2}{12}$

$\Rightarrow J(G_2,T_2)_{/R'_2} = \text{diagonal}\left(0, \frac{mL^2}{12}, \frac{mL^2}{12}\right)$

PARTIE C

8) Torseur cinétique $[\sigma_1]_O$ de (T_1)

$$[\sigma_1]_O = \left[\vec{P}_{R_0}(T_1) = m\vec{V}_{R_0}(G_1\in T_1)\ ,\ \vec{\sigma}_{R_0}(O,T_1)\right]$$

avec $\vec{P}_{R_0}(T_1) = m\vec{V}_{R_0}(G_1,T_1)$

$$= m\frac{L}{2}\dot{\alpha}(-\sin\alpha\,\vec{x}_0 + \cos\alpha\,\vec{y}_0)$$

et $\vec{\sigma}_{R_0}(O,T_1) = J(O,T_1)_{/R_1}\,\vec{\Omega}_{R_1/R_0}(/R_1)$ car O est un point fixe de (T_1)

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{R_0}(O,T_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{R_0}(O,T_1) = \frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}\,\vec{z}_0$$

9) Torseur cinétique $[\sigma_2]_O$ de (T_2)

$$[\sigma_2]_O = [\vec{P}_{R_0}(T_2) = m\vec{V}_{R_0}(G_2\in T_2),\ \vec{\sigma}_{R_0}(O,T_2)]$$

avec $\vec{P}_{R_0}(T_2) = m\vec{V}_{R_0}(G_2,T_2)$

$$= mL\left[\left(-\dot{\alpha}\sin\alpha - \frac{\dot{\beta}}{2}\sin\beta\right)\vec{x}_0 + \left(\dot{\alpha}\cos\beta + \frac{\dot{\beta}}{2}\cos\beta\right)\vec{y}_0\right]$$

et $\vec{\sigma}_{R_0}(O,T_2) = \vec{\sigma}_{K_2}(G_2,T_2) + m\vec{V}_{R_0}(G_2\in T_2)\wedge\vec{G_2O}$

car (T_2) n'a pas de point fixe

où $K_2 = (G_2,\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0)$ repère de KOENIG

- $\vec{\sigma}_{K_2}(G_2,T_2) = J(G_2,T_2)_{/R'_2}\,\vec{\Omega}_{R_2/R_0}(/R'_2)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{mL^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mL^2}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\beta} \end{pmatrix} = \frac{mL^2}{12}\dot{\beta}\,\vec{z}_0$$

- $m\vec{V}_{R_0}(G_2\in T_2)\wedge\vec{G_2O}$

$$= m\left(L\dot{\alpha}\,\vec{y}_1 + \frac{L}{2}\dot{\beta}\,\vec{y}_2\right)\wedge\left(-L\,\vec{x}_1 - \frac{L}{2}\vec{x}_2\right)$$

$$= m\Big(L^2\dot{\alpha}\,\vec{z}_0 + \frac{L^2}{2}\dot{\alpha}\cos(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0 + \frac{L^2}{4}\dot{\beta}\,\vec{z}_0 + \frac{L^2}{2}\dot{\beta}\cos(\beta-\alpha)\,\vec{z}_0\Big)$$

$$= mL^2\left[\dot{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{4} + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\alpha-\beta)\right]\vec{z}_0$$

$(\cos(\beta-\alpha) = \cos(\alpha-\beta))$

on peut aussi faire le calcul en utilisant les expressions de $\vec{V}_{R_0}(G_2 \in T_2)$ et $\vec{G_2O}$ dans R_0

On a donc :

$$\vec{\sigma}_{R_0}(O,T_2) = mL^2\left[\dot{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{3} + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\alpha-\beta)\right]\vec{z_0}$$

10) Moment cinétique $\vec{\sigma}_{R_0}(O,\Sigma)$ de (Σ)

$$\vec{\sigma}_{R_0}(O,\Sigma) = \vec{\sigma}_{R_0}(O,T_1) + \vec{\sigma}_{R_0}(O,T_2)$$

$$\Rightarrow \vec{\sigma}_{R_0}(O,\Sigma) = mL^2\left[\frac{4}{3}\dot{\alpha} + \frac{\dot{\beta}}{3} + \frac{1}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})\cos(\alpha-\beta)\right]\vec{z_0}$$

11) Moment dynamique $\vec{\delta}_{R_0}(O,T_1)$ de (T_1)

$$\vec{\delta}_{R_0}(O,T_1) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{R_0}(O,T_1)}{dt}\right|_{R_0}$$ car (T_1) a un point fixe O

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{R_0}(O,T_1) = m\frac{L^2}{3}\ddot{\alpha}\,\vec{z_0}$$

12) Moment dynamique $\vec{\delta}_{R_0}(O,T_2)$ de (T_2)

$$\vec{\delta}_{R_0}(O,T_2) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{R_0}(O,T_2)}{dt}\right|_{R_0} + \underbrace{\vec{V}_{R_0}(O)}_{=\vec{0}} \wedge m\vec{V}_{R_0}(G_2\in T_2)$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{R_0}(O,T_2) = \left.\frac{d\vec{\sigma}_{R_0}(O,T_2)}{dt}\right|_{R_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{R_0}(O,T_2) = mL^2\left[\ddot{\alpha} + \frac{\ddot{\beta}}{3} + \frac{1}{2}(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}(\dot{\alpha}+\dot{\beta})(\dot{\alpha}-\dot{\beta})\sin(\alpha-\beta)\right]\vec{z_0}$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{R_0}(O,T_2) = mL^2\left[\ddot{\alpha} + \frac{\ddot{\beta}}{3} + \frac{1}{2}(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2-\dot{\beta}^2)\sin(\alpha-\beta)\right]\vec{z_0}$$

13) Moment dynamique $\vec{\delta}_{R_0}(O,\Sigma)$ de (Σ)

$$\vec{\delta}_{R_0}(O,\Sigma) = \vec{\delta}_{R_0}(O,T_1) + \vec{\delta}_{R_0}(O,T_2)$$

$$\Rightarrow \vec{\delta}_{R_0}(O,\Sigma) = mL^2\Big[\frac{4}{3}\ddot{\alpha} + \frac{\ddot{\beta}}{3} + \frac{1}{2}(\ddot{\alpha}+\ddot{\beta})\cos(\alpha-\beta) - \frac{1}{2}(\dot{\alpha}^2 - \dot{\beta}^2)\sin(\alpha-\beta)\Big]\vec{z}_0$$

14) Energie cinétique $E_{c_{R_0}}(\Sigma)$ de (Σ)

$$E_{c_{R_0}}(\Sigma) = E_{c_{R_0}}(T_1) + E_{c_{R_0}}(T_2)$$

avec $E_{c_{R_0}}(T_1) = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{R_0}(O,T_1)\cdot\vec{\Omega}_{R_1/R_0} = \frac{1}{2}\frac{mL^2}{3}\dot{\alpha}^2$

$$= \frac{mL^2}{6}\dot{\alpha}^2 \quad \text{(car } (T_1) \text{ a un point fixe)}$$

et $E_{c_{R_0}}(T_2) = E_{c_{K_2}}(T_2) + \frac{1}{2}m\vec{V}^2_{R_0}(G_2\in T_2)$

où $E_{c_{K_2}}(T_2) = \frac{1}{2}\vec{\sigma}_{K_2}(G_2,T_2)\cdot\vec{\Omega}_{R_2/R_0}$

$$= \frac{mL^2}{24}\dot{\beta}^2$$

et $\frac{1}{2}m\vec{V}^2_{R_0}(G_2\in T_2) = \frac{mL^2}{2}\Big[\big(-\dot{\alpha}\sin\alpha - \frac{\dot{\beta}}{2}\sin\beta\big)^2 + \big(\dot{\alpha}\cos\alpha + \frac{\dot{\beta}}{2}\cos\beta\big)^2\Big]$

$$= \frac{mL^2}{2}\Big(\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{4} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)\Big)$$

$$\Rightarrow E_{c_{R_0}}(T_2) = \frac{mL^2}{2}\Big[\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{3} + \dot{\alpha}\dot{\beta}\cos(\alpha-\beta)\Big]$$

d'où $E_{c_{R_0}}(\Sigma) = mL^2\Big[\frac{2}{3}\dot{\alpha}^2 + \frac{\dot{\beta}^2}{6} + \frac{\dot{\alpha}\dot{\beta}}{2}\cos(\alpha-\beta)\Big]$

PARTIE D :

15) Théorème du moment dynamique au point O de (Σ)

$$\vec{\delta}_{R_0}(O,\Sigma) = \vec{M}_O(\text{efforts}) = \vec{M}_O(\text{poids}_{T_1}) + \vec{M}_O(\text{poids}_{T_2})$$