
Exercice 1. Soient N_1 et N_2 deux normes sur un espace vectoriel normé E. On pose $N = \max\{N_1; N_2\}$. Montrer que N est une norme sur E.

Exercice 2. Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{\sqrt{1+t^2}}$.

(1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Tracer $B_f(0,1)$.

(3) Comparer N avec la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3. Soit N l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \dfrac{|x+ty|}{1+t+t^2}$.

(1) Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Représenter graphiquement $B_f(0,1)$.

Exercice 4. Soient $(E, \|.\|)$ une espace vectoriel normé $x, y \in E$ et $r > 0$. Montrer que

$$x + B_f(y,r) = B_f(x+y,r).$$

Exercice 5. Soient $(E, \|.\|)$ une espace vectoriel normé .

(1) Montrer que pour tous $x, y \in E$, on a $\|x\| + \|y\| \leq \|x+y\| + \|x-y\|$.

(2) En déduire que $\|x\| + \|y\| \leq 2\max\{\|x+y\|; \|x-y\|\}$.

Exercice 6. Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$ et $N\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par

$$N(x_1, x_2 \cdots, x_n) = a_1|x_1| + a_2|x_2| + \cdots + a_n|x_n|.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que soit N une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 7. Dans $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle. on considère $A = \left\{\dfrac{1}{x+n} + \dfrac{1}{2^n} : x \in \mathbb{R}_+^* \ et\ n \geq 1\right\}$. Déterminer $\overset{\circ}{A}$ et $\overline{A}$.

Exercice 8. Soient E un espace vectoriel normé et A et B deux parties de E telles que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$. Montrer que $Fr(A \cup B) = Fr(A) \cup Fr(B)$.

Exercice 9. Soient $(E, \|.\|)$ une e.v.n et $x, y \in E \setminus \{0\}$. Montrer que $\left\|\dfrac{x}{\|x\|} - \dfrac{y}{\|y\|}\right\| \leq 2\dfrac{\|x-y\|}{\max\{\|x\|; \|y\|\}}$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé , $(a,b) \in E \times E$, $r,s \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Montrer que

(1) $B_f(a,r) + B_f(b,s) = B_f(a+b, r+s)$,

(2) $\lambda B_f(a,r) = B_f(\lambda a, |\lambda| r)$,

(3) $B_f(a,r) \cap B_f(b,s) \neq \emptyset$ si, et seulement si $\|a-b\| \leq r+s$,

(4) $B_f(a,r) \subset B_f(b,s)$ si, et seulement si $\|a-b\| \leq s-r$.

Exercice 11. On munit $\mathbb{C}$ de la distance usuelle $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$. On considère les sous-ensembles $A_1 = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-1| \leq \alpha\}$, $A_2 = \{z \in \mathbb{C}\,;\, |z+1| \leq \alpha\}$ et $A = A_1 \cup A_2$, où α est une constante réelle positive ou nulle.

(1) Montrer que A est fermé dans $\mathbb{C}$.

(2) Montrer que pour $\alpha < 1$, A_1 et A_2 sont à la fois ouverts et fermés dans le sous-espace $(A, d_{|A})$. Que peut-on dire lorsque $\alpha \geq 1$?

Exercice 12. Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique (X, d) et $x \in X$.

(1) Montrer que $d(x,A) = 0$ si, et seulement si x est adhérent à A.

(2) Etablir que $d(x,A) = d(x,\overline{A})$.

Exercice 13. Soit (X, d) un espace métrique. On considère l'application δ définie par :

$$\delta(x,y) = \inf\{1; d(x,y)\}, \quad (x,y \in X).$$

(1) Montrer que δ est une distance sur X.

(2) On prend $X = \mathbb{R}^2$, $d = d_2$ la distance euclidienne sur $\mathbb{R}^2$. Etudier les boules ouvertes et fermées de $(\mathbb{R}^2, \delta)$.

Exercice 14. Soit $d\colon\ ]0;+\infty[\times]0;+\infty[\longrightarrow [0;+\infty[$ l'application définie par $d(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

(1) Montrer que d est une distance sur $]0;+\infty[$.

(2) Déterminer la boule ouverte et la boule fermée de centre 1 et de rayon 1.