Université d'Antananarivo
Faculté des Sciences

Département de mathématiques
et Informatique

Année Universitaire : 2021 - 2022

T.D. Espace métrique $\mathbb{R}^n$
S3 - Série N°2

Exercice 1. On considère l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \longmapsto \|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|, |x-y|\}$.

(1) Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Représenter graphiquement la boule unité ouverte.

Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils bornés ?

(1) $A = \left\{x\sin x \,;\, x \in \mathbb{R}\right\}$,

(2) $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 + xy + y^2 = 1\right\}$,

(3) $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x^2 - y^2 = 1\right\}$.

Exercice 3. Soient E un espace vectoriel normé et A une sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrer que si A est une partie ouverte, on a $A = E$.

(2) Montrer que s'il existe $\alpha \in A$ et $r > 0$ tels que $B(\alpha, r) \subset A$, on a $A = E$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé , A et B deux parties de E.
On pose $A + B = \left\{a + b \,;\, a \in A \text{ et } b \in B\right\}$. En remarquant que $A + B = \bigcup_{b \in B} (A + b)$, montrer que la somme d'une partie quelconque et d'une partie ouverte est ouverte.

Exercice 5. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la norme euclidienne $\|X = (x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par $f(X) = \dfrac{X}{\|X\|} - X$. f admet-elle une limite en $(0,0,0)$?

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^2$ l'une des trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que la fonction définie par $f(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|X\| \geq 1 \\ 0 & \text{si } \|X\| < 1 \end{cases}$ n'est continue en aucun point X de $\mathbb{R}^2$ tel que $\|X\| = 1$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $\alpha \in \mathbb{R}$. Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés.

(1) $A = \left\{x \in E \,;\, f(x) = \alpha\right\}$ et $B = \left\{x \in E \,;\, f(x) \neq \alpha\right\}$,

(2) $C = \left\{x \in E \,;\, f(x) \leq \alpha\right\}$ et $D = \left\{x \in E \,;\, f(x) < \alpha\right\}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Gamma(f) = \left\{(x, f(x)) \,;\, x \in \mathbb{R}\right\}$ est fermé.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle vérifiant : Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $|u_{n+1}-u_n| < \frac{1}{n}$.
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est-elle une suite de Cauchy ?

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé . On considère l'application $f : x \in E \longmapsto f(x) = \dfrac{x}{1+\|x\|^2} \in E$.

(1) Montrer que f est continue sur E.

(2) Montrer que $f(E) = B_f\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Exercice 11. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réels.

(1) On suppose que $(u_n)_n$ est croissante et qu'elle admet une suite extraite convergente. Que peut-on dire de $(u_n)_n$?

(2) On suppose que $(u_n)_n$ est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Que peut-on dire de $(u_n)_n$?

Exercice 12. Soient π_1 et π_2 les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ pour $i = 1, 2$.

(1) Soit O une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$. Montrer que $\pi_1(O)$ et $\pi_2(0)$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.

(2) Soit $H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy = 1\right\}$. Montrer que H est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$ et que $\pi_1(H)$ et $\pi_2(H)$ ne sont pas des parties fermées de $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que si F est une partie fermée et $\pi_2(F)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, $\pi_1(F)$ est une partie fermée.

Exercice 13. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul $y \in A$ vérifiant : $|x-y| = d(x,A)$. Montrer que A est un intervalle fermé.

Exercice 14. On note E le $\mathbb{R}-$ espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots a_nX^n \,;\, a_0, a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}\}$.
Pour $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \cdots a_nX^n \in E$, on pose

$$N_0(P) = \sum_{i=0}^{n} \frac{|a_i|}{2^i} \quad \text{et} \quad N_1(P) = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i\right| + \sum_{i=0}^{n} \frac{|a_i|}{2^i}.$$

(1) Montrer que N_0 et N_1 sont des normes sur E.

(2) Soit $(P_k)_k$ la suite définie par $P_k = X^k$. Montrer que

(a) $P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ dans (E, N_0) et

(b) $P_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 1$ dans (E, N_1).

(3) Les normes N_0 et N_1 sont-elles équivalentes ?

Exercice 15. On munit $\mathbb{R}^2$ l'une de ses trois normes.

(1) Montrer que les parties $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, xy = 1\right\}$ et $B = \{0\} \times \mathbb{R}$ sont fermées.

(2) Montrer que $A + B = \left\{a + b \,;\, a \in A \text{ et } b \in B\right\}$ n'est pas fermé.

Exercice 1. On considère l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^2 \longmapsto \|(x,y)\| = \max\{|x|, |y|, |x-y|\}$.

(1) Montrons que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

- Il est calir que $\|\cdot\|$ est bien définie et est à valeurs dans $[0; +\infty[$.
- $\|(x,y)\| = 0$ si, et seulement si $x = y = x - y = 0$, c'est-à-dire $(x,y) = (0,0)$.
- Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\|\lambda(x,y)\| = \max\{|\lambda x|, |\lambda y|, |\lambda(x-y)|\} = |\lambda| \max\{|x|, |y|, |x-y|\} = \lambda \|(x,y)\|$$

- Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.

$$\|(x_1,y_1) + (x_2,y_2)\| = \max\{|x_1+x_2|, |y_1+y_2|, |(x_1+x_2) - (y_1+y_2)|\}$$

Mais, d'après la propriété de la valeur absolue, on a

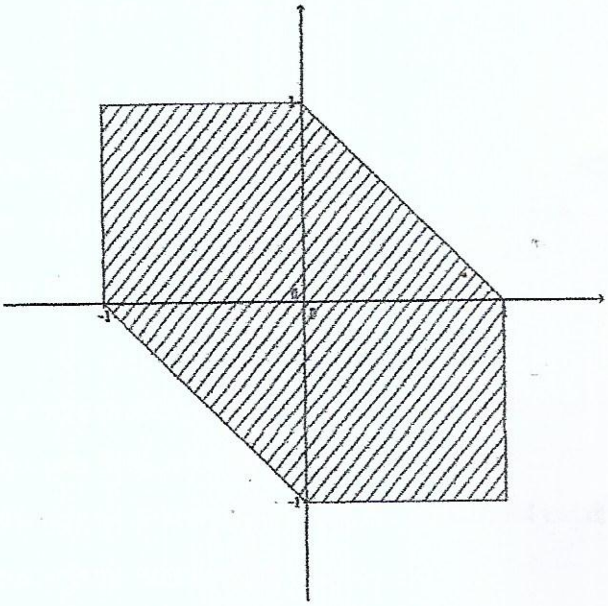
$$|x_1+x_2| \leq |x_1| + |x_2|, \quad |y_1+y_2| \leq |y_1| + |y_2| \quad \text{et} \quad |(x_1+x_2) - (y_1+y_2)| \leq |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|.$$

Donc, $|x_1+x_2|$, $|y_1+y_2|$ et $|(x_1+x_2)-(y_1+y_2)|$ sont majorés par $\max\{|x_1|, |y_1|, |x_1-y_1|\} + \max\{|x_2|, |y_2|, |x_2-y_2|\}$. Il s'ensuit que $\|(x_1,y_1) + (x_2,y_2)\| \leq \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|$.

(2) Représentation graphique de la boule unité ouverte. On a :

$$(x,y) \in B((0,0),1) \text{ si, et seulement si } \max\{|x|, |y|, |x-y|\} < 1$$
$$\text{si, et seulement si } |x| < 1, \text{ ainsi, } |y| < 1 \text{ et } |x-y| < 1.$$

D'où la figure suivante :



Exercice 2. Les ensembles suivants sont-ils bornés ?

(1) $A = \{x \sin x ; x \in \mathbb{R}\}$. Considérons les suites $(u_n)_n$ définie par $u_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi$ et pour $n \in \mathbb{N}$.
On a $x_n = u_n \sin u_n = \dfrac{\pi}{2} + 2n\pi \longrightarrow +\infty \; (n \to +\infty)$. Donc A n'est pas bornée.

(2) $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x^2+xy+y^2=1\right\}$. On a

$$(x,y)\in B \text{ si, et seulement si } x^2+xy+y^2=1 \text{ c'est-à-dire } \left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3}{4}y^2=1.$$

Donc B est l'ensemble des points d'une ellipse donc il est borné.

(3) $C=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,x^2-y^2=1\right\}$. Il est facil de voir que C est l'ensemble des points d'une hyperbole donc il n'est pas bornée.

Exercice 3 Soient E un espace vectoriel normé et A une sous-espace vectoriel de E.

(1) Montrons que si A est ouvert, on a $A=E$.

Puisque A est un sous-espace vectoriel de E, on a $A\subset E$. Il reste à montrer que $E\subseteq A$.

Comme A est un sous-espace vectoriel, on a $0\in A$ et comme A est ouvert, il existe $r>0$ tel que $B(0,r)\subset A$. Soit $x\in E\setminus\{0\}$. Il existe $\lambda>0$ tel que $\lambda x\in B(0,r)\subset A$. En effet, il sufiit de prendre $\lambda=\frac{r}{2\|x\|}$ car $\|\lambda x\|=\frac{r}{2\|x\|}\|x\|=\frac{r}{2}<r$.

Puisque A est un sous-espace vectoriel et $\lambda x\in A$, $x=\frac{1}{\lambda}\cdot\lambda x\in A$.

(2) Montrons que s'il existe $\alpha\in A$ et $r>0$ tels que $B(\alpha,r)\subset A$, on a $A=E$.

Soit $x\in E$ tel que $x\neq\alpha$. Montrons que $x\in A$.

En posant $y=\alpha+\frac{r}{2\|x-\alpha\|}(x-\alpha)$, on a $\|y-\alpha\|=\frac{r}{2}<r$. Donc $y\in B(\alpha,r)$ et donc $y\in A$. Comme y, $\alpha\in A$ et A est un sous-espace vectoriel de E, il en résulte que

$$x-\alpha=\frac{2\|x-\alpha\|}{r}(y-\alpha)\in A\quad.$$

puis $x=(x-\alpha)+\alpha\in A$. Donc $E\subset A$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé , A et B deux parties de E.
On pose $A+B=\left\{a+b\,;\,a\in A \text{ et } b\in B\right\}$. En remarquant que $A+B=\bigcup_{b\in B}(A+b)$, montrons que la somme d'une partie quelconque et d'un ouvert est ouverte.

Supposons que A est ouvert.

- Soit $b\in B$. Montrons que $A+b$ est ouvert. Soit $c\in A+b$. Alors il existe $a_0\in A$ tel que $c=a_0+b$. Puisque A est ouvert, il existe $r>0$ tel que $B(a_0,r)\subset A$. Donc, $B(a_0,r)+b\subset A+b$.
  Il nous reste à montrer que $B(a_0,r)+b=B(a_0+b,r)$. En effet, si tel est le cas, on aura $B(a_0+b,r)=B(c,r)\subset A+b$ et donc que $A+b$ est un ouvert de E.

$$\begin{aligned} d\in B(a_0+b,r) \quad &\text{si, et seulement si} \quad \|a_0+b-d\|<r\\ &\text{si, et seulement si} \quad \|a_0-(d-b)\|<r\\ &\text{si, et seulement si} \quad d-b\in B(a_0,r) \quad \text{si, et seulement si} \quad d\in b+B(a_0,r). \end{aligned}$$

- Puisque pour tout $b \in B$, $A+b$ est ouvert, $A+B = \bigcup_{b\in B}(A+b)$ est un ouvert de E.

Exercice 5. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la norme euclidienne $\|X = (x,y,z)\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ par $f(X) = \dfrac{X}{\|X\|} - X$. f admet-elle une limite en $(0,0,0)$?

Pour $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, considérons les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ définies respectivement par $u_n = \left(\dfrac{1}{n},0,0\right)$ et $v_n = \left(0,\dfrac{1}{n},0\right)$. On a $u_n \longrightarrow (0,0,0)$ et $v_n \longrightarrow (0,0,0)$ alors que

$$f(u_n) = \left(1-\frac{1}{n},0,0\right) \longrightarrow (1,0,0) \quad \text{et} \quad f(f_n) = \left(0,1-\frac{1}{n},0\right) \longrightarrow (0,1,0).$$

Donc, f n'admet pas de limite en $(0,0,0)$.

Exercice 6. On munit $\mathbb{R}^2$ l'une des trois normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$, $\|\cdot\|_\infty$. Montrons que la fonction définie par

$$f(X) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|X\| \geq 1 \\ 0 & \text{si } \|X\| < 1 \end{cases}$$

n'est continue en aucun point X de $\mathbb{R}^2$ tel que $\|X\| = 1$.

Soit $X \in \mathbb{R}^2$ tel que $\|X\| = 1$ et soit $(X_n)_{n\geq 1}$ la suite définie par $X_n = \dfrac{n}{n+1}X$.

On a $\|X_n\| = \dfrac{n}{n+1}\|X\| = \dfrac{n}{n+1} < 1$, donc $f(X_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$.

Par ailleurs, $\|X_n - X\| = \dfrac{1}{n+1}\|X\| \longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$. Ainsi, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge vers X tandis que la suite $(f(X_n))_n$ ne converge pas vers $f(X)$.

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue et $\alpha \in \mathbb{R}$. Dire si les ensembles suivants sont ouverts ou fermés.

(1) $A = \left\{x \in E\,;\, f(x) = \alpha\right\}$ et $B = \left\{x \in E\,;\, f(x) \neq \alpha\right\}$,

- $A = \left\{x \in E\,;\, f(x) = \alpha\right\} = f^{-1}(\{\alpha\})$ et $\{\alpha\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}$ donc A est une partie fermé en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue.
- $B = \left\{x \in E\,;\, f(x) \neq \alpha\right\} = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{\alpha\}) = f^{-1}(\{\alpha\}^c)$ c'est-à-dire B est l'image réciproque d'une partie ouverte par une application continue donc ouvert.

(2) $C = \left\{x \in E\,;\, f(x) \leq \alpha\right\}$ et $D = \left\{x \in E\,;\, f(x) < \alpha\right\}$.

- $C = \left\{x \in E\,;\, f(x) \leq \alpha\right\} = f^{-1}(]-\infty;\alpha])$ donc fermé.
- $D = \left\{x \in E\,;\, f(x) < \alpha\right\} = f^{-1}(]-\infty;\alpha[)$ donc ouvert.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue. Montrons que le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ défini par $\Gamma(f) = \left\{(x, f(x))\,;\, x \in \mathbb{R}\right\}$ est fermé.

En considérant l'application $(x,y) \longmapsto y - f(x)$, on a $\Gamma(f) = f^{-1}(\{0\})$. Comme f est continue, l'application définie précédemment est aussi continue. Par conséquent, $\Gamma(f)$ est un fermé car image réciproque d'une partie fermée par une application continue.

Exercice 9. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite réelle vérifiant : Pour tout $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $\quad |u_{n+1}-u_n| < \frac{1}{n}$.
La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ n'est pas nécessairement une suite de Cauchy. En effet, en considérant

$$u_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} \quad \text{pour} \quad n \geq 2 \quad \text{et} \quad u_0 = 1,$$

on a $|u_{n+1}-u_n| = \frac{1}{2n} < \frac{1}{n}$ pour $n \geq 2$ mais la suite est divergente (car somme partielle de la série harmonique) donc elle n'est pas de Cauchy sinon elle convergerait.

Exercice 11. Soit $(u_n)_n$ une suite de nombre réels.

(1) Puisqu'une suite convergente est majorée, on peut traiter directement la deuxième question.

(2) On suppose que $(u_n)_n$ est croissante et qu'elle admet une suite extraite majorée. Soit $(u_{\varphi(n)})_n$ une suite extraite de $(u_n)_n$ qui est majorée et notons M le majorant. Puisque $\varphi : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante, on a toujours $\varphi(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.On a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq u_{\varphi(n)} \leq M$ (car $(u_n)_n$ est croissante). Ainsi, $(u_n)_n$ est une suite croissante et majorée. Donc elle converge.

Exercice 12 Soient π_1 et π_2 les applications coordonnées de $\mathbb{R}^2$ définies par $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ pour $i = 1,\ 2$.

(1) Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Montrons que $\pi_1(O)$ et $\pi_2(0)$ sont des parties ouvertes de $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \pi_1(O)$. Il existe alors $y \in \mathbb{R}$ tel que $a = (x, y) \in O$. Puisque O est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset O$ et alors $[x-\varepsilon\,; x+\varepsilon] \subset \pi_1(O)$. Ainsi, $\pi_1(O)$ est ouvert et il en est de même pour $\pi_2(O)$.

(2) Soit $H = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, xy = 1\right\}$. Montrons que H est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et que $\pi_1(H)$ et $\pi_2(H)$ ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.
Soit $((x_n, y_n))_n$ une suite d'éléments de H tel que $(x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$. Puisque $x_n y_n = 1$, en passant à la limite, on a $xy = 1$. Donc $(x, y) \in H$ c'est-à-dire toute suite convergente dans H converge dans H.
$\pi_1(H) = \mathbb{R}\setminus\{0\} = \pi_2(H)$ qui ne sont pas des fermés de $\mathbb{R}$.

(3) Montrons que si F est fermé et $\pi_2(F)$ est une partie bornée de $\mathbb{R}$, $\pi_1(F)$ est fermé.
Soit $(x_n)_n \subset \pi_1(F)$ telle que $x_n \longrightarrow x$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe y_n tel que $(x_n, y_n) \in F$.
La suite $((x_n, y_n))_n$ est alors une suite bornée dont on peut extraire une sous-suite convergente $((x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)})$
Notons $y = \lim y_{\varphi(n)}$. Comme F est fermé, $(x, y) = \lim(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \in F$; puis $x = \pi_1(x, y) \in \pi_1(F)$.

Exercice 13. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe un et un seul $y \in A$ vérifiant : $|x-y| = d(x, A)$. Montrons que A est un intervalle fermé.
Soit $(x_n)_n \subset A$ convergeant vers $x \in \mathbb{R}$. Il existe un unique $y \in A$ tel que $|x-y| = d(x, A)$. Or, $d(x, A) = 0$, donc $x = y \in A$. Ainsi, A est fermé.
Raisonnons par l'absurde. Si A n'est pas un intervalle, il existe $a < c < b$ tel que $a, b \in A$ et $c \notin A$. Posons $\alpha = \sup\{x \in A\,;\, x \leq c\}$ et $\beta = \inf\{x \in A\,;\, x \geq c\}$. On a $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < c < \beta$ et $]\alpha\,;\beta[\subset A^c = C_{\mathbb{R}}A$. Posons alors $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$. On a $d(\gamma, A) = \frac{\beta-\alpha}{2} = |\gamma-\alpha| = |\gamma-\beta|$. Ce qui contredit l'hypothèse d'unicité.