PROBLEME CINETIQUE

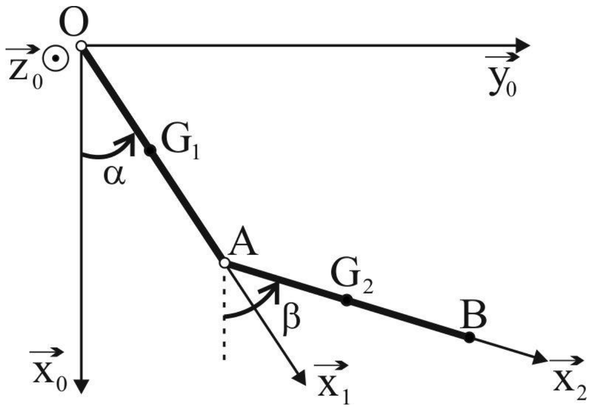
On considère un double pendule (Σ) constitué de deux tiges identiques homogènes $(T_1)=(OA)$ et $(T_2)=(AB)$, de même masse *m* et de même longueur *L*, articulées au point A et en mouvement dans le plan $\pi_o=(O,\overrightarrow{x_o},\overrightarrow{y_o})$ du repère galiléen $R_0=(O,\overrightarrow{x_o},\overrightarrow{y_o},\overrightarrow{z_o})$ avec $(O,\overrightarrow{x_o})$ vertical descendant. Les tiges (T_1) et (T_2) tournent donc respectivement autour des axes $(O,\vec{z}_0)$ et $(A,\vec{z}_0)$.

On considère les repères suivants :

- $R_1=(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_o})$ lié à la tige $(T_1)=(OA)$ tel que $\alpha=\alpha(t)=(\vec{x}_0,\vec{x}_1)=(\vec{y}_0,\vec{y}_1)$ et $\overrightarrow{OA}=L\vec{x}_1$
- $R_2=(A,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_o})$ lié à la tige $(T_2)=(AB)$ tel que $\beta=\beta(t)=(\vec{x}_0,\vec{x}_2)=(\vec{y}_0,\vec{y}_2)$ et $\overrightarrow{AB}=L\vec{x}_2$

Dans tout le problème, on exprimera les résultats vectoriels dans la base du repère $R_0=(O,\overrightarrow{x_o},\overrightarrow{y_o},\overrightarrow{z_o})$

On note respectivement G_1 et G_2 les centres de masse de (T_1) et (T_2) .



PRELIMINAIRE :

1) Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{x_1},\ \overrightarrow{y_1},\ \overrightarrow{x_2},\ \overrightarrow{y_2}$ en fonction des vecteurs du repère $R_0=(O,\overrightarrow{x_o},\overrightarrow{y_o},\overrightarrow{z_o})$.

PARTIE A : ***Etude cinématique***

2) Déterminer les éléments de réduction au point O du torseur cinématique noté $[\Omega_1]_O$ de la tige (T_1) dans son mouvement par rapport à R_0.

3) Déterminer les éléments de réduction au point G_1 du torseur cinématique noté $[\Omega_1]_{G_1}$ de la tige (T_1) dans son mouvement par rapport à R_0. En déduire l'accélération $\vec{\Gamma}_{R_O}(G_1)$ du point $G_1\in T_1$.

4) Déterminer les éléments de réduction au point G_2 du torseur cinématique noté $[\Omega_2]_{G_2}$ de la tige (T_2) dans son mouvement par rapport à R_0. En déduire l'accélération $\vec{\Gamma}_{R_O}(G_2)$ du point $G_2\in T_2$.

PARTIE B : ***Géométrie des masses***

5) Déterminer la position du centre de masse G du système (Σ).

6) Déterminer l'opérateur d'inertie (matrice d'inertie) en O de la tige (T_1) par rapport au repère $R_1=(O,\overrightarrow{x_1},\overrightarrow{y_1},\overrightarrow{z_o})$, noté $J(O,T_1)_{/R_1}$.

7) Déterminer l'opérateur d'inertie en G_2 de la tige (T_2) par rapport au repère $R'_2=(G_2,\overrightarrow{x_2},\overrightarrow{y_2},\overrightarrow{z_o})$, noté $J(G_2,T_2)_{/R'_2}$.

PARTIE C : ***Etude cinétique***

On remarque que $\cos\alpha.\cos\beta+\sin\alpha.\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$.

8) Déterminer les éléments de réduction au point O du torseur cinétique noté $[\sigma_1]_O$ de la tige (T_1) dans son mouvement par rapport à R_0.

9) Déterminer les éléments de réduction au point O du torseur cinétique noté $[\sigma_2]_O$ de la tige (T_2) dans son mouvement par rapport à R_0.

10) En déduire le moment cinétique $\vec{\sigma}_{R_0}(O,\Sigma)$ au point O du système (Σ) dans son mouvement par rapport à R_0.

11) Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_{R_0}(O,T_1)$ au point O de la tige (T_1) dans son mouvement par rapport à R_0.

12) Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_{R_0}(O,T_2)$ au point O de la tige (T_2) dans son mouvement par rapport à R_0.

13) En déduire le moment dynamique $\vec{\delta}_{R_0}(O,\Sigma)$ au point O du système (Σ) dans son mouvement par rapport à R_0.

14) Déterminer l'énergie cinétique du système (Σ) dans son mouvement par rapport à R_0.