

T.D Loi de probabilité et variables aléatoires (S3)  
Série n°1

**Exercice 1.** Montrer les relations de De Morgan

- i)  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ .
- ii)  $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$ .

**Exercice 2.** Pour  $A, B$  deux ensembles de  $E$  on note  $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ . Pour  $E$  un ensemble fini, montrer :

$$\text{Card} A \Delta B = \text{Card} A + \text{Card} B - 2\text{Card} A \cap B.$$

**Exercice 3.** Un étudiant doit répondre à quatre questions à choix multiple où trois réponses sont proposées à chaque fois, une seule étant correcte.

- a) Dans le cas où l'étudiant répond au hasard et de façon indépendante à chaque question, calculer la probabilité qu'il donne plus de réponses justes que fausses.
- b) Que devient cette probabilité s'il n'y a que deux réponses possibles à chaque question ? et s'il y en a quatre ?

**Exercice 4.** Un tiroir contient en vrac les 20 chaussettes de 10 paires différentes. On en sort au hasard 4 chaussettes. Avec quelle probabilité obtient-on :

- a) 2 paires
- b) au moins une paire

**Exercice 5.** Un couple a deux enfants. Sous l'une des conditions suivantes :

- a) l'aîné est un garçon,
- b) l'un des enfants est un garçon,

avec quelle probabilité le couple a-t-il un fils et une fille ?

**Exercice 6.** Soient  $A, B$  et  $C$  trois événements indépendants tels que  $P(A) = a$ ,  $P(A \cup B \cup C) = 1 - b$   $P(A \cap B \cap C) = 1 - c$  et  $P(\bar{A} \cap \bar{B} \cap C) = x$ .

1. Montrer que :  $P(B) = \frac{(1-c)(x+b)}{ax}$  et  $P(C) = \frac{x}{x+b}$ .
2. Montrer que  $x$  satisfait l'équation :

$$ax^2 + (ab - (1-a)(a-c-1))x + b(1-a)(1-c) = 0.$$

En déduire que :

$$c > \frac{(1-a)^2 + ab}{1-a}.$$

**Exercice 7.** Soient  $(p_k)_{k \geq 0}$  une suite de probabilités sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  et  $(p_k)_{k \geq 0}$  une suite de réels de  $[0, 1]$ . Montrer que l'application  $\mathbb{P}$ , définie par

$$\text{pour tout } A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = \sum_{k \geq 0} p_k \mathbb{P}_k(A),$$

est une mesure de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  dès que  $\sum_{k \geq 0} p_k = 1$ .

**Exercice 8.** Soient  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace probabilisé et  $\mathcal{G} = \{A \in \mathcal{F}, \mathbb{P}(A) = 0, \text{ ou } \mathbb{P}(A) = 1\}$ . Montrer que  $\mathcal{G}$  est une tribu sur  $\Omega$ .

**Exercice 9.** Une urne contient des boules blanches, noires et rouges. On tire une boule de l'urne. On note :  $A$  : " Tirer une boule blanche".

$B$  : "Tirer une boule ni blanche ni rouge".

$C$  : "Tirer une boule noire ou une boule rouge".

1. A et B sont-ils incompatibles ?
2. B et C sont-ils incompatibles ?
3. Traduire par une phrase ne comportant pas de négation  $\bar{A}$  et  $\bar{B}$ .

**Exercice 10.** Dans une assemblée de 250 personnes, on ne remarque que les hommes portant la cravate ou ayant les yeux bleus. Il y a 120 hommes qui portent la cravate, 85 hommes qui ont les yeux bleus, dont 50 portent la cravate.

On discute avec une personne choisie au hasard dans cette assemblée.

1. Quelle est la probabilité que ce soit un homme portant la cravate.
2. Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus et portant la cravate.
3. Quelle est la probabilité que ce soit un homme aux yeux bleus ou portant la cravate.
4. Quelle est la probabilité de discuter avec une personne qui n'est ni un homme aux yeux bleus, ni un homme portant la cravate ?

**Exercice 11.** Une urne contient sept boules : une rouge, deux jaunes et quatre vertes. Un joueur tire au hasard une boule. Si elle est rouge, il gagne 10 euros, si elle est jaune, il perd 5 euros, si elle est verte, il tire une deuxième boule de l'urne sans avoir remplacé la première boule tirée. Si cette deuxième boule est rouge, il gagne 8 euros, sinon il perd 4 euros.

1. Construire un arbre pondéré représentant l'ensemble des éventualités de ce jeu.
2. Soit  $X$  la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique du joueur (une perte est comptée négativement).
  - a) Etablir la loi de probabilité de la variable  $X$
  - b) Calculer l'espérance de  $X$ .
3. Les conditions de jeu restent identiques. Indiquer le montant du gain algébrique qu'il faut attribuer à un joueur lorsque la boule tirée au deuxième tirage est rouge, pour que l'espérance de  $X$  soit nulle.

**Exercice 12.** On considère un dé rouge et un dé vert, cubiques, équilibrés. Le dé rouge comporte : deux faces numérotées -1 ; deux faces numérotées 0 ; deux faces numérotées 1. Le dé vert comporte : une face numérotée 0 ; trois faces numérotées 1 ; deux faces numérotées 2. On lance simultanément les deux dés. On note  $X$  la somme des points obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
2. Définir  $F$ , fonction de répartition de  $X$  et construire sa représentation graphique

**Exercice 13.** Une urne contient 3 pièces équilibrées. Deux d'entre elles sont normales : elles possèdent un côté « Pile » et un côté « Face ». La troisième est truquée et possède deux côtés « Face ». On prend une pièce au hasard dans l'urne et on effectue de manière indépendante des lancers successifs de cette pièce. On considère les événements suivants :

$B$  : la pièce prise est normale.  $\bar{B}$  : la pièce prise est truquée.

$P$  : on obtient « Pile » au premier lancer.  $F_n$  : on obtient « Face » pour les  $n$  premiers lancers.

1. a) Quelle est la probabilité de l'événement  $B$  ?  
b) Quelle est la probabilité de l'événement  $P$  sachant que  $B$  est réalisé ?
2. Calculer la probabilité de l'événement  $P \cap B$ , puis de l'événement  $P \cap \bar{B}$ . En déduire la probabilité de l'événement  $P$ .
3. Calculer la probabilité de l'événement  $F_n \cap B$  puis de l'événement  $F_n \cap \bar{B}$ . En déduire la probabilité de l'événement  $F_n$ .

**Exercice 14.** Une urne contient 10 bulletins indiscernables au toucher, de 3 sortes : 4 sont marqués « oui », 3 sont marqués « non » et 3 sont marqués « blanc ».

Un joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne. Quelle est la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes.