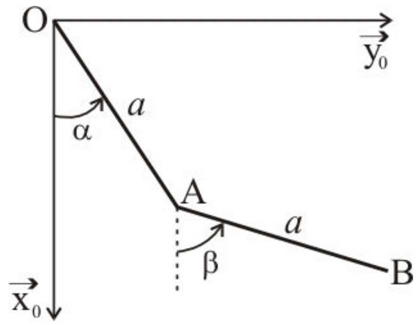
UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2021-2022

Parcours : Mathématiques **Grade : Licence** **Semestre : S3**

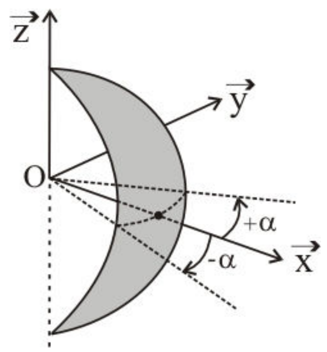
ED MECANIQUE GENERALE: CINETIQUE DU SOLIDE

Exercice 1 :



OA et AB sont deux tiges identiques homogènes de même masse m et de même longueur a, articulées au point A et en mouvement dans le plan $\pi_o = (O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o})$ du repère $R_o\,(O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o}, \overrightarrow{z_o})$.
On appelle ($\sum$) le système formé par ces deux tiges. Déterminer dans $R_o\,(O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o}, \overrightarrow{z_o})$ les éléments cinétiques de ($\sum$) au point O.

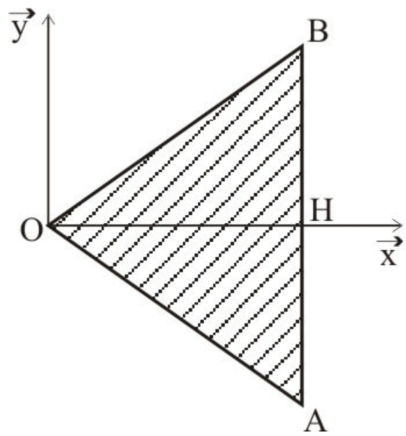
Exercice 2 :



Soit dans le repère $R\,(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ un solide (S) homogène défini en coordonnées sphériques par $-\alpha \leq \varphi \leq +\alpha$ où $o < \alpha < \pi,\ o \leq \theta \leq \pi$ et $o \leq r \leq R$.

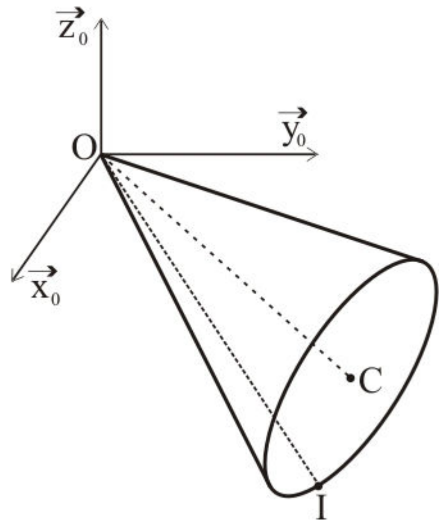
1) Déterminer la position de son centre d'inertie G
2) Déterminer également sa matrice d'inertie au point O
3) Donner les résultats pour $o \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ et $r = R$

Exercice 3 :



La plaque triangulaire équilatérale S = (OAB) de côté a, homogène de masse m, de centre de masse G, est liée au repère $S\,(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ tel que $(O, \vec{x}, \vec{y})$ contient son plan (π) (voir figure ci-contre).
Ce solide (S) est en mouvement par rapport à $R_0\,(O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o}, \overrightarrow{z_o})$ de façon que le côté OA balaie le plan $\pi_0 = (O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o})$. On appelle (ψ, θ, ϕ) les angles d'Euler habituels qui positionnent le solide (S) par rapport à R_o. Déterminer les éléments cinétiques au point O du solide (S).
On prend le repère $S\,(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ comme repère de projection.

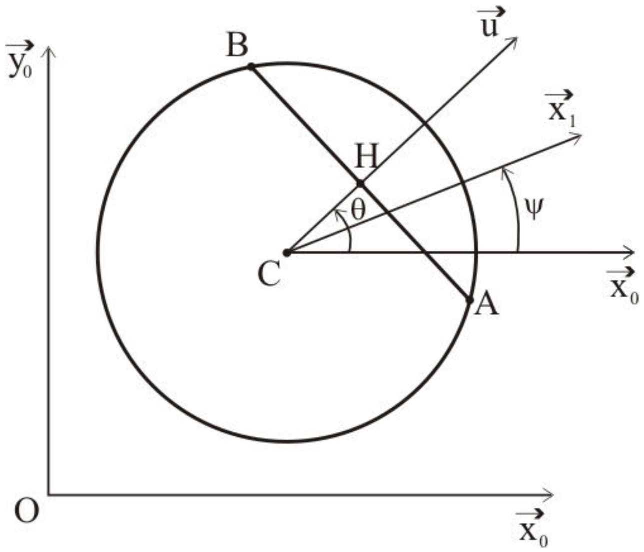
Exercice 4 :



Un cône de révolution (S), homogène de masse m, de base circulaire de centre C et de hauteur h, de demi angle au sommet β ($\beta < \frac{\pi}{2}$) est en mouvement par rapport à $R_0\ (O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o}, \overrightarrow{z_o})$ de façon que son sommet O est fixe et qu'il reste en contact ponctuel permanent avec le plan $P_o = (O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o})$ par sa génératrice OI.
On suppose qu'il roule sans glisser sur (P_o).

On exprimera les résultats en fonction de $\alpha = (\vec{x}_o, \overrightarrow{OI})$ et de ses dérivés et on prendra le repère $R_2 = (O, \vec{u}, \vec{\tau}, \vec{z})$ comme repère de projection avec $\overrightarrow{OC} = h\,\vec{z}$. On appellera G son centre de masse.
1) Paramétrer le mouvement de (S) par rapport à R_o.
2) Déterminer la position de son centre de masse G et calculer l'opérateur d'inertie au point O du solide (S). Le repère lié au solide (S) étant $S = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.
En déduire par le théorème de HUYGENS, l'opérateur d'inertie au point G du solide (S).
3) Déterminer les expressions des éléments cinétiques au point O du solide (S).

Exercice 5 : Soit le système (∑) formé d'une tige (T) et d'un cerceau (𝒞) de même masse m et en mouvement sur le plan $P_o = (O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o})$ du repère fixe $R_o\ (O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o}, \overrightarrow{z_o})$ de la façon suivante :



- le cerceau (𝒞) de centre C et de rayon a glisse sur le plan (P_o). Il est repéré par rapport à R_o par $\overrightarrow{OC} = (x, y, 0)_{/R_o}$ et l'angle de rotation propre ϕ d'axe $(C, \overrightarrow{z_o})$
- la tige (T), de milieu H et de longueur $AB = a\sqrt{3}$ a ses extrémités A et B qui glissent sur le cerceau (𝒞). On pose $\theta = (\overrightarrow{x_o}, \vec{u})$ mesuré autour de $\overrightarrow{z_o}$ avec $\vec{u}$ l'unitaire de $\overrightarrow{CH}$.

1) a) paramétrer par rapport à R_o, les mouvements respectifs de (T) et (𝒞)
b) Calculer l'énergie cinétique de (∑) dans son mouvement par rapport à R_o

2) Soit le repère $R_1 = (G, \overrightarrow{x_1}, \overrightarrow{y_1}, \overrightarrow{z_o})$ où G est le centre de masse de (∑) et on pose $\psi = (\overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{x_1})$ mesuré autour de $\overrightarrow{z_o}$. Pour la suite, on considère le mouvement de (∑) par rapport à R_1 et on prend R_1 comme repère d'explication des résultats.
a) déterminer les éléments de réduction au point G du torseur cinétique de (∑)
b) Déterminer ψ en fonction de θ et ϕ pour que ce torseur soit un torseur nul au point G.

Exercice 6 :

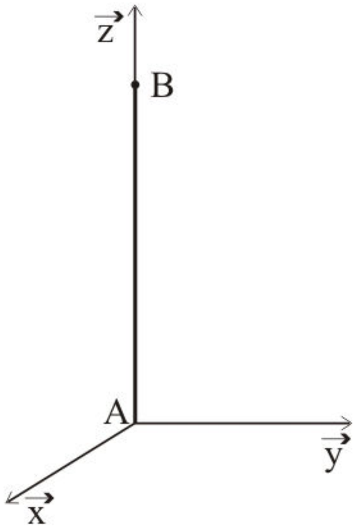


Figure 1

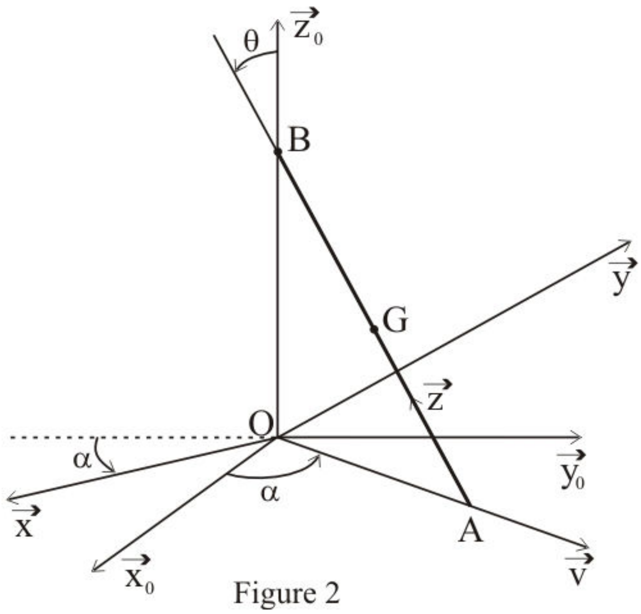


Figure 2

L'espace est lié au repère galiléen $R_o(O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o}, \overrightarrow{z_o})$ d'axe vertical ascendant $\overrightarrow{z_o}$.

La tige (S), homogène de masse m, de centre de masse G, liée au repère $S = (A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$, de longueur $\overrightarrow{AB} = \ell \vec{z}$ est en mouvement par rapport à R_o de la façon suivante :

- l'extrémité A parcourt le plan $P_o(O, \overrightarrow{x_o}, \overrightarrow{y_o})$: $\overrightarrow{OA} = a\vec{v}$ et $(\overrightarrow{x_o}, \vec{v}) = \alpha$ d'axe $\overrightarrow{z_o}$
- l'extrémité B parcourt l'axe $(O, \overrightarrow{z_o})$: $\overrightarrow{OB} = b\overrightarrow{z_o}$ et $(\overrightarrow{z_o}, \vec{z}) = \theta$ d'axe $\vec{x}$

On note R_1 le repère $R_1 = (O, \vec{x}, \vec{v}, \overrightarrow{z_o})$ qu'on prend comme repère de projection puis on écrira tous les résultats en fonction de α et θ et de leurs dérivées.

1) Paramétrer le mouvement de (S) par rapport à R_o.
2) Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération absolues du point G.
3) Dans la figure 1, déterminer l'opérateur d'inertie $J(A,S)/_{S_G}$ avec $S_G = (G ; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ et en déduire, par le théorème d'Huygens, $J(A,S)_{/S}$.
4) Déterminer les éléments de réduction au point A du torseur cinétique du solide (S) dans son mouvement par rapport à R_o.