Université d'Antananarivo

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques et Informatique

NOTE DE COURS D'ANALYSE

DEUXIÈME ANNÉE DE LICENCE

Semestre 3

Fanilo R. Randriamahaleo

Maître de conférence

Année Universitaire : 2016 - 2017

Table des matières

INTRODUCTION

Le mot *topologie* vient du grec *topos* et *logos* qui signifient « lieu » et « étude » ; mot à mot, c'est donc « l'étude du lieu ». Plus précisément c'est l'étude de la notion de proximité : comment dire précisément si deux points d'un espace sont proches l'un de l'autre, c'est-à-dire *voisins*, ou si une suite de points *tend* vers un point donné ? La topologie tente de donner un sens précis à la notion de voisinage, de *limite* et de *fonction continue* entre deux espaces (c'est-à-dire de fonction qui préserve la notion de voisinage). Nous verrons qu'un *espace topologique* est un espace où il existe une notion très abstraite de voisinage.

Les espaces topologiques les plus simples sont les *espaces métriques* introduits par Maurice Fréchet [1] (1906) qui possèdent une notion de *distance* : il est facile de dire si deux points sont proches si l'on dispose d'une *distance* mesurant leur éloignement. Ce sont les espaces que nous allons étudier principalement dans ce cours. Nous parlerons aussi brièvement des espaces topologiques, qui furent introduits par Felix Hausdorff [2] (1914) et Kazimierz Kuratowski [3] (1922).

Ce cours est une introduction aux notions de base. Il contient le strict minimum pour celui qui souhaite poursuivre les études en mathématiques. Comme la topologie repose sur relativement peu de connaissances acquises, elle présente l'occasion idéale pour l'étudiant de combler d'éventuelles lacunes en logique ou en théorie des ensembles. C'est la raison pour laquelle la plupart des énoncés sont suivis d'une démonstration complète.

Ce polycope est organisé comme suit :

Dans le premier chapitre, nous donnons les généralités sur les espaces métriques et les espaces vectoriels normés (e.v.n). On y etudie les notions de distance, de norme et de leurs propriétés. On introduit aussi la topologie des espaces métriques, les suites convergentes et les fonctions continues.

Dans le deuxième chapitre, nous étudions les espaces métriques complet qui joue un rôle important da l'analyse.

Les deux dernièrs chapitres concernent les grandes notions de topologie, à savoir l'espace compact et l'espace connexe.

1. Maurice Fréchet est un mathématicien français, né à Maligny en 1878. Ses travaux en analyse fonctionnelle le poussent à chercher un cadre plus général que la métrique euclidienne. Il introduit les espaces métriques et dégage les premières notions de topologie.

2. Felix Hausdorff est un mathématicien allemand, né à Breslau en 1868. Il est célèbre pour son apport fondamental en topologie. Il développe la théorie des espaces métriques introduite par Fréchet en 1906, et démontre l'existence et l'unicité de la complétion d'un espace métrique.

3. Kazimierz Kuratowski est un mathématicien polonais, né à Varsovie en 1896. Ses travaux portent sur la théorie des fonctions de variable réelle, la topologie et la théorie des ensembles.

Chapitre 1

ESPACES MÉTRIQUES ET ESPACES VECTORIELS NORMÉS

1.1 Espaces métriques et espaces vectoriels normés

Définition 1.1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Une norme sur E est une application $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

(1). $\|x\| = 0$ si, et seulement si $x = 0$,

(2). $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in E$ (homogénéité),

(3). $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in E$ (inégalité triangulaire)

Si $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel E, le couple $\big(E\,,\,\|\cdot\|\big)$ est appelé espace vectoriel normé (e.v.n).

Remarques

(1). En prenant $\lambda = -1$ dans (2) de la Définition 1.1.1, on obtient $\|-x\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$,

(2). Pour tout $x,\ y \in E$, on a $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x-y\|$

Exemple 1.1.2. L'application $x \longmapsto |x|$ est une norme sur $\mathbb{K}$ (où $|\cdot|$ désigne la valeur absolue usuelle si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et le module si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). C'est la norme usuelle de $\mathbb{K}$.

Définition 1.1.3. Soit X un ensemble non vide. Une distance ou métrique sur X est une application $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant :

(1). $d\big(x\,,\,y\big) = 0$ si, et seulement si $x = y$ (séparation),

(2). $d\big(x\,,\,y\big) = d\big(y\,,\,x\big)$ pour tous $x, y \in X$ (symétrie),

(3). $d\big(x\,,\,y\big) \leq d\big(x\,,\,z\big) + d\big(z\,,\,y\big)$ pour tous $x, y, z \in X$ (inégalité triangulaire).

Si d est une distance sur X, le couple $\big(X\,,\,d\big)$ est appelé un espace métrique.

Exemple 1.1.4. Soit X un ensemble non vide. L'application d définie par $d\big(x\,,\,y\big) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \neq y \\ 0 & \text{si} \quad x = y \end{cases}$ est une distance sur X, appelée la **distance discrète** sur X.

Proposition 1.1.5. *Si $\big(E\,,\,\|.\|\big)$ est un e.v.n, l'application $d\colon \big(x\,,\,y\big)\in E\times E\longmapsto \|x-y\|$ est une distance sur E. Ainsi, tout e.v.n est aussi un espace métrique. La distance d ainsi définie vérifie :*

(1). Pour tout $x,\ y,\ z\in E$, on a $d\big(x+z\,,\,y+z\big)=d\big(x\,,\,y\big)$. On dit que d est invariante par translation,

(2). Pour tout $x,\ y\in E$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$, on a $d(\lambda x,\lambda y)=|\lambda|\,d\big(x\,,\,y\big)$.

Preuve. Exercice. □

La distance associée à la norme usuelle sur $\mathbb{K}$ est appelée la distance usuelle de $\mathbb{K}$.

1.2 Les normes sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

Rappelons que pour tout $n\geq 1$, $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots\mathbb{R}$, ($n$ facteurs) est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Théorème 1.2.1 (Inégalité de Young)**.** *Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Alors pour tous $x,\ y\in[\,0\,,+\infty\,[$, on a*

$$xy\leq\frac{x^p}{p}+\frac{y^q}{q} \tag{1.2.1}$$

Preuve. Puisque $p>0$ et $q>0$, $1=\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}>\dfrac{1}{p}$. Donc, $p>1$ et $q>1$. D'autre part, $q=\dfrac{p}{p-1}$. L'inégalité est immédiate si $y=0$. Soit maintenant $y>0$. Pour $x\geq 0$, posons $f(x)=\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}-xy$. Puisque $p>1$, f est dérivable sur $[\,0\,,+\infty\,[$ avec $f'(x)=x^{p-1}-y$. f admet donc un minimum au point $x_0=y^{\frac{1}{p-1}}$ avec $f(x_0)=0$. Finalement, f est positive sur $[\,0\,,+\infty\,[$ c'est-à-dire $xy\leq\dfrac{x^p}{p}+\dfrac{y^q}{q}$. □

Théorème 1.2.2. *Soient p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. Alors pour tout $\Big(\big(a_1,\cdots,a_n\big),\big(b_1,\cdots,b_n\big)\Big)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, on a*

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\leq\left[\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\times\left[\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right]^{\frac{1}{q}}\quad \textit{(inégalité de Hölder).} \tag{1.2.2}$$

Pour $p=q=2$, on a bien $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ et l'inégalité (1.2.2) *est appelée **inégalité de Cauchy-Schwarz**.*

Preuve. Posons $\alpha=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p$ et $\beta=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q$.
Si $\alpha=0$ ou $\beta=0$, tous les a_k ou tous les b_k sont nuls et l'inégalité est vraie.
Supposons maintenant que $\alpha>0$ et $\beta>0$. On applique (1.2.1) en prenant $x=\dfrac{|a_k|}{\alpha^{\frac{1}{p}}}$ et $y=\dfrac{|b_k|}{\beta^{\frac{1}{q}}}$, on a, pour chaque k :

$$\frac{|a_k|}{\alpha^{\frac{1}{p}}}\times\frac{|b_k|}{\beta^{\frac{1}{q}}}\leq\frac{|a_k|^p}{p\alpha}+\frac{|b_k|^q}{q\beta}.$$

En sommant terme à terme pour k allant de 1 à n, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_k|}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \times \frac{|b_k|}{\beta^{\frac{1}{q}}} \leq \frac{1}{p\alpha} \times \alpha + \frac{1}{q\beta} \times \beta = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Donc,

$$\frac{1}{\alpha^{\frac{1}{p}}} \times \frac{1}{\beta^{\frac{1}{q}}} \sum_{k=1}^{n} |a_k| \times |b_k| \leq 1$$

C'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \times |b_k| \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \times \left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right]^{\frac{1}{q}}.$$

Comme $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k| \times |b_k|$, on a le résultat. □

Théorème 1.2.3. *Soit $p \in \left]1, +\infty\right[$. Alors pour tout $\big((a_1, \cdots, a_n), (b_1, \cdots, b_n)\big) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, on a*

$$\left[\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \quad \textit{(Inégalité de Minkowski)}. \tag{1.2.3}$$

Preuve. On a :

$$\big(|a_k| + |b_k|\big)^p = \big(|a_k| + |b_k|\big)\big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1} = |a_k| \big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1} + |b_k| \big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1}$$

Ainsi,

$$\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^p = \sum_{k=1}^{n} |a_k| \big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1} + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1}.$$

Soit q un nombre réel tel que $1 < q < +\infty$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. D'après l'inégalité de Hölder on a :

- $\sum_{k=1}^{n} |a_k| \big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |a_k|\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}$ et
- $\sum_{k=1}^{n} |b_k| \big(|a_k| + |b_k|\big)^{p-1} \leq \left[\sum_{k=1}^{n} |b_k|\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}}.$

Donc,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^p &\leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^{(p-1)q}\right]^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^{(p-1)q}\right]^{1-\frac{1}{p}}, \quad \text{car} \quad \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \\
&\leq \left[\left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right] \left[\sum_{k=1}^{n} \big(|a_k| + |b_k|\big)^{p}\right]^{1-\frac{1}{p}}, \quad \text{car} \quad (p-1)q = p.
\end{aligned}$$

- Si $\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p = 0$, tous les a_k et les b_k sont nuls et l'inégalité est immédiate.
- Si $\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p > 0$, après simplification par $\left[\sum_{k=1}^{n}\left(|a_k|+|b_k|\right)^p\right]^{1-\frac{1}{p}}$, on a l'inégalité.

□

Théorème 1.2.4. *Pour $\left(x_1,\cdots,x_n\right)\in\mathbb{R}^n$, on définit les applications :*

$$\|x\|_\infty = \max\left\{|x_k|\ ;\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\right\},\quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n}|x_k| \quad et \quad \|x\|_2 = \left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Alors $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont des normes sur $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Pour $j = 1,\ 2$ ou ∞, on a

- $\|x\|_j = 0$ si, et seulement si $x_k = 0$ c'est-à-dire $x = 0$.
- $\|\lambda x\|_j = |\lambda|\,\|x\|_j$ pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ et tout $\lambda\in\mathbb{K}$.

Il reste à vérifier l'inégalité triangulaire c'est-à-dire $\|x+y\|_j \le \|x\|_j + \|y\|_j$.

(1). Pour $j=1$, on a $|x_k+y_k| \le |x_k|+|y_k|$ pour tout k. Donc, $\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k| \le \sum_{k=1}^{n}\Big(|x_k|+|y_k|\Big)$.

(2). Pour $j=2$, on prend $p=2$ dans l'inégalité de Minkowski (1.2.3), on a :

$$\left[\sum_{k=1}^{n}|x_k+y_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \le \left[\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} + \left[\sum_{k=1}^{n}|y_k|^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{c'est-à-dire} \quad \|x+y\|_2 \le \|x\|_2 + \|y\|_2 .$$

(3). Pour $j=\infty$, on a $|x_k+y_k| \le |x_k|+|y_k| \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ pour tout k. Mais $\|x+y\|_\infty = |x_{k_0}+y_{k_0}|$ pour un certain k_0. Il s'ensuit que $\|x+y\|_\infty \le \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$.

□

1.3 Propriétés de la distance

Proposition 1.3.1. *Soit $\left(X\,,\,d\right)$ un espace métrique. Alors pour tout x, y et z de X , on a :*

$$\left|d\left(x,y\right)-d\left(x,z\right)\right| \le d\left(y,z\right).$$

Preuve. Soiet $x,y,z\in X$. Puisque d est une distance, la relation (3) de la Définition 1.1.3 donne

$$d\left(x,y\right) \le d\left(x,z\right)+d\left(z,y\right) \ \text{ et } \ d\left(x,z\right) \le d\left(x,y\right)+d\left(y,z\right).$$

Donc,

$$d\left(x,y\right)-d\left(x,z\right) \le d\left(z,y\right) \ \text{ et } \ d\left(x,z\right)-d\left(x,y\right) \le d\left(y,z\right).$$

Comme $d(y,z) = d(z,y)$ (d'après (2) de la Définition 1.1.3), on a

$$\begin{cases} d(x,y) & - & d(x,z) & \leq & d(y,z) \\ d(x,z) & - & d(x,y) & \leq & d(y,z) \end{cases}$$

Ainsi, $\left|d(x,y) - d(x,z)\right| = \max\left\{d(x,y) - d(x,z)\ ;\ d(x,z) - d(x,y)\right\} \leq d(y,z)$ □

Définition 1.3.2. Soient X un ensemble non vide, d_1 et d_2 deux distances sur X. On dit que d_1 et d_2 sont équivalentes s'il existe deux constantes positives α et β telles que

$$\alpha d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta d_2(x,y) \text{ pour tout } x,y \in X.$$

Si les deux distances d_1 et d_2 sont associées respectivement aux normes $\|.\|_1$ et $\|.\|_2$, on dit que les deux normes sont équivalentes.

Proposition 1.3.3. *Dans $\mathbb{R}^n$, les trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes et on a :*

$$\|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_1 \leq \sqrt{n}\,\|\cdot\|_2 \leq n\,\|\cdot\|_\infty$$

Maintenant, quand on parle de l'space $\mathbb{R}^n$, il s'agira de $\mathbb{R}^n$ muni de la distance associée à l'une des trois normes.

Définition 1.3.4. Soient A un sous-ensemble non vide et $x \in X$. On appelle **distance de x à A** le nombre positif ou nul défini par $\boldsymbol{d(x,A) = \inf_{y\in A} d(x,y)}$.
Noter que $d(x,A) = 0$ si, et seulement si $x \in A$.

Définition 1.3.5. Soient A et B deux sous-ensembles de X.

(1). On appelle **distance entre A et B** le nombre $\boldsymbol{d(A,B)} = \inf\left\{\boldsymbol{d(x,y)\ ;\ x \in A} \text{ et } \boldsymbol{y \in B}\right\}$.

(2). On appelle **diamètre de A** le nombre positif $\operatorname{diam}(\boldsymbol{A}) = \sup\left\{\boldsymbol{d(x,y)\ ;\ x,y \in A}\right\}$.

(3). On dit que le sous-ensemble A est **borné** si $\operatorname{diam}(A)$ est fini.

Proposition 1.3.6. *Un sous-ensemble A de (X,d) est borné si, et seulement s'il existe $a \in X$ et $r > 0$ tels que $d(a,x) < r$ pour tout $x \in A$.*

Preuve. Si A est borné c'est-à-dire il existe M tel que $\operatorname{diam}(A) \leq M$, il suffit de fixer un x quelconque dans A et prendre $r = M$. Réciproquement, supposons qu'il existe $r > 0$ et $a \in X$ tels que $d(a,x) < r$. Alors pour tout $x,y \in A$, on a $d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) \leq 2r$. Donc $\operatorname{diam}(A) \leq 2r$ et A est borné. □

Remarquer que le diamètre d'un singleton est nul.

Proposition 1.3.7. *Soit E un espace vectoriel normé. Un sous-ensemble A est borné si, et seulement s'il existe un réel $M > 0$ tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$.*

Preuve. Supposons que A est borné et soit $a \in A$. Alors

$$\forall x \in A, \quad \|x-a\| + \|a\| \leq \operatorname{diam}(A) + \|a\| .$$

En prenant $M = \operatorname{diam}(A) + \|a\|$, on a $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$.

Réciproquement, supposons qu'il existe un réel M tel que $\|x\| \leq M$ pour tout $x \in A$. Alors

$$\forall x, y \in A, \quad d\big(x\,,\,y\big) = \|x-y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq 2M$$

Donc $\operatorname{diam}(A) \leq M$ et A est borné. □

La propriété suivante est nécessaire.

Proposition 1.3.8. *Soient A et B deux sous-ensembles bornés de $\big(X\,,\,d\big)$. Alors $A \cup B$ est borné et*

$$\delta(A \cup B) \leq d(A,B) + \delta(A) + \delta(B).$$

Définition 1.3.9. Soient $\big(X\,,\,d\big)$ un espace métrique et A un sous-ensemble de X. La restriction

$$d_{|A\times A} : A \times A \longrightarrow [\,0\,,\,+\infty\,[$$

à A de la distance d est aussi une distance, appelée **la distance induite de d sur A**.

Le couple $\big(A\,,\,d_{|_A}\big)$ est appelé **sous-espace métrique** de $\big(X\,,\,d\big)$.

1.4 Topologie des espaces métriques

Dans cette section, on fixe un espace métrique $\big(X\,,\,d\big)$ et les résultats de cette section sont valables dans $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.1. Soient $a \in X$ et $r > 0$.

(1). On appelle **boule ouverte de centre a et de rayon r**, le sous-ensemble de X défini par

$$B\big(a\,,\,r\big) = \Big\{x \in X\,;\, d\big(a\,,\,x\big) < r\Big\}.$$

(2). On appelle **boule fermée de centre a et de rayon r**, le sous-ensemble de X défini par

$$B_f\big(a\,,\,r\big) = \Big\{x \in X\,;\, d\big(a\,,\,x\big) \leq r\Big\}.$$

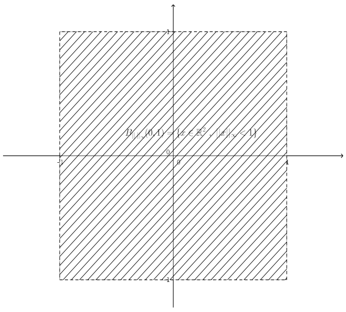
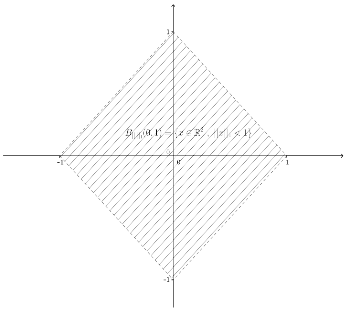
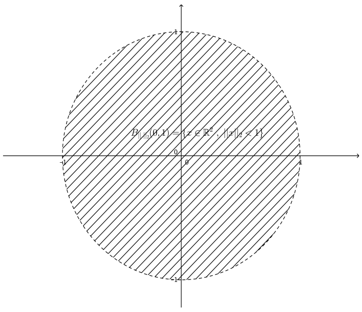
(3). On appelle **sphère de centre a et de rayon r**, le sous-ensemble de X défini par

$$S\big(a\,,\,r\big) = \Big\{x \in X\,;\, d\big(a\,,\,x\big) = r\Big\}.$$

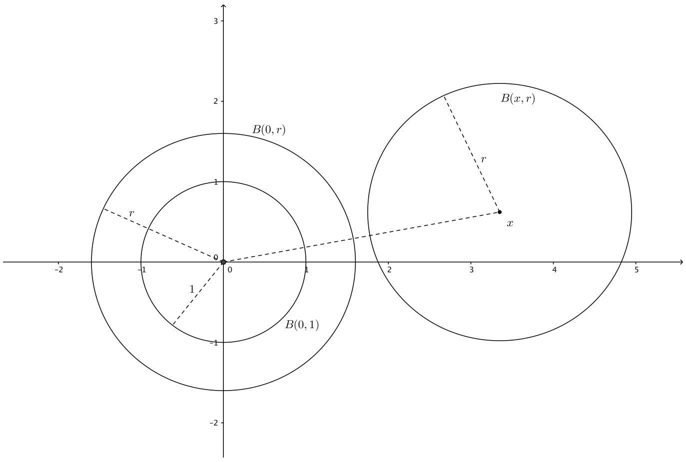
Exemple 1.4.2. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, on a :

$$B\big(a\,,\,r\big) = \,]\,a-r\,,\,a+r\,[\,, \quad B_f\big(a\,,\,r\big) = [a-r\,,\,a+r] \quad \text{et} \quad S\big(a\,,\,r\big) = \big\{a-r\,,\,a+r\big\}.$$

Les figures suivantes montrent les boules unités ouvertes de $\mathbb{R}^2$ pour chacune des trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$, dans cet ordre.

Remarque 1.4.3. En vertu de la Proposition 1.1.5, dans $\mathbb{R}^n$ toutes les boules peuvent s'obtenir comme dilatation et translation de la boule unité. En effet, $B\big(x\,,\,r\big)=x+rB\big(0\,,\,1\big)$ et $B_f\big(x\,,\,r\big)=x+rB_f\big(0\,,\,1\big)$.



Il suffit donc de tracer $B\big(0\,,\,1\big)$ ou $B_f\big(0\,,\,1\big)$ pour se rendre compte de la forme de toutes les boules.

Définition 1.4.4. On dit qu'un sous-ensemble U de X est **ouvert** s'il est vide ou si, pour tout $x\in U$, on peut trouver un $r>0$ tel que $B\big(x\,,\,r\big)\subseteq U$.

On dit que $F\subseteq X$ est **fermé** si le complémentaire $F^c=X\setminus F$ de F est ouvert.

Exemple 1.4.5. On munit $\mathbb{R}$ de la distance usuelle et soient $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$.

(1). Les intervalles de la forme $]-\infty\,,\,\alpha\,[\,,\ ]\,\alpha\,,\,\beta\,[$ et $]\,\alpha\,,\,+\infty\,[$ sont des ensembles ouverts de $\mathbb{R}$. En effet, soit $x\in\,]-\infty\,,\,\alpha\,[$ et soit $\varepsilon=\alpha-x$. Alors $B(x,\varepsilon)=\,]\,x-\varepsilon\,,\,x+\varepsilon\,[\,\subseteq\,]-\infty\,,\,\alpha\,[$. On vérifie de la même manière pour les intervalles $]\,\alpha\,,\,\beta\,[$ et $]\,\alpha\,,\,+\infty\,[$.

(2). L'intervalle $[\alpha\,,\,\beta]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ puisque $\mathbb{R}\setminus[\alpha\,,\,\beta]=\,]-\infty\,,\,\alpha\,[\,\cup\,]\,\beta\,,\,+\infty\,[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Il en est de même pour $]-\infty\,,\,\alpha\,]$ et $[\,\beta\,,\,+\infty\,[$.

Remarques

(1). Il existe des sous-ensembles de X qui ne sont ni ouverts ni fermés et il y en a aussi qui sont à la fois ouverts et fermés.

(2). **ouvert n'est pas le contraire de fermé**.

Définition 1.4.6. L'ensemble des ouverts de $\left(X\,,d\right)$ est appelé la **topologie** de X définie par d.

Proposition 1.4.7. *Si d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes sur un ensemble X, les ouverts (resp. les fermés) de $\left(X\,,d_1\right)$ et de $\left(X\,,d_2\right)$ coïncident.*

Proposition 1.4.8. *Soir $\left(X\,,d\right)$ un espace métrique et $\left(A\,,d_{|_A}\right)$ un sous-espace de X. Alors*

(1). V est ouvert de $\left(A\,,d_{|_A}\right)$ si, et seulement s'il existe un ouvert U de $\left(X\,,d\right)$ tel que $V = U \cap A$.

(2). H est fermé de $\left(A\,,d_{|_A}\right)$ si, et seulement si il existe un fermé F de $\left(X\,,d\right)$ tel que $H = F \cap A$.

(3). Si A est un sous-ensemble ouvert de $\left(X\,,d\right)$, V est un ouvert de $\left(A\,,d_{|_A}\right)$ si, et seulement si $V \subset A$ et V est un ouvert de $\left(X\,,d\right)$.

(4). Si A est un sous-ensemble fermé de $\left(X\,,d\right)$, H est un fermé de $\left(A\,,d_{|_A}\right)$ si, et seulement si $H \subset A$ et H est un fermé de $\left(X\,,d\right)$.

Preuve. Exercice. □

Théorème 1.4.9. *On a les propriétés suivantes :*

(1). $\emptyset$ et X sont des ouverts,

*(2). toute intersection **finie** d'ouverts est un ouvert,*

(3). toute réunion (finie ou non) d'ouverts est un ouvert.

Preuve. Exercice. □

Exemple 1.4.10. D'après le (3) du théorème, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ est ouvert si, et seulement s'il est réunion d'intervalles ouverts.

Théorème 1.4.11. *On a les propriétés suivantes :*

(1). $\emptyset$ et X sont des fermés,

(2). toute intersection (finie ou non) de fermés est un fermé,

*(3). toute réunion **finie** de fermés est un fermé.*

Théorème 1.4.12. *Toute boule ouverte est un ouvert et toute boule fermée est un fermé.*

Preuve. Montrons que pour tout $x \in B\left(a\,,r\right)$, il existe $s > 0$ tel que $B\left(x\,,s\right) \subseteq B\left(a\,,r\right)$.
Soit $x \in B\left(a\,,r\right)$ et $s = r - d\left(a\,,x\right)$. Il est clair que $s > 0$ et pour tout $y \in B\left(x\,,s\right)$, on a

$$\begin{array}{rcl} d\left(a,y\right) & \leq & d\left(y,x\right)+d\left(x,a\right) \text{ (d'après l'inégalité triangulaire)} \\ & < & s+d\left(a,x\right)=r \end{array}$$

Donc $y \in B\left(a\,,r\right)$ c'est-à-dire $B\left(x\,,s\right) \subseteq B\left(a\,,r\right)$ et $B\left(a\,,r\right)$ est ouvert.

Montrons maintenant que $B_f(a, r)$ est fermé. Pour cela, il suffit de montrer que $X \setminus B_f(a, r)$ est ouvert. Remarquer que $X \setminus B_f(a, r) = \{x \in X \, ; \, d(a, x) > r\}$.
Soit $x \in X$ tel que $d(a, x) > r$ et $t = d(a, x) - r$. On a $t > 0$ et si $y \in B(x, t)$,

$$d(a, y) \geq d(a, x) - d(x, y) > d(a, x) - t = r$$

Donc $B(x, t) \subseteq \{x \in X \, ; \, d(a, x) > r\}$. Ce qui prouve que $X \setminus B_f(a, r)$ est ouvert c'est-à-dire $B_f(a, r)$ est fermé. □

Corollaire 1.4.13. *Un sous-ensemble U de X est ouvert si, et seulement s'il est réunion de boules ouvertes.*

Preuve. Puisqu'une boule ouverte est un ouvert, il suffit d'appliquer le (3) du Théorème 1.4.9. □

Définition 1.4.14. Soient $V \subseteq X$ et $x \in X$. On dit que V est un **voisinage de x** s'il existe un $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq V$. C'est-à-dire V est un voisinage de x s'il contient une boule ouverte centrée en x.
On note par $\mathscr{V}(x)$ l'ensemble de tous les voisinages de x.

Il découle de la définition que si V est un voisinage d'un point x et si $V \subseteq W$ alors W est aussi un voisinage de x. On a aussi la proposition suivante :

Proposition 1.4.15. *Un sous-ensemble V de X est ouvert si, et seulement s'il est voisinage de tous ses points.*

Définition 1.4.16. Soit A un sous-ensemble de X et $x \in X$.

(1). On dit que x est **intérieur à A** si A est un voisinage de x. Autrement dit, x est intérieur à A s'il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq A$.
   On appelle **intérieur** de A et on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble de tous les points intérieurs à A. Il est clair que $\overset{\circ}{A} \subseteq A$.

(2). On dit que x est **adhérent à A** si, pour tout voisinage V de x, on a $V \cap A \neq \emptyset$ c'est-à-dire encore pour tout $r > 0$, $B(x, r) \cap A \neq \emptyset$.
   On appelle **adhérence** de A et on note par $\overline{A}$ l'ensemble des points adhérents à A.
   Remarquer que $A \subseteq \overline{A}$ car si $x \in A$, pour tout $r > 0$ on a $x \in B(x, r) \cap A$.

Remarque 1.4.17. Par construction, on a $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$, pour toute partie A d'un espace métrique (X, d).

Proposition 1.4.18. *Soient (X, d) un espace métrique, $x \in X$ et $r > 0$. Alors*

(1). $\overline{B(x, r)} \subset B_f(x, r)$,

(2). $B(x, r) \subset \overset{\circ}{\widehat{B_f(x, r)}}$.

Proposition 1.4.19. *Soient $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, $x \in E$ et $r > 0$. Alors*

(1). $\overline{B\big(x\,,\,r\big)} = B_f\big(x\,,\,r\big)$,

(2). $B\big(x\,,\,r\big) = \overset{\circ}{\widehat{B_f\big(x\,,\,r\big)}}$,

(3). $\partial\Big(B\big(x\,,\,r\big)\Big) = \partial\Big(B_f\big(x\,,\,r\big)\Big) = S\big(x\,,\,r\big)$.

On a les propriétés suivantes :

Proposition 1.4.20. *Pour tout sous-ensemble A de X, on a :* $\overset{\circ}{\widehat{A^c}} = \big(\overline{A}\big)^c$ *et* $\overline{A^c} = \big(\overset{\circ}{A}\big)^c$.

Preuve. Nous allons seulement montrer la première égalité. On a

$$\begin{aligned} x \in \overset{\circ}{\widehat{X\setminus A}} &\Longleftrightarrow X\setminus A \in \mathscr{V}(x) \\ &\Longleftrightarrow \exists r>0 \text{ tel que } B\big(x\,,\,r\big) \subseteq X\setminus A \\ &\Longleftrightarrow B\big(x\,,\,r\big)\cap A = \emptyset \text{ c'est-à-dire } x\notin \overline{A} \text{ ou encore } x\in X\setminus\overline{A}. \end{aligned}$$

□

Proposition 1.4.21. *Soit A un sous-ensemble de X. Un point x est adhérent à A si, et seulement si* $d\big(x,A\big) = 0$.

Preuve. Si $x\in\overline{A}$, toute boule ouverte de centre x et de rayon strictement positif rencontre A ; ce qui montre que $d\big(x,A\big)=0$. Réciproquement, si $d\big(x,A\big)=0$, pour tout $r>0$, il existe $y\in A$ tel que $B\big(x\,,\,r\big)\cap A\neq\emptyset$. □

Proposition 1.4.22. $\overset{\circ}{A}$ *est le plus grand ouvert contenu dans A.*

Preuve. Nous allons montrer la proposition en trois étapes. On va d'abord montrer que $\overset{\circ}{A}$ est contenu dans A, puis $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert et enfin, si U est un ouvert contenu dans A, on a $U\subseteq\overset{\circ}{A}$.

Si $x\in\overset{\circ}{A}$, $A\in\mathscr{V}(x)$ donc $x\in A$, ce qui montre que $\overset{\circ}{A}\subseteq A$. D'autre part puisque $x\in\overset{\circ}{A}$, il existe $r>0$ tel que $B\big(x\,,\,r\big)\subset A$. Comme la boule ouverte $B\big(x\,,\,r\big)$ est voisainage de tous ses points, A est un voisinage de tous les points de $B\big(x\,,\,r\big)$. On a donc $B\big(x\,,\,r\big)\subset\overset{\circ}{A}$. Ceci étant vrai pour tout $x\in\overset{\circ}{A}$ donc $\overset{\circ}{A}$ est ouvert.

Soient maintenant $U\subset A$ un ouvert et $x\in U$. Puisque U est ouvert, U est un voisinange de x.
La relation $U\subset A$ montre qu'il en est de même pour A donc $U\subset\overset{\circ}{A}$, ce qui montre que $\overset{\circ}{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A. □

Les propriétés suivantes se déduisent de la proposition précédente.

Corollaire 1.4.23. *Soient A et B deux sous-ensembles de X. On a*

(1). *A est ouvert si, et seulement si* $\overset{\circ}{A} = A$,

(2). *$A \subset B$ entraîne $\overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$,*

(3). *$\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ et $\overset{\circ}{\widehat{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.*

Proposition 1.4.24. *$\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.*

Preuve. Il est clair, d'après la Proposition 1.4.20, que $\overline{A}$ est fermé et pour tout $x \in A$ et tout $r > 0$, on a $x \in B\big(x\,,\,r\big) \cap A$ c'est-à-dire $x \in \overline{A}$, ce qui motre que $A \subset \overline{A}$. D'autre part, si F est un sous-ensemble fermé de X qui contient A, $X \setminus F$ est un ouvert et $X \setminus F \subset X\mathbb{A}$. Donc, $X \setminus F \subset \overset{\circ}{\widehat{X \setminus A}}$, c'est-à-dire $X \setminus F \subset \overline{A}$. On en déduit que $\overline{A} \subset F$. □

On déduit de la proposition précédente les propriétés suivantes

Corollaire 1.4.25. *Soient A et B deux sous-ensembles de X. On a*

(1). *A est fermé si, et seulement si $\overline{A} = A$,*

(2). *$A \subset B$ entraîne $\overline{A} \subset \overline{B}$,*

(3). *$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$ et $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.*

Définition 1.4.26. On dit qu'un sous-ensemble A de X est **dense** dans X si $\overline{A} = X$.

Proposition 1.4.27. *Pour tout sous-ensemble A de X, les assertions suivantes sont équivalentes*

(1). *A est dense dans X,*

(2). *Pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$, il existe $a \in A$ tel que $d\big(x\,,\,a\big) \leq r$,*

(3). *Pour tout sous-ensemble ouvert U de X, on a $U \cap A \neq \emptyset$,*

Définition 1.4.28. Soit A un sous-ensemble de X. On appelle **frontière** de A et on note $Fr(A)$ l'ensemble défini par $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = \overline{A} \cap \overline{A^c}$.

Définition 1.4.29. Soit A un sous-ensemble de X. On dit que

(1). $x \in X$ est un **point d'accumulation** de A si pour tout $r > 0$, on a $B\big(x\,,\,r\big) \cap \big(A \setminus \big\{x\big\}\big) \neq \emptyset$.
En particulier, $B\big(x\,,\,r\big) \cap A$ est un ensemble infini.

(2). $x \in X$ est **point isolé** si, et seulement s'il existe $V \in \mathscr{V}(x)$ tel que $A \cap V = \big\{x\big\}$.

1.5 Suites dans les espaces métriques

Définition 1.5.1. Soient $\big(X\,,\,d\big)$ un espace métrique et $(x_n)_n$ une suite dans X. On dit que la suite $(x_n)_n$ est **convergente** s'il existe $\ell \in X$ tel que

$$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon > 0;\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq N_\varepsilon\ \text{ entraîne }\ d\big(x_n\,,\,\ell\big) \leq \varepsilon.}$$

On note $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \ell$ quand la limite existe.
Une suite qui ne converge pas est dite **divergente**.

Remarque 1.5.2. On peut reformuler la définition d'une suite convergente en terme de voisinage. On dit que la suite $(x_n)_n$ est **convergente** s'il existe $\ell \in X$ tel que

$$\forall V \in \mathscr{V}(\ell),\ \exists N_V \in \mathbb{N},\ \textbf{tel que si } n \geq N_V,\ \textbf{ on a } x_n \in V.$$

Proposition 1.5.3. *Soient d_1 et d_2 sont deux distances équivalentes sur un ensemble X et soit $\big(x_n\big)_n$ une suite dans X. Alors, $x_n \longrightarrow \ell$ dans $\big(X\,,d_1\big)$ si, et seulement si $x_n \longrightarrow \ell$ dans $\big(X\,,d_2\big)$*

Proposition 1.5.4. *Dans un espace métrique, la limite d'une suite est unique quand elle existe.*

Preuve. Supposons que (x_n) converge vers ℓ_1 et ℓ_2. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que :

$$d\big(x_n\,,\ell_1\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{et} \quad d\big(x_n\,,\ell_2\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dès que} \quad n \geq N_\varepsilon.$$

Ainsi, pour $n \geq N_\varepsilon$ l'inégalité triangulaire donne

$$d\big(\ell_1\,,\ell_2\big) \leq d(\ell_1,x_n) + d\big(x_n\,,\ell_2\big) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc $\ell_1 = \ell_2$. □

Rappelons qu'une sous-suite de $\big(x_n\big)_n$ est une suite de la forme $\big(x_{\varphi(n)}\big)_n$ où $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Théorème 1.5.5. *Si $\big(x_n\big)_n$ converge vers ℓ, toute sous-suite $(x_{\varphi(n)})_n$ de $(x_n)_n$ converge vers ℓ.*

Preuve. Avant de faire la preuve, remarquons que si $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante, $\varphi(n) \geq n$. (Pour le vérifier, il suffit de faire un raisonnement par récurrence).

Soit maintenant (x_n) une suite convergeant vers ℓ et $\big(x_{\varphi(n)}\big)$ une sous-suite de (x_n). Alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_\varepsilon$, $d\big(x_n\,,\ell\big) \leq \varepsilon$. Grâce à la remarque précedente, si $n \geq N_\varepsilon$, $\varphi(n) \geq n \geq N_\varepsilon$ et donc $d\big(x_{\varphi(n)},\ell\big) \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $\big(x_{\varphi(n)}\big)$ converge vers ℓ. □

Proposition 1.5.6. *Soient $\big(E\,,\|\cdot\|\big)$ un **espace vectoriel normé** et $\big(x_n\big)_n$, $\big(y_n\big)_n$ deux suites dans E. Soient α, β dans $\mathbb{K}$. Si les deux suites $\big(x_n\big)_n$ et $\big(y_n\big)_n$ convergent dans E, la suite $\big(\alpha x_n + \beta y_n\big)_n$ converge dans E et on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\big(\alpha x_n + \beta y_n\big) = \alpha \lim\limits_{n\to+\infty} x_n + \beta \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.*

Preuve. Exercice. □

Le théorème suivant caractérise l'adhérence d'un sous-ensemble d'un espace métrique à l'aide des suites.

Théorème 1.5.7. *Soient A un sous-ensemble d'un espace métrique $\big(X\,,d\big)$ et $x \in X$. Alors $x \in \overline{A}$ si, et seulement s'il existe une suite $(x_n)_n \subseteq A$ telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$.*

Preuve. Supposons que $x \in \overline{A}$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$, $B\big(x\,,\,\varepsilon\big) capA \neq \emptyset$ c'est-à-dire il existe $\alpha \in A$ tel que $d\big(x\,,\,\alpha\big) < \varepsilon$. Donc pour $n \geq 1$, il existe $\alpha_n \in A$ tel que $d(x, \alpha_n) < \dfrac{1}{n}$. La suite $(\alpha_n)_n$ est dans A et converge vers x.

Réciproquement, soit $(x_n)_n$ une suite dans A qui converge vers x et soit $\varepsilon > 0$. Alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $d\big(x\,,\,x_n\big) < \varepsilon$. Donc $B\big(x\,,\,\varepsilon\big) \cap A \neq \emptyset$ puisqu'il contient tous les x_n dès que $n \geq N$. D'où $x \in \overline{A}$. □

Corollaire 1.5.8. *Un sous-ensemble A d'un espace métrique $\big(X\,,\,d\big)$ est fermé si, et seulement si toute suite d'éléments de A qui converge admet sa limite dans A.*

Définition 1.5.9. Soit $(x_n)_n$ une suite dans l'espace métrique $\big(X\,,\,d\big)$. On dit qu'un élément $\alpha \in X$ est une **valeur d'adhérence** de la suite $(x_n)_n$ si

$$\forall \boldsymbol{\varepsilon} > \mathbf{0},\ \forall \boldsymbol{N} \in \mathbb{N},\ \exists \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{N}\ \ \textbf{tel que}\ \ \boldsymbol{d}\big(\boldsymbol{x_n}\,,\,\boldsymbol{\alpha}\big) < \boldsymbol{\varepsilon}. \tag{1.5.1}$$

La relation (1.5.1) équivaut à "Pour tout $V \in \mathscr{V}(\alpha)$, $\big\{n \in \mathbb{N}\ ;\ x_n \in V\big\}$ est un ensemble infini" ou encore "pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\big\{n \in \mathbb{N}\ ;\ x_n \in B(\alpha, \varepsilon)\big\}$ est infini".

Théorème 1.5.10. *Un élément $\alpha \in X$ est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$ si, et seulement s'il existe une sous-suite $\big(x_{\varphi(n)}\big)$ de $(x_n)_n$ qui converge vers α.*

Preuve. Supposons que α soit limite d'une sous-suite de $\big(x_n\big)_n$ c'est-à-dire il existe une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante et $\alpha = \lim x_{\varphi(n)}$. Soient $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Trouvons un entier n tel que $n \geq N$ et $d\big(x_n, \alpha\big) \leq \varepsilon$.
Par hypothèse, $\alpha = \lim x_{\varphi(n)}$ donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, $d\big(x_{\varphi(n)}, \alpha\big) \leq \varepsilon$. Posons $n_1 = \max(n_0, N)$ et $n_2 = \varphi(n_1)$. On a $n_2 \geq n_1$ et $n_2 \geq N$ donc, $d\big(x_{n_2}, \alpha\big) \leq \varepsilon$.

Réciproquement, supposons que α soit une valeur d'adhérence de $\big(x_n\big)_n$. Définissons une application $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ de la manière suivante :

- $\varphi(0)$ est choisi arbitrairement dans $\mathbb{N}$ et
- pour tout $n \geq 1$, $\varphi(n)$ est le plus petit entier tel que

$$\varphi(n-1) < \varphi(n) \tag{1.5.2}$$

et

$$d\big(x_{\varphi(n)}, \alpha\big) \leq \varepsilon. \tag{1.5.3}$$

L'entier $\varphi(n)$ existe car α est une valeur d'adhérence de $\big(x_n\big)_n$. La relation (1.5.2) assure que l'application φ est strictement croissante et la relation (1.5.3) montre que $\big(x_{\varphi(n)}\big)_n$ converge vers α.

□

Corollaire 1.5.11. *Si $\big(x_n\big)_n$ converge vers ℓ, l'unique valeur d'adhérence de $(x_n)_n$ est ℓ.*

Preuve. Puisque $\left(x_n\right)_n$ converge vers ℓ, toute sous-suite de $\left(x_n\right)_n$ converge vers ℓ ; autrement dit ℓ est une valeur d'adhérence de la suite $\left(x_n\right)_n$. Comme la limite est unique, ℓ est l'unique valeur d'adhérence de $\left(x_n\right)_n$. $\square$

Une suite peut avoir aucune ou plusieures valeur d'adhérence :

- La suite réelle $\left(x_n\right)_n$ définie par $x_n = n$ d'a pas de valeur d'adhérence,
- La suite réelle $\left(x_n\right)_n$ définie par $x_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n \text{ est pair} \\ 1 & \text{si} \quad n \text{ est impair} \end{cases}$ admet deux valeurs d'adhérence, à savoir 0 et 1

Le théorème suivant caractérise les sous-ensembles denses à l'aide des suites

Théorème 1.5.12. *Un sous-ensemble A d'un espace métrique X est dense si, et seulement si pour tout $x \in X$, il existe une suite $(x_n)_n$ d'éléments de A qui converge vers x.*

Preuve. La démonstration est la même que celle du Théorème 1.5.7. $\square$

Remarque 1.5.13. Si on pose $A = \left\{x_n \, ; \, n \in \mathbb{N}\right\}$ et x est un point d'accumulation de A alors x est une valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_n$.

1.6 Applications continues

Définition 1.6.1. Soient X et Y deux ensembles quelconques et $f : X \longrightarrow Y$ une application.

(1) . Pour tout sous-ensemble A de X, on appelle image de A par f et on note $f(A)$, le sous-ensemble de Y défini par $f(A) = \left\{f(x) \, ; \, x \in A\right\}$.
En particulier, $f(X)$ est appelé **image de f** et on la note $\mathscr{I}\boldsymbol{m(f)}$.

(2) . Pour tout sous-ensemble B de Y, on appelle image réciproque (ou antécédent) de B par f et on note $f^{-1}(B)$, le sous-ensemble de X défini par $f^{-1}(B) = \left\{x \in X \, ; \, f(x) \in B\right\}$.

Définition 1.6.2. Soient X un ensemble, $\left(Y \, , \, \delta\right)$ un espace métrique et $f : X \longrightarrow \left(Y \, , \, \delta\right)$ une application. On dit que f est une application bornée si $\mathscr{I}m(f)$ est un sous-ensemble borné de $\left(Y \, , \, \delta\right)$.

Dans la suite on fixe deux espaces métriques $\left(X \, , \, d\right)$ et $\left(Y \, , \, \delta\right)$.

Définition 1.6.3. Soient A un sous-ensemble de X, $\alpha \in \overline{A}$, $f : A \longrightarrow Y$ une application et $\ell \in Y$. On dit que f a pour limite ℓ en α ou que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers α et on écrit $\lim\limits_{x \to \alpha} f(x) = \ell$ si

$$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0, \; \exists \eta > 0; \; \forall x \in A, \; d\left(x \, , \, \alpha\right) \leq \eta \;\; \textbf{entraîne} \;\; \delta\left(f(x) \, , \, \ell\right) \leq \varepsilon.}$$

Noter que si $\alpha \in A$, f ne peut avoir d'autre limite en α que $f(\alpha)$.

Sous les hypothèses de la Définition 1.6.3 ci-dessus, nous avons le théorème suivant

Théorème 1.6.4. *L'application f a pour limite ℓ en α si, et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ de A convergeant vers α (une telle suite existe car $\alpha \in \overline{A}$), la suite $\left(f(x_n)\right)_n$ converge vers ℓ.*

Preuve. Supposons que f a pour limite ℓ en α et soit (x_n) une suite dans X qui converge vers α. Montrons que $f\big(x_n\big)$ converge vers ℓ.
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x \in X$, $d(\alpha,x) \leq \eta$ entraîne $\delta\big(f(x)\,,\,\ell\big) \leq \varepsilon$.
Comme (x_n) converge vers α, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $d\big(x_n\,,\,\alpha\big) \leq \eta$.
Donc, pour $n \geq N$, on a $\delta\big(\ell\,,\,f(x_n)\big) \leq \varepsilon$. C'est-à-dire la suite $\big(f(x_n)\big)_n$ converge vers ℓ.

Pour la réciproque, nous allons montrer la contraposée de l'implication. Supposons que $f(x)$ n'ait pas de limite ℓ en α c'est-à-dire

$$\exists \varepsilon > 0,\ \forall \eta > 0,\ \exists x_n \in X,\ d(a,x_n) \leq \eta \ \text{ et }\ \delta\big(\ell\,,\,f(x_n)\big) > \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, en prenant $\eta = \dfrac{1}{n+1}$, on peut trouver $x_n \in X$ tel que $d(\alpha,x_n) \leq \dfrac{1}{n+1}$ et $\delta\big(\ell\,,\,f(x_n)\big) > \varepsilon$. On voit que la suite (x_n) ainsi construite converge vers α alors que $\big(f(x_n)\big)_n$ ne converge pas vers ℓ. □

Définition 1.6.5. On dit que l'application $f\colon A \longrightarrow Y$ est continue en $\alpha \in A$ si $\lim\limits_{x\to\alpha} = f(\alpha)$. Autrement dit, f est continue en α si

$$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_{\alpha,\varepsilon};\ \forall x \in A,\ d\big(\alpha\,,\,x\big) \leq \eta_{\alpha,\varepsilon}\ \text{ entraîne }\ \delta\big(f(\alpha)\,,\,f(x)\big) \leq \varepsilon.}$$

On dit que f est continue sur A si elle est continue en tout point de A.

On peut aussi caractériser la continuité à l'aide des suites. Cette caractérisation est très utile pour verifier la continuité ou la discontinuité d'une application.

Théorème 1.6.6. *Une application $f\colon \big(X\,,\,d\big) \longrightarrow \big(Y\,,\,\delta\big)$ est **continue en α** si, et seulement si pour toute suite $(x_n)_n$ d'éléments de X qui converge vers α, la suite $\big(f(x_n)\big)_n$ d'éléments de Y converge vers $f(\alpha)$. Autrement dit, f est continue si, et seulement si pour toute suite (x_n) dans X,*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\Big(\lim_{n\to+\infty} x_n\Big).$$

Preuve. Il suffit de remplacer ℓ par $f(\alpha)$ dans la preuve du Théorème 1.6.4. □

Les équivalences du théorème suivant, appelées *caractérisation topologique d'une application continue*, sont souvent utilisées pour montrer d'une part, qu'une application entre deux espaces métriques est continue et d'autre part, qu'un sous-ensemble d'une espace métrique est ouvert ou fermé.

Théorème 1.6.7. *Soient $\big(X\,,\,d\big)$, $\big(Y\,,\,\delta\big)$ deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une application. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(1). f est continue,

(2). Pour tout sous-ensemble fermé F de Y, $f^{-1}(F)$ est un sous-ensemble fermé de X,

(3). Pour tout sous-ensemble ouvert O de Y, $f^{-1}(O)$ est un sous-ensemble ouvert de X.

Définition 1.6.8. Soient A un sous-ensemble de X, $\alpha \in \overline{A}$ et $f : A \longrightarrow Y$ une application qui admet une limite ℓ en α. L'application $\widetilde{f}$ définie sur $A \cup \{\alpha\}$ par

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si} \quad x \in A \\ \ell & \text{si} \quad x = \alpha. \end{cases}$$

est continue et est appelée **prolongement continue de** $\boldsymbol{f}$

Proposition 1.6.9. *Soient $f, g : X \longrightarrow Y$ deux applications continues et A un sous-ensemble* ***dense*** *de X (c'est-à-dire $\overline{A} = X$). Alors si $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in A$, on a $f = g$ sur X.*

Preuve. Soit $x \in X$ et montrons que $f(x) = g(x)$. Puisque A est dense, il existe une suite (x_n) dans A qui converge vers x. Puisque f et g sont continues en x, les suite $\big(f(x_n)\big)_n$ et $\big(g(x_n)\big)_n$ convergent vers $f(x)$ et $g(x)$ respectivement. Par hypothèse, $\big(f(x_n)\big)_n = \big(g(x_n)\big)_n$ pour tout n donc $f = g$. $\square$

Théorème 1.6.10. *Soient X, Y et Z trois espaces métriques. Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est continue en $a \in X$ et $g\colon Y \longrightarrow Z$ est continue en $f(a)$, $g \circ f$ est continue en a. La composé de deux applications continues est continue.*

Preuve. Soit (x_n) une suite dans X convergeant vers a. Puisque f est continue, $f(x_n)$ converge vers $f(a)$; puisque g est continue, $g\big(f(x_n)\big)$ converge vers $g\big(f(a)\big)$. $\square$

Proposition 1.6.11. *Soient X un espace métrique, E un espace vectoriel normé et α, $\beta \in \mathbb{K}$. Si f, $g\colon X \longrightarrow E$ sont continues, $\alpha f + \beta g$ est continue.*

Noter bien que E est un espace vectoriel normé car si E est un espace métrique quelconque, on ne peut pas définir la somme de deux éléments.

Définition 1.6.12. Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+$. On dit que $f\colon \big(X\,,d\big) \longrightarrow \big(Y\,,\delta\big)$ est **lipschitzienne** de rapport α si

$$\text{Pour tout } \; x, y \in X, \;\; \text{on a } \; \delta\big(f(x)\,,f(y)\big) \leq \alpha d\big(x\,,y\big).$$

Si de plus $\alpha \in [\,0\,,1\,[$, on dit que f est contractante.
Si $\alpha = 1$, on dit que f est une isométrie. Autrement dit, $f\colon \big(X\,,d\big) \longrightarrow \big(Y\,,\delta\big)$ est une isométrie si pour tous x, $y \in X$, on a $\delta\big(f(x)\,,f(y)\big) = d\big(x\,,y\big)$. Si $f\colon \big(X\,,d\big) \longrightarrow \big(Y\,,\delta\big)$ est une isométrie, les deux espace X et Y sont dits isométriques.

Proposition 1.6.13. *Si $f\colon \big(X\,,d\big) \longrightarrow \big(Y\,,\delta\big)$ est lipschitzienne, elle est continue.*

Proposition 1.6.14. *Si $f\colon \big(X\,,d\big) \longrightarrow \big(Y\,,\delta\big)$ est une isométrie, elle est continue et injective.*

Preuve. La continuité est évidente car elle est $1-$lipschitzienne. Supposons maintenant que x et y sont tels que $f(x) = f(y)$. Alors $\delta\big(f(x)\,,f(y)\big) = 0 = d\big(x\,,y\big)$ c'est-à-dire $x = y$ car d et δ. Donc, f est bien injective. $\square$

Définition 1.6.15. On dit qu'une application $f\colon X \longrightarrow Y$ est un **homéomorphisme** si elle est bijective, continue et si la bijection réciproque f^{-1} est continue. Dans ce cas, les deux espaces métriques X et Y sont dits **homéomorphes**.

Proposition 1.6.16. *Si f et g sont des homéomorphismes, $g \circ f$ est un homéomorphisme.*

Remarque 1.6.17. Un homéomorphisme transporte :

- les parties ouvertes de X en parties ouvertes de Y,
- les parties fermées de X en parties fermées de Y,
- l'adhérence d'une partie dans X en l'adhérence de la partie image dans Y,
- l'intérieur d'une partie dans X en l'intérieur de la partie image dans Y,
- les suites convergentes dans X en suites convergentes dans Y,
- la limite d'une suite dans X en limite de la suite image dans Y,
- le point d'accumulation d'une suite dans X en point d'accumulation de la suite image dans Y.

Définition 1.6.18. Une application $f : \big(X\,,d\big) \longrightarrow \big(Y\,,\delta\big)$ est dite **uniformément continue** si :

$$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta_{\varepsilon} > 0;\ \forall \big(x\,,y\big) \in X \times X,\ d\big(x\,,y\big) \leq \eta_{\varepsilon}\ \text{ entraîne }\ \delta\big(f(x)\,,f(y)\big) \leq \varepsilon.}$$

Exemple 1.6.19. Si A est un sous-ensemble d'un espace métrique $\big(X\,,d\big)$, l'application $x \longmapsto d\big(x\,,A\big)$ est uniformément continue.

Comme dans le cas d'une application continue, on peut caractériser la continuité uniforme d'une application à l'aide des suites.

Théorème 1.6.20. *Soient $\big(X\,,d\big)$ et $\big(Y\,,\delta\big)$ deux espaces métriques. Une application $f\colon X \longrightarrow Y$ est uniformément continue si, et seulement si pour toutes suites $\big(x_n\big)_n$ et $\big(y_n\big)_n$ de X, $d\big(x_n\,,y_n\big) \longrightarrow 0$ entraîne $\delta\big(f(x_n)\,,f(y_n)\big) \longrightarrow 0$.*

Théorème 1.6.21. *Toute application uniformément continue est continue.*

Attention ! La réciproque de ce théorème est fausse.

Proposition 1.6.22. *La composée de deux fonctions uniformément continues est uniformément continue.*

Proposition 1.6.23. *Si $f\colon X \longrightarrow Y$ est une application lipschitzienne, elle est uniformément continue donc continue.*

Définition 1.6.24. Soient $\big(X\,,d\big)$ et $\big(Y\,,\delta\big)$ deux espaces métriques. On dit que $f\colon X \to Y$ est une isométrie si pour tous $x,\ y \in X$, on a $\delta\big(f(x)\,,f(y)\big) = d\big(x\,,y\big)$. Si de plus f est surjective, on dit que X et Y sont isométriques.

1.7 Espace produit

Théorème 1.7.1. *Soient* $\big(E_1\,,\,\|.\|_1\big),\ \big(E_2\,,\,\|.\|_2\big),\ \cdots,\ \big(E_n\,,\,\|.\|_n\big)$*, n- espaces vectoriels normés. Posons*

$$E=\prod_{i=1}^{n}E_i=E_1\times E_2\times\cdots\times E_n:=\Big\{x=\big(x_1,x_2,\cdots,x_n\big)\ ;\ x_i\in E_i\ \textit{ pour chaque } i\in\big\{1,\ 2,\cdots,n\big\}\Big\}.$$

Alors les trois applications suivantes sont des normes sur E :

$$N_1(x)=\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_i\ ,\qquad N_2(x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|_i^2}\qquad \textit{et}\qquad N_\infty(x)=\max_{1\le i\le n}\|x_i\|_i$$

pour $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E$.

L'espace E défini dans le théorème ci-dessus est appelé **espace vectoriel produit** de $E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_n$. Les trois normes définies sur X sont appelées les **normes fondamentales** sur E.

Remarquons que puisque $|\cdot|$ est une norme sur $\mathbb{R}$, les trois normes définies sur $\mathbb{R}^n$ dans le Théorème 1.2.4 sont les normes fondamentales sur $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.7.2. *Soient* $\big(X_1\,,\,\delta_1\big),\ \big(X_2\,,\,\delta_2\big),\ \cdots,\ \big(X_n\,,\,\delta_n\big)$*, n-espaces métriques. Posons*

$$X=\prod_{i=1}^{n}X_i=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n:=\Big\{x=\big(x_1,x_2,\cdots,x_n\big)\ ;\ x_i\in X_i\ \textit{ pour chaque } i\in\big\{1,\ 2,\cdots,n\big\}\Big\}.$$

Alors les trois applications suivantes sont des distances sur X :

$$d_1\big(x\,,y\big)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i\big(x_i,y_i\big)\ ,\qquad d_2\big(x\,,y\big)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\Big[\delta_i\big(x_i,y_i\big)\Big]^2}\qquad \textit{et}\qquad d_\infty\big(x\,,y\big)=\max_{1\le i\le n}\delta_i\big(x_i,y_i\big)$$

pour $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in X$.

L'espace X défini dans le théorème ci-dessus est appelé **espace métrique produit** de $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$. Les trois distances définies sur X sont appelées les **distances fondamentales** sur X.

Proposition 1.7.3. *Soient* $\big(X_1\,,\,\delta_1\big),\ \cdots,\ \big(X_n\,,\,\delta_n\big)$ *(resp.* $\big(E_1\,,\,\|.\|_1\big),\ \cdots,\ \big(E_n\,,\,\|.\|_n\big)$*), n-espaces métriques (resp. n- espaces vectoriels normés). Alors*

$$d_\infty\le d_1\le\sqrt{n}d_2\le nd_\infty\quad \textit{et}\quad N_\infty\le N_1\le\sqrt{n}N_2\le nN_\infty.$$

Autrement dit, elles sont équivalentes.

Théorème 1.7.4. *On munit* $X=\prod_{i=1}^{n}X_i$ *(resp.* $E=\prod_{i=1}^{n}E_i$*) l'une des trois distances* d_∞*,* d_1 *et* d_2 *(resp.* N_∞*,* N_1 *et* N_2*). Alors*

(1). Une partie U de X (resp. de E) est ouvert si, et seulement si pour tout $x = \big(x_1, x_2, \cdots, x_n\big) \in U$, il existe $r > 0$ tel que

$$B\big(x_1\,,\,r\big) \times B\big(x_2\,,\,r\big) \times \cdots \times B\big(x_n\,,\,r\big) \subset U,$$

où $B\big(x_i\,,\,r\big)$ est la boule ouverte dans X_i (resp. dans E_i), de centre x_i et de rayon r.

(2). Soient U_i un ouvert de X_i (resp. de E_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. Alors $U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ est un ouvert de X (resp. de E), appelé ***ouvert élémentaire****.*

(3). Soient F_i un fermé de X_i (resp. de E_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. Alors $F_1 \times F_2 \times \cdots \times F_n$ est un fermé de X (resp. de E), appelé ***fermé élémentaire****.*

(4). Soient $A_i \subseteq X_i$ (resp. E_i), $i = 1, 2, \cdots, n$. Alors

$$\overline{\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)} = \prod_{i=1}^{n} \overline{A_i} \quad et \quad \overset{\circ}{\widehat{\left(\prod_{i=1}^{n} A_i\right)}} = \prod_{i=1}^{n} \overset{\circ}{\widehat{A_i}}$$

(5). Soit $\big(x_m\big)_m = \big(x_1^m, x_2^m, \cdots, x_n^m\big)_m$ une suite dans X (resp. dans E). Alors $\big(x_m\big)_m$ est convergente si, et seulement si pour tout $i = 1, 2, \cdots, n$, la suite $\big(x_i^m\big)_m$ est convergente ; et dans ce cas, on a

$$\lim_{m\to\infty} x_m = \Big(\lim_{m\to\infty} x_1^m,\ \lim_{m\to\infty} x_2^m,\ \cdots,\ \lim_{m\to\infty} x_n^m\Big)$$

Définition 1.7.5. Soient X_1, X_2, $\cdots$, X_n, n- ensembles. On appelle projection d'indice i, l'application P_i définie par :

$$\begin{array}{rcccl} P_i & : & X = \prod_i X_i & \longrightarrow & X_i \\ & & (x_1, x_2, \cdots, x_n) & \longmapsto & x_i \end{array}$$

Proposition 1.7.6. *Soient $\big(X_1\,,\,\delta_1\big)$, $\cdots$, $\big(X_n\,,\,\delta_n\big)$ (resp. $\big(E_1\,,\,\|.\|_1\big)$, $\cdots$, $\big(E_n\,,\,\|.\|_n\big)$), n-espaces métriques (resp. n- espaces vectoriels normés). On munit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ (resp. $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$) l'une des trois distances d_∞, d_1 et d_2 (resp. N_∞, N_1 et N_2). Alors pour chaque i, P_i est une application continue. De plus, si U est un ouvert de X alors $P_i(U)$ est un ouvert de $\big(X_i\,,\,\delta_i\big)$*

Proposition 1.7.7. *Soient $\big(X_1\,,\,\delta_1\big)$, $\cdots$, $\big(X_n\,,\,\delta_n\big)$ (resp. $\big(E_1\,,\,\|.\|_1\big)$, $\cdots$, $\big(E_n\,,\,\|.\|_n\big)$), n-espaces métriques (resp. n- espaces vectoriels normés). On munit $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ (resp. $E = \prod_{i=1}^{n} E_i$) l'une des trois distances d_∞, d_1 et d_2 (resp. N_∞, N_1 et N_2) et soit $\big(Y\,,\,\delta\big)$ un autre espace métrique. Une application*

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \big(Y\,,\,\delta\big) & \longrightarrow & X = \prod_i X_i \\ & & x & \longmapsto & f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)\big) \end{array}$$

est continue en $\alpha \in Y$ si, et seulement si f_i est continue en α pour tout $i \in \big\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\big\}$.

Définition 1.7.8. Soient $X_1,\ X_2,\ \cdots,\ X_n$ et Y, $(n+1)$- ensembles, $f\colon X=\prod_i X_i \longrightarrow Y$ une application et $\alpha=\big(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\big)\in X=\prod_i X_i$. On appelle application partielle d'indice i au point α, l'application, notée f_i définie par

$$\begin{array}{rcccl} f_i & : & X_i & \longrightarrow & Y \\ & & x & \longmapsto & f_i(x)=f\big(\alpha_1,\cdots,\alpha_{i-1},x,\alpha_{i+1},\cdots\alpha_n\big) \end{array}$$

Proposition 1.7.9. *Soient $\big(X_1\,,\delta_1\big),\ \cdots,\ \big(X_n\,,\delta_n\big)$ (resp. $\big(E_1\,,\|.\|_1\big),\ \cdots,\ \big(E_n\,,\|.\|_n\big)$), n-espaces métriques (resp. n- espaces vectoriels normés). On munit $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ (resp. $E=\prod_{i=1}^{n} E_i$) l'une des trois distances d_∞, d_1 et d_2 (resp. N_∞, N_1 et N_2) et soit $\big(Y\,,\delta\big)$ un autre espace métrique. Soit $f\colon X=\prod_i X_i \longrightarrow Y$ une application et $\alpha=\big(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\big)\in X=\prod_i X_i$. Alors, si f est continue en en α, les applications partielles f_i en α sont continue en α_i.*

Attention, la réciproque de la proposition précédente est fausse en général. Il se peut que tous les f_i soient continues en α_i sans que f le soit en α.

Chapitre 2

ESPACES MÉTRIQUES COMPLETS

Jusqu'à présent, on peut parler de la convergence d'une suite quand on connaît à priori sa limite. La complétude est une notion métrique permettant de prédire l'existence de la limite à partir de propriétés de la suite. On peut donc dire que les espaces complets qui jouent un rôle central en analyse.

2.1 Suites de Cauchy

L'objectif de la notion de suite de Cauchy est de pouvoir montrer que certaines suites convergent ou non. L'idée est la suivante : si les x_n sont aussi proches que l'on veut les uns des autres quand devient grand, ils sont proches d'un élément, qui est alors la limite de la suite. Ce résultat est faux dans un espace métrique quelconque mais il est vrai dans les espaces métriques complet.

Définition 2.1.1. Soit $(x_n)_n$ une suite dans X. On dit que $(x_n)_n$ est une **suite de Cauchy** si

$$\boldsymbol{\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N};\ \forall (p,q) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N},\ p \geq N_\varepsilon \ \text{ et } \ q \geq N_\varepsilon \ \text{ entraînent } d\big(x_p\,,x_q\big) \leq \varepsilon}$$

Proposition 2.1.2. *Si $\big(x_n\big)_n$ est convergente, elle est une suite de Cauchy*

Preuve. Supposons que (x_n) converge vers $\ell \in X$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque (x_n) est convergente, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $d\big(x_n\,,\ell\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Si $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $d\big(x_p\,,\ell\big) leq \frac{\varepsilon}{2}$ et $d\big(x_q\,,\ell\big) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. L'inégalité triangulaire donne

$$d\big(x_p\,,x_q\big) \leq d\big(x_p\,,\ell\big) + d\big(\ell\,,x_q\big) \leq \varepsilon$$

Donc, (x_n) est de Cauchy. □

Proposition 2.1.3. *Si $\big(x_n\big)_n$ est une suite de Cauchy, toute sous-suite de $\big(x_n\big)_n$ est une suite de Cauchy*

Preuve. Supposons que $\big(x_n\big)_n$ est une suite de Cauchy et soit $\big(x_{\varphi(n)}\big)_n$ une sous-suite de $\big(x_n\big)_n$. Montrons que $\big(x_{\varphi(n)}\big)$ est de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\big(x_n\big)_n$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq N$ et $q \geq N$, $d\big(x_p\,,x_q\big) \leq \varepsilon$. Comme φ est une strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $\varphi(p) \geq p \geq N$ et $\varphi(q) \geq q \geq N$ donc $d\big(x_{\varphi(p)}\,,x_{\varphi(q)}\big) \leq \varepsilon$. Donc $\big(x_{\varphi(n)}\big)$ est une suite de Cauchy. □

Proposition 2.1.4. *Si $\left(x_n\right)_n$ est une suite de Cauchy, elle est bornée*

Preuve. Supposons que $\left(x_n\right)_n$ est une suite de Cauchy c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq N$ et $q \geq N$, $d\left(x_p\,,x_q\right) \leq \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe $n_0 \in \mathbb{N} \setminus \left\{0\right\}$ tel que si $n \geq n_0$ et $p \geq n_0$, $d\left(x_n\,,x_p\right) \leq 1$. En particulier, si $n \geq n_0$, $d\left(x_n\,,x_{n_0}\right) \leq 1$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$d\left(x_n\,,x_{n_0}\right) \leq \max\left\{d\left(x_0\,,x_{n_0}\right),\ d\left(x_1\,,x_{n_0}\right),\ \cdots,\ d\left(x_{n-1}\,,x_{n_0}\right),1\right\}$$

□

Proposition 2.1.5. *Soit $\left(x_n\right)_n$ une suite de Cauchy. Si $\left(x_n\right)_n$ admet une valeur d'adhérence, elle est convergente.*

Preuve. Supposons que (x_n)est une suite de Cauchy et soit $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ une sous-suite de (x_n) convergeant vers α. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq N_\varepsilon$ et $q \geq N_\varepsilon$, on a $d\left(x_p\,,x_q\right) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$ (car (x_n) est de Cauchy). D'autre part, il existe $n_\varepsilon \geq N_\varepsilon$ tel que $d\left(x_{\varphi(n_\varepsilon)}\,,\alpha\right) \leq \dfrac{\varepsilon}{2}$. Comme φ est strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, $\varphi(n_\varepsilon) \geq n_\varepsilon \geq N_\varepsilon$. On en déduit que pour tout $n \geq N_\varepsilon$,

$$d\left(x_n\,,\alpha\right) \leq d\left(x_n\,,x_{\varphi(n_\varepsilon)}\right) + d\left(x_{\varphi(n_\varepsilon)}\,,\alpha\right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Donc (x_n) converge vers α. □

Théorème 2.1.6. *Soient d et δ deux distances équivalentes sur X. Toute suite $\left(x_n\right)_n$ d'éléments de X est de Cauchy dans $\left(X\,,d\right)$ si, et seulement si elle est de Cauchy dans $\left(X\,,\delta\right)$.*

Preuve. Exercice. □

Proposition 2.1.7. *Si $f\colon \left(X\,,d\right) \longrightarrow \left(Y\,,\delta\right)$ est **uniformément continue** et $\left(x_n\right)_n$ est une suite de Cauchy de X, la suite $\left(f\left(x_n\right)\right)_n$ est une suite de Cauchy de Y.*

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ vérifiant : $\forall x, y \in X$ tels que $d\left(x\,,y\right) \leq \eta$, on ait $\delta\left(f(x)\,,f(y)\right) \leq \varepsilon$. Comme la suite $\left(x_n\right)_n$ est de Cauchy, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $d\left(x_p\,,x_q\right) \leq \varepsilon$. Donc, pour $p \geq N$ et $q \geq N$, on a $\delta\left(f(x_p)\,,f(x_q)\right) \leq \varepsilon$. Ce qui montre que $\left(f\left(x_n\right)\right)_n$ est une suite de Cauchy. □

Attention. La continuité uniforme de f dans le théorème est essentiel. Si on suppose seulement que f est une application continue, le résultat n'est plus vrai en général. En effet, posons $X = \mathbb{R}_+$ muni de la distance induite de la distance usuelle de $\mathbb{R}$ et $Y = \mathbb{R}$. La suite $\left(\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}_+$ mais son image par l'application $f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ n'est pas une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$.

2.2 Espace métrique complet

Définition 2.2.1. On dit que $\big(X\,,d\big)$ est complet si toute suite de Cauchy de X converge dans X. Si la distance d est associée à une norme c'est-à-dire X est un e.v.n , on dit que $\big(X\,,d\big)$ est un espace de Banach. Un sous-ensemble A de X est complet si (A,d_A) est complet (où d_A étant la distance induite de d sur A.

Remarque 2.2.2. Dans un espace métrique complet, pour montrer qu'une suite est convergente, il suffit donc de vérifier qu'elle est de Cauchy. Cela s'appelle le **critère de Cauchy**.

Proposition 2.2.3. *Soient X un ensemble non vide et d_1, d_2 deux distances équivalentes sur X. Alors $\big(X\,,d_1\big)$ est complet si, et seulement si , $\big(X\,,d_2\big)$ est complet.*

Preuve. Exercice. □

Théorème 2.2.4. *Soient $\big(X\,,d\big)$ un espace métrique complet et A un sous-ensemble de X. Alors $\big(A\,,d_{|_A}\big)$ est complet si, et seulement si A est fermé.*

Preuve. Supposons que A est complet et montrons qu'il est fermé. Pour montrer que A est fermé, il suffit de montrer que $\overline{A}=A$. Par définition de $\overline{A}$, il nous reste à montrer que $\overline{A}\subseteq A$ car on a déjà $A\subseteq\overline{A}$. Soit alors $x\in\overline{A}$. Montrons que $x\in A$. Puisque $x\in\overline{A}$, il existe une suite $\big(x_n\big)_n$ d'éléments de A qui converge vers x. Puisque la suite est convergente, elle est donc de Cauchy, dans X donc dans A. Par hypothèse, A est complet donc la suite $\big(x_n\big)_n$ dans A. Mais par l'unicité de la limite dans X, la limite dans A de la suite $\big(x_n\big)_n$ n'est autre que x. Donc $x\in A$.

Réciproquement, supposons que A est fermé et soit $\big(x_n\big)_n$ une suite de Cauchy dans A. Montrons que la suite $\big(x_n\big)_n$ converge dans A. Puisque $\big(x_n\big)_n$ est une suite de Cauchy dans A, elle est aussi de Cauchy dans X et comme X est complet, la suite $\big(x_n\big)_n$ converge dans X vers une limite que nous notons ℓ. Puisque A est fermé et ℓ est limite d'une suite d'éléments de A, on a $\ell\in A$. On a donc montré que toute suite de Cauchy dans A converge dans A c'est-à-dire A est complet. □

Attention : Contrairement à ceux qui ont été dits dans la Remarque 1.6.17, soient X et Y des espaces métriques et $f\colon X\longrightarrow Y$ un homéomorphisme. Il se peut que X soit complet sans que Y le soit et vice versa.

Théorème 2.2.5. *Soient $\big(X_1\,,d_1\big)$, $\cdots$, $\big(X_n\,,d_n\big)$, n espaces métriques et $X=X_1\times X_2\times\cdots\times X_n$ muni de l'une des distances fondamentales, notée d. Alors $\big(X\,,d\big)$ est complet si, et seulement si chaque espace (X_i,d_i) est complet.*

Nous avons comme conséquence du théorème précédent le résultat suivant

Corollaire 2.2.6. *$\mathbb{R}^n$ muni de l'une des trois normes $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ est un espace complet (c'est-à-dire un espace de Banach).*

Théorème 2.2.7. *Soient $\big(X\,,d\big)$ un espace métrique complet et $\big(F_n\big)_n$ une suite de fermés non vides de X vérifiant :*

(1). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+1} \subset F_n$,

(2). $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta\big(F_n\big) = 0$ (où δ désigne le diamètre).

Alors $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est réduit à un point.

Preuve. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta\big(F_n\big) = 0$, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N_\varepsilon$, on a $\delta\big(F_n\big) < \varepsilon$. Pour chaque $n \geq 0$, on choisit un x_n dans F_n. Comme la suite $\big(F_n\big)_n$ est décroissante pour l'inclusion, on a : $x_n,\ x_m \in F_n$ dès que $m \geq n$. Donc, pour $m \geq n \geq N_\varepsilon$, on a $d\big(x_n\,,x_m\big) \leq \delta\big(F_n\big) < \varepsilon$. Ainsi, la suite $\big(x_n\big)_n$ est une suite de Cauchy et comme X est complet, elle converge. Notons ℓ sa limite. Puisque F_n est fermé et que pour tout $m \geq n$, $x_m \in F_n$, on a $\ell \in F_n$. Donc, $\ell \in \bigcap\limits_n F_n$. $\square$

2.3 Théorème du point fixe

Le théorème du point fixe est un outil fondamental de l'Analyse. En déhors de ses applications immédiates en analyse numérique (résolution d'équations par la méthode des approximations successives), il possède d'importantes applications théoriques en calcul différentiel (théorème des fonctions implicites et équations différentielles).

Théorème 2.3.1. *Soient X un espace métrique complet non vide et $f : X \longrightarrow X$ une fonction contractante. Alors f admet un unique point fixe α c'est-à-dire il existe un unique $\alpha \in X$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. De plus, pour tout point $x \in X$, le point α peut être obtenu comme étant la limite de la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = f\big(u_n\big)$ pour $n \geq 1$.*

Preuve. Supposons que f soit $k-$lipschitzienne avec $0 < k < 1$. Soit $(u_n)_n$ la suite définie par $u_0 = x \in X$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour $n \geq 1$. Pour $i \geq 1$, on a

$$d\big(u_{i+1}\,,u_i\big) = d\big(f(u_i)\,,f(u_{i-1})\big) \leq kd\big(u_i\,,u_{i-1}\big).$$

On en déduit par récurrence que

$$d\big(u_{i+1}\,,u_i\big) \leq k^i d\big(u_1\,,u_0\big).$$

Pour $m > n$, on a

$$\begin{aligned} d\big(u_m\,,u_n\big) &\leq \sum_{i=n+1}^{m} d\big(u_i\,,u_{i-1}\big) \\ &\leq \Big(\sum_{i=n+1}^{m} k^{i-1}\Big) d\big(u_1\,,u_0\big) \\ &\leq \frac{k^n}{1-k} d\big(u_1\,,u_0\big). \end{aligned}$$

Comme $k^n \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$, on voit que la suite $(u_n)_n$ est une suite de Cauchy donc elle converge vers une certain $\alpha \in X$. Comme f est continue, $f(\alpha) = \alpha$.

Unicité. Supposons qu'il existe deux points x et y tels que $f(x) = x$ et $f(y) = y$. On a

$$d\big(x\,,\,y\big) = d\big(f(x)\,,\,f(y)\big) \leq kd\big(x\,,\,y\big).$$

Puisque $0 < k < 1$, on a $d\big(x\,,\,y\big) = 0$ et donc $x = y$. □

Le théorème du point fixe a une très grande importance tant théorique que pratique. En effet, de très nombreux problèmes peuvent se présenter sous la forme de recherche de point fixe : le théorème d'inversion locale, le théorème des fonctions implicites (en calcul fifférentiel) et le théorème d'existence et d'unicité d'équations différentielles (théorème de Cauchy-Lipschitz).

D'un point de vue théorique, il faut surtout retenir l'existence et l'unicité du point fixe de l'application contractante f.

D'un point de vue pratique, la convergence de la suite $\big(u_n\big)_n$ vers le point fixe **permet** de déterminer le point fixe avec une précision arbitraire et on a de plus un contrôle sur l'erreur commise : on a vu que

$$d\big(u_m\,,\,u_n\big) \leq \frac{k^n}{1-k} d\big(u_1\,,\,u_0\big)$$

pour $m \geq n$ et on a donc

$$d\big(\alpha\,,\,u_n\big) \leq \frac{k^n}{1-k} d\big(u_1\,,\,u_0\big)$$

Soit $f\colon X \longrightarrow X$ une application. On définit les iterées de f par :

$$f^0 = \mathrm{Id} \quad \text{et} \quad \forall q \in \mathbb{N}, f^{q+1} = f \circ f^q$$

Théorème 2.3.2. *Soit $\big(X\,,\,d\big)$ un espace métrique complet non vide et $f\colon X \longrightarrow X$ une application dont une itérée f^q est contractante. Alors l'équation $f(x) = x$ admet une solution et une seule, et cette solution est limite de toute suite $\big(u_n\big)_n$ de la forme $u_n = f^n(x_0)$, ($x_0 \in X$).*

Chapitre 3

ESPACES MÉTRIQUES COMPACTS

3.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.1.1. Un espace $\left(X\,,d\right)$ est dit **compact** si de toute suite $\left(x_n\right)_n$ d'éléments de X, on peut extraire une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ convergeant dans X. Cette propriété est appelée la propriété de Bolzano-Weierstrass.

D'après le Théorème 1.5.10, un point $\alpha \in X$ est une valeur d'adhérence d'une suite (x_n) si, et seulement s'il est limite d'une sous-suite de (x_n). Nous avons donc une définition équivalente d'un epace métrique compact.

Définition 3.1.2. Un espace métrique $\left(X\,,d\right)$ est dit **compact** si toute suite dans X possède au moins une valeur d'adhérence.

Par convention $\emptyset$ est compact.

Définition 3.1.3. Une partie A d'une espace métrique $\left(X\,,d\right)$ est compact si le sous-espace métrique $\left(A\,,d_{|_A}\right)$ est compact.

Exemple 3.1.4. Soient $\left(X\,,d\right)$ un espace métrique et $x \in X$. Alors le singleton $\{x\}$ est une partie compacte de X. En effet, toute suite dans $\{x\}$ est constante et donc converge dans l'ensemble $\{x\}$ vers x.

Donnons quelques propriétés simples des espaces compacts.

Proposition 3.1.5. *Tout espace métrique compact est borné.*

Preuve. Nous allons montrer par contraposition c'est-à-dire nous allons montrer que si X n'est pas borné, X n'est pas compact. Pour montrer que X n'est pas compact, il suffit de trouver une suite dans X dont aucune sous-suite n'est convergente.

Soient $\alpha,\ \beta \in X$ tels que $\alpha \neq \beta$. Puisque X n'est pas borné, aucune boule de centre α n'est égale à X. On peut donc définir par récurrence une suite $(\alpha_n)_n$ de X en posant $\alpha_0 = \beta$ et pour $n \geq 1$, $d\left(\alpha\,,\alpha_{n+1}\right) > 2d\left(\alpha\,,\alpha_n\right)$. La suite $\left(d\left(\alpha\,,\alpha_n\right)\right)_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Si $\left(\alpha_{n_k}\right)_k$ est une sous-suite de $(\alpha_n)_n$, la suite $\left(\alpha_{n_k}\right)_k$ n'est pas bornée car la suite $\left(d\left(\alpha\,,\alpha_n\right)\right)_n$ a pour limite $+\infty$. Il n'existe donc aucune sous-suite convergente de $\left(\alpha_n\right)$, ce qui montre que X n'est pas compact. $\square$

Corollaire 3.1.6. *$\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle n'est pas compact.*

Preuve. $\mathbb{R}$ n'est pas borné. $\square$

Le théorème de Bolzano-Weirstrass du cours de la première année affirme que toute suite bornée dans $\mathbb{R}$ possède une sous-suite convergente. Il conduit à la proposition suivante :

Proposition 3.1.7. *Pour tous $a,\ b \in \mathbb{R}$, le segment $[a\,,b]$ est compact.*

Preuve. Toute suite $\big(x_n\big)_n$ dans $[a\,,b]$ est bornée. Par conséquent, elle possède une sous-suite $\big(x_{\varphi(n)}\big)_n$ convergente dont la limite ℓ est dans $[a\,,b]$ car $[a\,,b]$ est fermé. La sous-suite $\big(x_{\varphi(n)}\big)_n$ de $\big(x_n\big)_n$ est donc convergente dans $[a\,,b]$. $\square$

Théorème 3.1.8. *Si $\big(X\,,d\big)$ est un espace métrique compact, il est complet. La réciproque est fausse.*

Preuve. Il faut montrer que toute suite de Cauchy est convergente. Pour cela, soit (x_n) une suite de Cauchy dans X. Puisque X est compact, la suite (x_n) admet une valeur d'adhérence (c'est la définition d'un espace métrique compact) et d'après la Proposition 2.1.5, (x_n) est convergente. $\square$

La proposition suivante présente l'intérêt des espace métriques compacts.

Proposition 3.1.9. *Dans un espace métrique compact $\big(X\,,d\big)$, une suite $\big(x_n\big)_n$ est convergente si, et seulement si elle ne possède qu'une seule valeur d'adhérence.*

Preuve. Si la suite $\big(x_n\big)_n$ converge, sa limite est son unique valeur d'adhérence (Corollaire 1.5.11). Réciproquement, supposons que $\big(x_n\big)_n$ admet une unique valeur d'adhérence α. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\mathscr{N} := \big\{n \in \mathbb{N}\ ;\ d(x_n, \alpha) > \varepsilon\big\}$. Si $\mathscr{N}$ est infini, il existe une suite strictement croissante $\big(n_k\big)_k$ dans $\mathscr{N}$. Puisque X est compact, la suite $\big(x_{n_k}\big)_k$ admet une valeur d'adhérence α', qui est aussi valeur d'adhérence de la suite $\big(x_n\big)_n$. Comme $\big(x_n\big)_n$ n'admet qu'une unique valeur d'adhérence α d'après l'hypothèse, on a $\alpha = \alpha'$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $d\big(x_{n_k}, \alpha\big) > \varepsilon$. Par pasage à la limite quand k tend vers $+\infty$, on déduit $0 = d(\alpha, \alpha') > \varepsilon$ ce qui est absurde. Ainsi, $\mathscr{N}$ est un ensemble fini. Soit M un majorant de $\mathscr{N}$. Pour tout $n > M$, $n \notin \mathscr{N}$ donc $d(x_n, \alpha) \leq \varepsilon$, ce qui montre que $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = \alpha$. $\square$

Théorème 3.1.10. *Soit $\big(X\,,d\big)$ un espace métrique et A un sous ensemble de X.*

(1). Si A est compact, il est fermé.

(2). Si $\big(X\,,d\big)$ est compact et si A est fermé, A est compact.

Preuve. (1). Puisque A est compact, il est complet et donc fermé.

(2). Supposons que $\big(X\,,d\big)$ est compact et soit A un fermé de X. Soit $\big(x_n\big)_n$ une suite dans A. Par compacité de X, il existe une sous-suite $\big(x_{\varphi(n)}\big)_n$ qui converge vers un élément $\ell \in X$. Comme A est fermé, $\ell \in A$ et donc la sous-suite $\big(x_{\varphi(n)}\big)_n$ de $\big(x_n\big)_n$ converge dans $\big(A\,,d\big)$ c'est-à-dire A est compact.

$\square$

Le théorème suivant caractérise la compacité d'un espace métrique.

Théorème 3.1.11. *Un espace métrique $\left(X\,,d\right)$ est compact si, et seulement si l'intersection de toute suite décroissante $(F_n)_n$ de parties fermées non vides de X est non vide.*

Preuve. Soit $\left(F_n\right)_n$ une suite décroissante de fermés de X (c'est-à-dire $F_{n+1} \subseteq F_n$). Soit $\left(x_n\right)_n$ une suite de X telle que pour chaque n, $x_n \in F_n$. Puisque $F_n \subseteq F_0$ pour tout n, $\left(x_n\right)_n$ est une suite dans le compact F_0. Il existe donc une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ de $\left(x_n\right)_n$ qui converge vers $\ell \in F_0$. Pour tout $p \in \mathbb{N}$, ℓ est aussi une valeur d'adhérence de la suite $\left(x_n\right)_{n\geq p}$. Mais F_p est fermé et $n \geq p$ entraîne $x_n \in F_n \subseteq F_p$, donc $\ell \in F_p$. Ceci étant vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$ donc $\ell \in \bigcap\limits_{n\geq 0} F_n$.

Réciproquement, supposons que l'intersection de toute suite décroissante de fermés non vide de $\left(X\,,d\right)$ est non vide. Soit $\left(x_n\right)_n$ une suite dans X. La suite de fermés non vides $\left(F_n = \overline{\left\{x_k\,;\,k \geq n\right\}}\right)_n$ est évidemment décroissante. L'intersection $F = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est donc non vide et tout élément de F est une valeur d'adhérence de la suite $\left(x_n\right)_n$. □

Corollaire 3.1.12. *Si (x_n) est une suite de $\left(X\,,d\right)$ convergeant vers ℓ, la partie $A = \left\{x_n\,;\,n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{\ell\right\}$ est compact.*

Preuve. Remarquons d'abord qu'un fermé F de A (A est muni de la distance induite de d) qui ne contient pas ℓ est de cardinal fini puisque son complémentaire $A \setminus F$ est un voisinage de ℓ et contient, par conséquent, tous les x_n à partir d'une certain rang (car $\left(x_n\right)_n$ converge vers ℓ). Si $\left(F_n\right)_n$ est alors une suite décroissante de fermés non vides de A, on a deux cas : ou bien $\ell \in F_n$ pour tout n ou bien il existe n_0 tel que F_{n_0} est de cardinal fini.

- Si $\ell \in F_n$ pour tout n, $n \in \bigcap\limits_n F_n$ et donc $\bigcap\limits_n F_n \neq \emptyset$.
- S'il existe n_0 tel que F_{n_0} est de cardinal fini, la suite $\left(F_n\right)_n$ est stationnaire dont l'intersection est non vide.

□

Proposition 3.1.13. *Dans un espace métrique compact, toute **réunion finie** de parties compactes est compact.*

Preuve. Nous allons démontrer la proposition pour la réunion de deux parties compactes. Soient A et B deux compacts de X et $\left(x_n\right)_n$ une suite dans $A \cup B$. Si l'ensemble $T := \left\{n \in \mathbb{N}\,;\,x_n \in A\right\}$ est de cardinal infini, on peut extraire de $\left(x_n\right)_n$ une sous-suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ d'éléments de A. Puisque A est compact, on peut extraire de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ une sous-suite convergeant vers un point $\alpha \in A$. Mais cette sous-suite de $\left(x_{\varphi(n)}\right)_n$ est aussi une sous-suite de $\left(x_n\right)_n$, convrgeant vers $\alpha \in A \cup B$. Si T est de cardinal fini, l'ensemble $S := \left\{n \in \mathbb{N}\,;\,x_n \in B\right\}$ est de cardinal infini et on conclut de même. D'où la compacité de $A \cup B$. □

Proposition 3.1.14. *Tout produit **fini** d'espaces compacts est compact.*

Preuve. Soient X, Y deux espaces compacts et $\Big(\big(x_n\,,y_n\big)\Big)_n$ une suite dans $X\times Y$. Puisque X est compact, il existe une sous-suite $\big(x_{n_k}\big)_k$ de $\big(x_n\big)_n$ convergeant vers un point $x\in X$. Puisque Y est compact, il existe une sous-suite $\big(y_{n_{k_p}}\big)_p$ de $\big(y_{n_k}\big)_n$ convergeant vers un point $y\in Y$. Alors la suite $\Big(\big(x_{n_{k_p}}\,,y_{n_{k_p}}\big)\Big)_p$ est une sous-suite de $\Big(\big(x_n\,,y_n\big)\Big)_n$ et elle converge vers $\big(x\,,y\big)\in X\times Y$. Donc $X\times Y$ est compact. $\square$

Proposition 3.1.15. *Soient $X=\prod\limits_{k=1}^{n}X_k$ un espace métrique produit et $\emptyset\neq C=\prod\limits_{k=1}^{n}C_k$ un sous-ensemble de X. Alors C est compact si, et seulement si les C_k sont compacts dans X_k.*

Corollaire 3.1.16. *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les fermés bornés. Autrement dit, une partie A de $\mathbb{R}^n$ est compacte si, et seulement si elle est à la fois fermée et bornée.*

3.2 Espaces compacts et applications continues

Donnons maintenant la relation fonction continue et compacité. Le théorème suivant montre que l'**image d'un compact par une fonction continue est compact**.

Théorème 3.2.1. *Soient X et Y deux espaces métriques et $f\colon X\longrightarrow Y$ une fonction continue. Si X est compact, $\mathscr{I}m(f)=f(X)$ est une partie compacte de Y.*

Preuve. Pour montrer que $\mathscr{I}m(f)$ est compacte, il faut montrer que toute suite dans $\mathscr{I}m(f)$ admet une valeur d'adhérence c'est-à-dire encore toute suite dans $\mathscr{I}m(f)$ admet une sous suite qui converge dans $\mathscr{I}m(f)$.

Soit alors (y_n) une suite dans $\mathscr{I}m(f)$. Pour chaque entier n, il existe $x_n\in X$ tel que $y_n=f(x_n)$. Puisque X est compact, (x_n) admet une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers une limite $a\in X$. Il reste à montrer que $a\in\mathscr{I}m(f)$. Comme f est continue sur X, elle est continue en a et (y_{n_k}) converge vers $f(a)\in\mathscr{I}m(f)$. Ainsi, (y_{n_k}) est une sous-suite de (y_n) qui converge dans $\mathscr{I}m(f)$. Donc $\mathscr{I}m(f)$ est compact. $\square$

Corollaire 3.2.2. *Soient X et Y deux espaces métriques et $f\colon X\longrightarrow Y$ un homéomorphisme. Alors X est compact si, et seulement si Y est compact..*

On applique souvent le Théorème 3.2.1 dans la situation d'une application continue f de $\big(X\,,d\big)$ vers $\big(Y\,,\delta\big)$ et d'un sous-ensemble compact A de X. $f(A)$ est donc compact comme image du compact $(A,d_{|_A})$ par l'application continue $f_{|_A}$.

Théorème 3.2.3. *Soient X et Y deux espaces métriques, $f\colon X\longrightarrow Y$ une fonction et $\alpha\in X$. Si f est continue sur tout sous-ensemble compact de X, elle est continue en α.*

Preuve. Il suffit de montrer que pour toute suite $\big(x_n\big)_n$ de X qui converge vers α, la suite $\Big(f\big(x_n\big)\Big)_n$ converge vers $f(\alpha)$. Soit alors $\big(x_n\big)_n$ une suite de X qui converge vers α. D'après le Corollaire 3.1.12, l'ensemble $A = \{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{\alpha\}$ est compact et la restriction g de f à A est continue car f est continue sur X et donc $\big(g(x_n)\big)_n = \big(f(x_n)\big)_n$ converge vers $g(\alpha) = f(\alpha)$. □

Théorème 3.2.4. *Soit X un espace métrique compact. Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue alors elle est bornée et atteint ses bornes $\sup f$ et $\inf f$. Autrement dit, il existe $\alpha, \beta \in X$ tels que $f(\alpha) \leq f(x) \leq f(\beta)$ pour tout $x \in X$.*

Preuve. Puisque f est continue, $\mathscr{I}m(f)$ est un compact de $\mathbb{R}$ d'après le Théorème 3.2.1. $\mathscr{I}m(f)$ est donc bornée c'est-à-dire elle contient $\inf\big(\mathscr{I}m(f)\big)$ et $\sup\big(\mathscr{I}m(f)\big)$ sont finis. Mais $\mathscr{I}m(f)$ est aussi fermée, donc elle contient ses bornes. □

Théorème 3.2.5 (Heine)**.** *Soient X et Y deux espaces métriques et $f : X \longrightarrow Y$ une fonction continue. Si X est compact, f est uniformément continue.*

Preuve. Nous allons montrer le Théorème par l'absurde. Supposons que f n'est pas uniformément continue c'est-à-dire il existe un $\varepsilon > 0$ vérifiant pour tout $\rho > 0$, il existe $x,\ y \in X$ tels que $d\big(x\,,y\big) \leq \rho$ mais $\big(f(x)\,, f(y)\big) > \varepsilon$. En particulier pour tout $n \geq 1$, il existe $x_n,\ y_n \in X$ tels que $d\big(x_n\,, y_n\big) \leq \dfrac{1}{n}$ mais $d\big(f\big(x_n\big)\,, f\big(y_n\big)\big) > \varepsilon$. Puisque X est compact, on peut extraire une sous-suite $\big(x_{n_k}\big)_k$ de $\big(x_n\big)_n$ convergeant vers un point $\alpha \in X$. Puisque $d\big(x_{n_k}\,, y_{n_k}\big) \leq \dfrac{1}{n_k}$ pour tout k, la suite $\big(y_{n_k}\big)_n$ converge aussi vers α. Puisque f est continue, les deux suites $\big(f\big(x_{n_k}\big)\big)_k$ et $\big(f\big(y_{n_k}\big)\big)_k$ convergent vers $f(\alpha)$. C'est absurde car $d\big(f\big(x_{n_k}\big)\,, f\big(y_{n_k}\big)\big) > \varepsilon$ pour tout k. □

Chapitre 4

ESPACES MÉTRIQUES CONNEXES

Dans ce chapitre, nous étudierons la notion de connexité. En un mot, être *connexe* veut dire *en un seul morceaux.*

4.1 Convexité

Définition 4.1.1. Soient E un espace vectoriel et $a, b \in E$. On appelle **segment** de a vers b la partie de E définie par
$$[a\,,b] := \Big\{(1-\lambda)a+\lambda b\ ;\ 0 \leq \lambda \leq 1\Big\}.$$
L'application
$$\begin{array}{rccl} f & : & [0\,,1] & \longrightarrow & E \\ & & \lambda & \longmapsto & f(\lambda) = (1-\lambda)a+\lambda b \end{array}$$
est appelé **chemin** d'origine a et d'extrémité b.

Définition 4.1.2. Une partie A d'un espace vectoriel E est dit **convexe** si pour tous $x, y \in A$ et tout $\lambda \in [0\,,1]$, $(1-\lambda)x+\lambda y \in A$ c'est-à-dire
$$\forall x,\ y \in A,\ \text{ on a }\ (1-\lambda)x+\lambda y \in A. \tag{4.1.1}$$

On peut généraliser la définition d'une partie convexe comme suit :

A est convexe si
$$\forall x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n \in A,\ \forall \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n \in [0\,,1]\ \text{ tels que }\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1\ \text{ on a }\ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \in A.$$

Toute partie A d'un espace vectoriel E vérifiant (4.1.1) est dite **étoilée** par rapport à chacun de ses points. Autrement dit, une partie A d'un espace vectoriel est convexe si elle est étoilée par rapport à chacun de ses points.

Proposition 4.1.3. *Dans un espace vectoriel normé , les boules sont convexes.*

Preuve. Soent $\alpha \in E$ et $r > 0$. Montrons que $B\big(\alpha\,,r\big)$ est convexe. Soient $x, y \in B\big(\alpha\,,r\big)$ et $\lambda \in [0\,,1]$. Montrons que $(1-\lambda)x+\lambda y \in B\big(\alpha\,,r\big)$. On a
$$(1-\lambda)x+\lambda y-\alpha = (1-\lambda)(x-\alpha)+\lambda(y-\alpha).$$

Donc

$$\begin{aligned}\|(1-\lambda)x+\lambda y-\alpha\| &= \|(1-\lambda)(x-\alpha)+\lambda(y-\alpha)\| \\ &\leq (1-\lambda)\,\|(x-\alpha)\|+\lambda\,\|(y-\alpha)\| < r\end{aligned}$$

Ce qui montre que $(1-\lambda)x+\lambda y \in B\big(\alpha\,,\,r\big)$. □

Corollaire 4.1.4. *Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont convexes. En particulier, $\emptyset$ et tout singleton de $\mathbb{R}$ sont convexes.*

Proposition 4.1.5. *Tout sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé est convexe.*

4.2 Connexité

Définition 4.2.1. On dit qu'un espace métrique (X,d) est **connexe** si les seules parties qui sont à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X.

Remarques

(1). La défintion dit que X est connexe s'il ne peut pas s'écrire comme réunion disjointe de deux ouverts (ou deux fermés) non vides c'est-à-dire si O_1 et O_2 sont deux ouverts (ou deux fermés) de X tels que $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ et $X = O_1 \cup O_2$ alors ou bien $O_1 = \emptyset$ ou bien $O_2 = \emptyset$ c'est-à-dire encore si $X = O_1 \cup O_2$ où O_1 et O_2 sont deux ouverts (ou deux fermés) non vide de X, on a nécessairement $O_1 \cap O_2 \neq \emptyset$.

(2). Il découle de la définition que $\emptyset$ et les singletons sont des parties connexes.

Définition 4.2.2. On dit qu'une partie A d'un espace métrique $\big(X\,,\,d\big)$ est connexe si le sous-espace $\big(A\,,\,d_{|_A}\big)$ est connexe.

La proposition suivante donne un exemple de connexe

Proposition 4.2.3. *Dans $\mathbb{R}$ muni de sa distance usuelle, tout intervalle est connexe. En particulier, $\mathbb{R}$ lui-même est connexe.*

Preuve. Soit I un itervalle de $\mathbb{R}$. Supposons que l'on ait $I = A \cup B$ où A et B sont des fermés non vides de I. Montrons que $A \cap B \neq \emptyset$. Soit $a \in A$ et $b \in B$ (ce qui est possible car $A \neq \emptyset$ et $B \neq \emptyset$) tels que $a \leq b$. Puisque I est un intervalle, I est convexe donc $[a\,,\,b] \subset I$. Comme $A \cap [a\,,\,b]$ est une partie non vide (car $a \in A \cap [a\,,\,b]$), fermée (car intersection de deux fermés) et majorée (par b) de $\mathbb{R}$, elle possède un plus grand élément c qui vérifie aussi $c \in A$. Montrons alors que l'on a aussi $c \in B$.
Si $c = b$, c'est fini. Sinon, par déinition, on a $A \cap \,]\,c\,,\,b\,] = \emptyset$ c'est-à-dire $]\,c\,,\,b\,] \subset B$ (car $I = A \cup B$). Mais alors $\overline{]\,c\,,\,b\,]} \subset \overline{B}$ c'est-à-dire $[c\,,\,b] \subset B$ car B est fermé (et donc $\overline{B} = B$) ; ce qui prouve que $c \in B$.
Ainsi $c \in A \cap B$ donc $A \cap B \neq \emptyset$. □

Proposition 4.2.4. *Un espace métrique X est connexe si, et seulement si toute application continue de X dans le sous-espace $\{0,1\}$ de $\mathbb{R}$ est constante.*

Preuve. Noter bien qu'il s'agit de l'ensemble à deux éléments $\{0,1\}$ et non l'intervalle $[0\,,\,1]$ donc la seule structure d'espace métrique correspond à la topologie discrète, et les ouverts (c'est-à-dire les fermés aussi) sont $\{0\}$, $\{1\}$, $\{0,1\}$ et $\emptyset$.

Supposons maintenant que X est connexe et qu'il existe une application continue $f\colon X \longrightarrow \{0,1\}$. Si f n'est pas constante, $A = f^{-1}\big(\{0\}\big)$ et $B = f^{-1}\big(\{1\}\big)$ sont des parties qui sont à la fois ouvertes et fermées de X telles que $X = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$, ce qui contredit le fait que X soit connexe.

Réciproquement, si X n'est pas connexe, il existe deux parties ouvertes A et B telles que $X = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. Soit f la fonction définie par $f(x) = 0$ si $x \in A$ et $f(x) = 1$ si $x \in B$. La fonction f n'est pas constante et continue car $f^{-1}\big(\{\emptyset\}\big) = \emptyset$, $f^{-1}\big(\{0\}\big) = A$ ouvert, $f^{-1}\big(\{1\}\big) = B$ ouvert et $f^{-1}\big(\{0,1\}\big) = X$. □

Proposition 4.2.5. *Soit $\big(A_i\big)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces connexes telle que $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.*

Preuve. Il suffit montrer que toute application continue de $\bigcup_{i\in I} A_i$ dans $\{0,1\}$ est constante. Soit alors $f\colon \bigcup_{i\in I} A_i \longrightarrow \{0,1\}$ continue. Puisque chaque A_i est connexe, f est constante sur chacun des A_i et comme $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, f est constante sur $\bigcup_{i\in I} A_i$. □

On a les propriétés suivantes dont les démonstrations sont laissées à titre d'exercice

Proposition 4.2.6. *Soient A et B deux parties d'un espace métrique. Alors*

(1). si A est connexe, $\overline{A}$ est connexe,

(2). si A est connexe et si $A \subset B \subset \overline{A}$, B est aussi connexe,

(3). si A et B sont connexes et si $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, $A \cup B$ est connexe

Théorème 4.2.7. *Soient $X_1,\ X_2, \cdots,\ X_n$, n espaces métriques. Alors le produit $\prod_{i=1}^{n} X_i$ est connexe si, et seulement si X_i est connexe pour chaque $i \in \{1,\ 2,\ \cdots\ ,\ n\}$. En particulier, pour $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est connexe.*

Preuve. Nous allons montrer le théorème pour $n = 2$. Fixons $x_0 \in X_1$. Pour tout $y \in X_2$, posons

$$A_y = \Big(\{x_0\} \times X_2\Big) \cup \Big(X_1 \times \{y\}\Big).$$

Il est clair que A_y est connexe d'après la Proposition 4.2.4. De plus,

$$\bigcap_{y\in X_2} A_y = \{x_0\} \times X_2 \quad \text{et} \quad \bigcup_{y\in X_2} A_y = X_1 \times X_2.$$

Donc, $X_1 \times X_2$ est connexe (toujours d'après la Proposition 4.2.4). □

Proposition 4.2.8. *Si $f : X \longrightarrow Y$ est continue et si X est connexe, $f(X)$ est une partie connexe de Y.*

Preuve. Si $f\big(X\big)$ n'est pas connexe, il existe deux parties ouvertes B et C de $f\big(X\big)$ telles que $B \cap C = \emptyset$ et $f\big(X\big) = B \cup C$ et alors $f^{-1}\big(B\big)$ et $f^{-1}\big(C\big)$ sont des parties ouvertes de X telles que

$$f^{-1}\big(B\big) \cap f^{-1}\big(C\big) = \emptyset \quad \text{et} \quad X = f^{-1}\big(B\big) \cup f^{-1}\big(C\big)$$

et donc X n'est pas connexe ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Corollaire 4.2.9. *Soient $\big(X\,,d\big)$, $\big(Y\,,\delta\big)$ deux espaces métriques et $f\colon X \longrightarrow Y$ un homéomorphisme. Alors X est connexe si, et seulement si Y est connexe.*

Théorème 4.2.10 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soient X un espace métrique connexe et $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Alors pour tous $x_1, x_2 \in X$ vérifiant $f(x_1) \leq f(x_2)$ et pour tout $y \in [f(x_1)\,, f(x_2)]$, il existe $x \in [x_1\,, x_2]$ tel que $f(x) = y$.*

4.3 Connexité par arcs

Dorénavant, X est espace métrique et $[0\,,1]$ est muni de la distance usuelle de $\mathbb{R}$.

Définition 4.3.1. On dit que X est **connexe par arcs** si pour tout $a, b \in X$, il existe une application continue $\gamma\colon\ [0\,,1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Une telle application est appelée **chemin** d'origine a et d'extrémité b.

Une partie A de X est connexe par arcs si le sous-espace $\big(A\,, d_{|_A}\big)$ est connexe par arcs.

Proposition 4.3.2. *Tout espace métrique connexe par arcs est connexe.*

Preuve. Soit X un espace métrique connexe par arcs. Supposons qu'il existe deux ouverts disjoints non vides A et B tels que $X = A \cup B$. Soit $a \in A$ et $b \in B$. Puisque X est connexe par arcs, il existe une application continue $\gamma\colon\ [0\,,1] \longrightarrow X$ tel que $\gamma(0) = b$ et $\gamma(1) = b$. Mais alors $\gamma^{-1}(A)$ et $\gamma^{-1}(B)$ sont des ouverts non vides de $[0\,,1]$ (car γ continue, $0 \in \gamma^{-1}(A)$ et $1 \in \gamma^{-1}(B)$) vérifiant

- $\gamma^{-1}(A) \cap \gamma^{-1}(B) = \gamma^{-1}(A \cap B) = \gamma^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ et
- $\gamma^{-1}(A) \cup \gamma^{-1}(B) = \gamma^{-1}(A \cup B) = \gamma^{-1}(X) = [0\,,1]$.

Ce qui contredit le fait que $[0\,,1]$ est connexe. Donc, de tels ouverts A et B ne peuvent exister. $\square$

Attention, la réciproque de la proposition ci-dessus est fausse.

Proposition 4.3.3. *Dans un espace vectoriel normé (en particulier dans $\mathbb{R}^n$), toute partie convexe est connexe par arc.*

Preuve. Si A est une partie convexe d'une espace vectoriel normé E et $a,\ b \in A$, on a $[a\,,b] \subset A$. Il suffit donc de prendre comme chemin l'application $\gamma\colon\ t \in [0\,,1] \longmapsto a + t(b-a) \in A$. $\square$

Proposition 4.3.4. *Soit A une partie de $\mathbb{R}$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1). A est connexe par arcs,

(2). A est connexe,

(3). A est un intervalle.

Preuve. Vu la Proposition 4.1.5 et la Proposition 4.3.3, il suffit de prouver que (1) implique (2).Supposons que A est connexe par arcs et soient $a,\ b \in A$. Nous devons montrer que $[a\,,b] \subset A$. Par hypothèse, il existe une fonction continue $\gamma\colon\ [0\,,1] \longrightarrow A$ vérifiant $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. L'intervalle $[0\,,1]$ étant compact donc γ est bornée et atteint ses bornes c'est-à-dire il existe x_0 et x_1 dans $[0\,,1]$ tels que $\gamma(x_0) = \inf\limits_{x\in[0\,,1]} \gamma(x)$ et $\gamma(x_1) = \sup\limits_{x\in[0\,,1]} \gamma(x)$. Montrons alors que $[f(x_0)\,,\gamma(x_1)] = \gamma\big([0\,,1]\big)$. Il est clair que $\gamma\big([0\,,1]\big) \subset [\gamma(x_0)\,,\gamma(x_1)]$ (Par définition de x_0 et x_1). Montrons alors que $[\gamma(x_0)\,,\gamma(x_1)] \subset \gamma\big([0\,,1]\big)$. Soit $y \in [\gamma(x_0)\,,\gamma(x_1)]$. Puisuqe γ est continue, il existe, d'après le Théorème des valeures intermédiaires, $x \in [0\,,1]$ tel que $y = \gamma(x)$. Ainsi, $y \in \gamma\big([0\,,1]\big)$. Par suite, on a

$$[a\,,b] = [\gamma(0)\,,\gamma(1)] \subset [\gamma(x_0)\,,\gamma(x_1)] = \gamma\big([0\,,1]\big) \subset A.$$

□

Proposition 4.3.5. *X est connexe par arcs si, et seulement si pour tout $a,\ b \in X$, il existe une partie connexe par arcs A de X telle que $a,\ b \in A$.*

Preuve. Si X est connexe par arcs, il suffit de prendre $A = X$. Réciproquement, soient $a,\ b \in X$ tels qu'il existe $A \subset X$ connexe par arcs contenant a et b. Donc le chemin joignant a et b dans A joigne aussi a et b dans X. □

Le résultat suivant montre que l'image d'un connexe par arcs par une fonction continue est connexe par arc.

Proposition 4.3.6. *Soient X et Y deux espaces métrique et soit $f\colon X \longrightarrow Y$ une fonction continue. Si X est connexe par arcs, $f(X)$ est connexe par arcs.*

Preuve. Soient $f(a)$ et $f(b)$ deux points de $f(X)$. Trouvons un chemin joignant $f(a)$ et $f(b)$. Par hypothèse, X est connexe par arcs c'est-à-dire il existe une application continue $\gamma\colon [0\,,1] \longrightarrow X$ telle que $\gamma(0) = a$ et $\gamma(1) = b$. Puisque f et γ sont continues, $f\circ\gamma\colon [0\,,1] \longrightarrow f(X)$ répond à la question. □

Corollaire 4.3.7 (Théorème des valeures intermédiaires)**.** *Si $f\colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et si X est connexe par arcs, $f(X)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Proposition 4.3.8. *Soit $\big(A_i\big)_{i\in I}$ une famille de sous-espaces connexes par arcs telle que $\bigcap\limits_{i\in I} A_i \neq \emptyset$. Alors $\bigcup\limits_{i\in I} A_i$ est connexe par arcs.*

Théorème 4.3.9. *Si $X_1,\ X_2, \cdots,\ X_n$ sont des espaces métriques connexes par arcs, l'espace produit $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i$ est connexe par arcs. En particulier, $\mathbb{R}^n$ est connexe par arcs.*