Université d'Antananarivo
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques et Informatique

Année Universitaire : 2021-2022

T.D Loi de probabilité et variables aléatoires (S3)
Série n°2

Exercice 1. Soit X une variable aléatoire. On suppose que sa fonction de répartition F est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(1 - e^{-x}) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

a) Dessiner le graphe de F.

b) Calculer :
$P(X > -2)$, $P(X \in]1 - \frac{1}{n}, 1])$, $P(X = 1)$, $P(X \in]-\frac{1}{n}, 0])$, $P(X = 0)$.

Exercice 2.

a) Soit X une variable aléatoire admettant une fonction de répartition F continue et strictement croissante. Montrer que la variable aléatoire $U = F \circ X$ admet pour fonction de répartition la fonction G définie par :

$$G(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u < 0 \\ u & \text{si } 0 \leq u \leq 1 \\ 1 & \text{si } u > 1. \end{cases} \tag{1}$$

b) Soit U une variable aléatoire dont la fonction de répartition G est donnée par (1). Soit d'autre part une fonction de répartition F dont on désigne par F^{-1}, définie par :

$$F^{-1}(x) = sup\{y : F(y) \geq x\}.$$

Montrer que la variable aléatoire $X = F^{-1} \circ U$ admet F comme fonction de répartition.

Exercice 3.
Soit X une variable aléatoire de loi géométrique $\sum_{k \geq 1} pq^{k-1}\varepsilon_k$ $(0 < p < 1)$. Calculer $E(1/X)$.

Rappel :

$$\varepsilon_{\omega_0}(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega_0 \in A \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

Exercice 4. Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes ayant la loi de probabilité commune $\frac{1}{2}(\varepsilon_{-1} + \varepsilon_{+1})$. Est-ce que les trois variables $X_1, X_2, X_3 = X_1X_2$ sont indépendantes ou indépendantes deux à deux?

Exercice 5. On s'intéresse aux nombres de clients arrivant à l'un des deux guichets (A et B) d'une banque. Pour cela modélisons le problème de la manière suivante :
Le nombre de clients quittant la file d'attente, noté X, est modélisé par une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Le choix de guichet A par le i-ème client est modélisé par une loi Bernoulli $\mathcal{B}(p)$. Ainsi Y_i vaut 1 avec probabilité p si le i-ème client choisit bien.

1. Que signifie $S = \sum_{k=1}^{X} Y_k$?
2. Que vaut $P(S = k | X = n)$?
3. Montrer que S suit une loi de Poisson.

Exercice 6.

1. Soit X une v.a.r suivant une loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Donner la loi de $aX + b$.

2. Soit X suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Donner la loi de X^2 . Puis celle de $\frac{X^2}{2}$, quelle loi retrouve-t-on ?

Exercice 7.

1. Calculer à l'aide de la fonction génératrice l'espérance et la variance de la loi géométrique de paramètre p et de la loi de Poisson de paramètre λ.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois de Poisson de paramètres respectifs $\lambda > 0$ et $\gamma > 0$. Déterminer, en calculant sa fonction génératrice, la loi de $X + Y$.

Exercice 8. Pour $a > 0$ et $\lambda > 0$, on définit la loi $\Gamma(a, \lambda)$ par sa densité définie par :

$$f_{a,\lambda}(x) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$$

1. Vérifier que cette fonction définit bien une densité.
2. Déterminer l'espérance de cette loi.
3. Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes de loi $\Gamma(a, \lambda)$.
   i) Déterminer la loi de λX.
   ii) Montrer que $X + Y$ et X/Y sont des v.a. indépendantes dont on calculera les lois.

Exercice 9. Donner la fonction caractéristique de X : si X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$; si X suit une loi $\mathcal{B}(n,p)$; si X suit une loi de Poisson de paramètre λ.

Exercice 10. Donner la fonction caractéristique de X :

1. si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$;
2. si Y suit une loi exponentielle symétrique de paramètre λ (i.e. de densité $f(y) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|y|}$) ;
3. si Z suit une loi de Cauchy de paramètre λ, c'est-à-dire si Z a pour densité $\frac{\lambda}{\pi(\lambda^2+z^2)}$.
   (Indication : on pourra utiliser la question précédente).

Exercice 11. Déterminer, en utilisant le théorème central limite, la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 12. Soit $(X_1, \cdots, X_n)$ un système de n variables aléatoires indépendantes dont les fonctions de répartition sont respectivement $F_1, \cdots, F_n$.
Déterminer les fonctions de répartition de $Y = \max(X_1, \cdots, X_n)$ et de $Z = \min(X_1, \cdots, Xn)$.