Université d'Antananarivo
Faculté des Sciences

T.D. Espace métrique $\mathbb{R}^n$
S3 - Série N°3
Année Universitaire : 2021 - 2022

Département de mathématiques
et Informatique

Exercice 1. Soit E un ensemble non vide et $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. L'application $(x,y) \longmapsto |f(x) - f(y)|$ est-elle une distance sur E ?

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}$, on pose $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ |x| + |y| & \text{si } x \neq y \end{cases}$.

(1) Montrer que d est une distance.

(2) Déterminer

(a) la boule ouverte de centre 1 et de rayon 1 : $B(1,1)$,

(b) l'adhérence de $B(1,1)$,

(c) la boule fermée de centre 1 et de rayon 3 : $B_f(1,3)$,

(d) la boule fermée de centre 1 et de rayon 1 : $B_f(1,1)$

(3) Que peut-on dire d'une suite $(x_n)_n$ qui converge vers 1 dans $(\mathbb{R}, d)$?

Exercice 3. Une distance d définie sur une ensemble E est dite ultramétrique si elle vérifie

$$d(x,z) \leq \sup\{d(x,y)\ ,\ d(y,z)\} \quad \text{pour tous} \quad x,\ y,\ z \in E.$$

Soit p un entier naturel premier. Pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on désigne par $\varphi(n)$ l'exposant de p dans la décomposition de n en facteurs premiers.

(1) Montrer que pour tous $m,\ m',\ n,\ n' \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on a

$$\varphi(mn) = \varphi(m) + \varphi(n)$$

et

$$\text{si} \quad \frac{n}{m} = \frac{n'}{m'}, \quad \text{on a} \quad \varphi(n) - \varphi(m) = \varphi(n') - \varphi(m').$$

(2) Pour $r \in \mathbb{Q}^*$, on pose $\varphi(r) = \varphi(n) - \varphi(m)$ où m et n sont deux entiers strictement positifs tels que $|r| = \frac{n}{m}$. Montrer que pour tous $r,\ r' \in \mathbb{Q}^*$, on a $\varphi(rr') = \varphi(r) - \varphi(r')$.

(3) Pour $x,\ y \in \mathbb{Q}$, on pose $d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ p^{-\varphi(x-y)} & \text{si } x \neq y \end{cases}$.

Montrer que d est une distance ultramétrique sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 4. Soit (X, d) un espace métrique et $a \in X$. Pour tous x, $y \in X$, on pose

$$d_a(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ d(a, x) + d(a, y) & \text{si } x \neq y \end{cases}.$$

(1) Montrer que d_a est une distance sur X.

(2) Montrer que pour tout $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r, $B_{d_a}(a, r)$, pour (X, d_a) est égale à la boule ouverte de centre a et de rayon r, $B_d(a, r)$, pour (X, d).

(3) Soit $x \in X$ tel que $x \neq a$. Montrer qu'il existe un nombre réel $r > 0$ tel que $B_{d_a}(x, r) = \{x\}$.

(4) Soit A un sous ensemble de X.

(a) Montrer que si $x \notin A$, le sous ensemble A est une partie ouverte de (X, d_a).

(b) On suppose que $a \in A$. Montrer que A est une partie ouverte de (X, d_a) si, et seulement si A est un voisinage de a dans (X, d).

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé et $r > 0$.

(1) Montrer que $B(0, r)$ est homéomorphe à E.

(2) En déduire que pour tout $a \in E$, $B(a, r)$ est homéomorphe à E.

(3) En déduire que $U_r = \{x \in E \,;\, \|x\| > r\}$ est homéomorphe à $E \setminus \{0\}$.

Exercice 6. Soient (X, d) un espace métrique et A une partie compacte de X.

(1) Montrer que pour tout $x \in X$, il existe $a \in A$ tel que $d(x, a) = d(x, A)$.

(2) Montrer que si B est une partie compacte de X, il existe $a \in A$ et $b \in B$ tels que $d(a, b) = d(A, B)$.

(3) Montrer que si B est une partie fermée de X telle que $A \cap B = \emptyset$, on a $d(A, B) > 0$.

Exercice 7. Soient A et B deux parties non vides d'un espace vectoriel normé E. Montrer le résultats suivants :

(1) Si A est sous ensemble ouvert, $A + B$ est une partie ouverte,

(2) Si A et B sont des parties compactes, $A + B$ sont des parties compactes,

(3) Si A est une partie compacte et B est une partie fermée, $A + B$ est un sous ensemble fermé,

(4) Si A et B sont des parties fermées, $A + B$ n'est pas nécessairement une partie fermée.