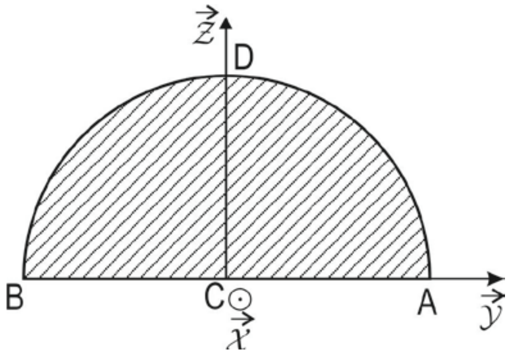
CENTRE DE MASSE ET OPERATEUR D'INERTIE:



Le solide (S), homogène de masse *m*, est un demi disque ADBCA de centre C et de rayon *a*, lié au repère S = $(C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que $\overrightarrow{CA} = a\,\vec{y}$, $\overrightarrow{CD} = a\,\vec{z}$, $\overrightarrow{CB} = -\,a\,\vec{y}$ et $\vec{x} = \vec{y} \wedge \vec{z}$ (figure ci-contre).

1) Déterminer la position du centre de masse G du solide (S).
2) Calculer l'opérateur d'inertie $J(C,S)_{/S}$.
3) En déduire $J(G,S)_{/S_G}$ en utilisant le théorème d'Huygens,

avec $S_G = (G, \vec{x}, \vec{y}\ \vec{z},\ )$

CENTRE DE MASSE ET OPERATEUR D'INERTIE D'UN DEMI-DISQUE

1) Centre d'inertie G de (S) :

$$m\,\vec{CG} = \int_{(S)} \vec{CM}\,dm \qquad \text{avec} \qquad dm = \frac{m}{S}\,dS$$

$(C, \vec{z})$ axe de symétrie $\Rightarrow G \in (C, \vec{z})$

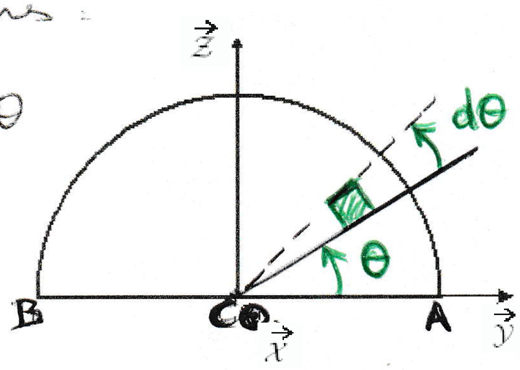
$\Rightarrow \vec{CG} = z_G\,\vec{z}$

d'où $m\,z_G = \int_{(S)} z\,dm$

$$\Rightarrow \quad z_G = \frac{1}{S}\int_{(S)} z\,dS \qquad \text{avec} \qquad S = \frac{\pi a^2}{2}$$

On utilise les coordonnées polaires :

$$\begin{cases} y = r\cos\theta \\ z = r\sin\theta \end{cases} \quad \text{et} \quad dS = r\,dr\,d\theta$$



$$\Rightarrow \quad z_G = \frac{2}{\pi a^2}\int_{(S)} r\sin\theta\, r\,dr\,d\theta$$

$$= \frac{2}{\pi a^2}\int_0^a r^2\,dr \int_0^\pi \sin\theta\,d\theta$$

$$\Rightarrow \quad z_G = \frac{4a}{3\pi} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{CG} = \frac{4a}{3\pi}\,\vec{z}}$$

2) Matrice d'inertie au point C de (S)

$$J(C,S)_{/S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$$

$A = \int (y^2+z^2)\,dm \qquad D = \int yz\,dm$

$B = \int (x^2+z^2)\,dm \qquad E = \int xz\,dm$

$C = \int (x^2+y^2)\,dm \qquad F = \int xy\,dm$

(S) dans le plan $(\vec{y}, \vec{z}) \Rightarrow x = 0 \Rightarrow E = F = 0$

et $A = B + C$

$(C, \vec{x}, \vec{z})$ plan de symétrie $\Rightarrow D = F = 0$ ②

(ou bien $(C, \vec{z})$ axe de symétrie $\Rightarrow D = E = 0$)

On a donc $D = E = F = 0$ et $J(C,S)_{/S}$ = diagonal(A,B,C)

* Calcul de A :

$$A = \int_{(S)} (y^2 + z^2)\, dm = \frac{m}{S} \int r^2\, ds$$

$$= \frac{2}{\pi a^2} \int_0^a r^3\, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \quad \Rightarrow A = \frac{ma^2}{2}$$

* Calcul de B :

$$B = \int_{(S)} (x^2 + z^2)\, dm = \int_{(S)} z^2\, dm = \frac{m}{S} \int r^2 \sin^2\theta\, ds$$

$$= \frac{2m}{\pi a^2} \int_0^a r^3\, dr \int_0^{\pi} \sin^2\theta\, d\theta \quad \text{avec } \sin^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$$

$$\Rightarrow B = \frac{ma^2}{4}$$

* Calcul de C :

$$C = A - B = \frac{ma^2}{2}$$

donc $J(C,S)_{/S} = \begin{pmatrix} \frac{ma^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{ma^2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} \end{pmatrix}$

3) <u>Matrice d'inertie au point G de (S) :</u>

$$J(G,S)_{/S} = \begin{pmatrix} A_G & -F_G & -E_G \\ -F_G & B_G & -D_G \\ -E_G & -D_G & C_G \end{pmatrix}$$

On applique le théorème d'Huygens avec

$$\vec{CG} = \frac{4a}{3\pi} \vec{z} = \left(0, 0, \frac{4a}{3\pi}\right)_{/S} = (\alpha, \beta, \gamma)_{/S}$$

$A = A_G + m(\beta^2 + \gamma^2)$ $\qquad D = D_G + m\beta\gamma$

$B = B_G + m(\alpha^2 + \gamma^2)$ $\qquad E = E_G + m\alpha\gamma$

$C = C_G + m(\alpha^2 + \beta^2)$ $\qquad F = F_G + m\alpha\beta$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} A_G = ma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) & D_G = D = 0 \\ B_G = ma^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) & E_G = E = 0 \\ C_G = C = \frac{ma^2}{4} & F_G = F = 0 \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \quad J(G,S)_{/S} = \begin{pmatrix} ma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2}\right) & 0 & 0 \\ 0 & ma^2\left(\frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{ma^2}{4} \end{pmatrix}$$