Introduction à la Topologie

Licence de Mathématiques
Université de Rennes 1

Francis Nier
Dragoş Iftimie

Introduction

Ce cours s'adresse à des étudiants de Licence en mathématiques. Il a pour objectif de donner les bases en topologie indispensables à toute formation en mathématiques. Il ne s'agit pas d'un traité complet sur le sujet, qui n'est pas neuf. De nombreux livres parfois très fournis (ceux donnés dans la bibliographie par exemple) existent déjà. Nous avons cherché, compte tenu des contraintes de volume horaire, d'acquis des étudiants en premier cycle et d'exigences pour la suite du cursus, à dégager les points clés permettant de structurer le travail personnel de l'étudiant voire de faciliter la lecture d'autres ouvrages. Par exemple, il nous a semblé important de ne pas nous limiter aux espaces métriques de façon à ce que le langage de la topologie générale ne soit plus un nouvel obstacle à franchir (de plus les topologies non métrisables arrivent très vite : convergence simple, topologies produit, quotient, de Zariski...). Nous avons laissé de côté, en le signalant, la notion de filtre qui à ce niveau introduirait plus de confusion qu'autre chose mais qui après coup ne présentera pas de difficulté majeure pour l'étudiant ayant assimilé ce cours. De la même façon, nous avons évité les discussions autour de l'axiome du choix, nous limitant au niveau de la théorie des ensembles aux opérations ensemblistes rappelées dans le premier exercice. Ainsi le théorème de Tychonoff est démontré dans le cas métrisable. De même, on ne parle pas du théorème de Hahn-Banach qui s'intégre plus naturellement dans un cours d'Analyse Fonctionnelle, mais il y a un ou deux exercices sur la séparation des convexes en dimension finie.

Nous avons inclus dans ce texte une liste d'exercices. Ceux-ci de difficulté variée répondent à une double nécessité. Il est important de jongler avec les différents concepts introduits en cours et même de faire certaines erreurs une fois pour bien identifier les pièges. Les exercices permettent d'orienter les raisonnements vers d'autres domaines des mathématiques (algèbre, analyse, géométrie), cela afin d'exhiber l'intérêt et l'omniprésence des arguments topologiques.

Les choses supposées connues correspondent au programme du premier cycle. Elles interviennent dans les démonstrations et dans les exemples qui donnent corps aux nouvelles définitions. Il s'agit de

1) Techniques ensemblistes : opérations ensemblistes, relations, fonctions, notion de dénombrabilité.

2) Analyse élémentaire sur la droite réelle $\mathbb{R}$: Le corps des réels défini comme corps archimédien contenant $\mathbb{Q}$ et vérifiant la propriété de la borne supérieure, suites réelles, intervalles, fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivation.

3) Algèbre linéaire et bilinéaire : Espaces vectoriels, bases, applications linéaires, calcul matriciel, déterminants, produit scalaire.

4) Fonctions de plusieurs variables, dérivées partielles.

5) Convexité d'un ensemble, d'une fonction.

D'autres notions intervenant dans les exercices (fonctions holomorphes, différentielle) seront rappelées, si besoin est, en Travaux Dirigés.

Conseils pratiques aux étudiants : Ce polycopié ne dispense pas d'assister aux amphis ni de prendre des notes complémentaires. Il est là pour éviter un travail de copie qui empêche parfois de se concentrer sur les explications données oralement. Ce cours présente au moins deux difficultés : 1) Pour les étudiants venant du DEUG, c'est la première fois qu'ils sont sérieusement confrontés à une démarche axiomatique. Se convaincre de l'intérêt des notions abstraites et identifier leur domaine de validité demande du travail. Une façon de faire est de chercher à résoudre le maximum d'exercices par soi-même. 2) Un vocabulaire nouveau et précis doit s'acquérir. Il est important de comprendre et apprendre le cours au fur et à mesure. Une bonne façon de tester l'assimilation du cours est de le refaire mentalement à partir de la table des matières bien détaillée. L'index donné en fin de polycopié aidera à revenir rapidement sur une définition ou un énoncé précis.

Nous tenons à remercier Jacques Camus dont le polycopié précédent et les conseils nous ont aidés à calibrer ce cours, ainsi que Karim Bekka, Bas Edixhoven, Isabelle Gruais, Jean-Marie Lion, Laurent Moret-Bailly, Michel Pierre et Jean-Claude Tougeron dont les suggestions et remarques ont été utiles.

Table des matières

Chapitre 1

Espaces métriques, Espaces topologiques.

Dans ce chapitre, nous présentons toutes les notions de base de la topologie. Nous allons dégager les structures qui permettent de parler de limite et de continuité. L'exemple fondamental déjà étudié en premier cycle est le cas de $\mathbb{R}$ et de $\mathbb{R}^n$. La théorie générale englobe bien sûr cet exemple - qu'il faut garder en tête - mais conduit parfois à des situations moins intuitives.

1.1 Espaces métriques

La façon la plus immédiate de parler de limite ou de continuité dans un ensemble X est de mesurer de façon quantitative l'écart entre les points [1] et d'introduire pour cela une distance.

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1. *Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}$ vérifiant* [2] *pour tout $x, y, z \in X$:*

i) $(d(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$;

ii) $d(y,x) = d(x,y)$ *(symétrie) ;*

iii) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.1.2. *Un espace métrique est un couple (X,d) où X est un ensemble et d est une distance sur X.*

[1] En topologie, on préfère parler de points plutôt que d'éléments d'un ensemble. Cette nuance traduit mieux l'intuition "géométrique".

[2] Il n'est pas nécessaire de mettre dans la définition de la distance $d(x,y) \in \mathbb{R}_+$. C'est une conséquences des axiomes i), ii) et iii) comme le montre la Proposition 1.1.4.

EXEMPLE 1.1.3. L'ensemble des réels muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$ est un espace métrique. D'autres exemples sont donnés au paragraphes 1.1.5 et 1.1.7.

1.1.2 Propriétés de la distance

Proposition 1.1.4. *Une distance d sur un ensemble X vérifie :*

a) *La distance est toujours positive ou nulle :*

$$\forall x, y \in X,\ d(x, y) \geq 0.$$

b) *"La distance entre les distances est plus petite que la distance" :*

$$\forall x, y, z \in X,\ |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Preuve : a) En utilisant successivement i), iii) et ii) on obtient pour $x, y \in X$

$$0 = d(x, x) \leq d(x, y) + d(y, x) = 2d(x, y).$$

b) En utilisant iii) on obtient pour $x, y, z \in X$: $d(x, z) - d(x, y) \leq d(y, z)$. Par symétrie et en utilisant ii), on a aussi : $d(x, y) - d(x, z) \leq d(z, y) = d(y, z)$. On en déduit $|d(x, z) - d(x, y)| \leq d(y, z)$. ■

1.1.3 Boules

Définition 1.1.5. *Soit (X, d) un espace métrique, soit $x \in X$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble*

$$\begin{aligned} &B(x, r) = \{y \in X,\ d(x, y) < r\} \\ \textit{resp.}\quad &B_f(x, r) = \{y \in X,\ d(x, y) \leq r\}. \end{aligned}$$

Pour $0 < r < r'$ les inclusions $B(x, r) \subset B_f(x, r) \subset B(x, r')$ sont des conséquences directes de la définition. Dans les exemples ci-dessous on peut voir que ces inclusions sont souvent strictes mais pas toujours (Voir l'exemple f) ci-dessous).

1.1.4 Parties bornées, fonctions bornées

Définition 1.1.6. *Soit (X, d) un espace métrique. On dit qu'une partie A de X est bornée s'il existe une boule fermée $B_f(x_0, r)$ telle que $A \subset B_f(x_0, r)$,*

$$\forall x \in A,\ d(x_0, x) \leq r.$$

Compte tenu de la remarque ci-dessus sur les inclusions des boules, il est clair que l'on peut remplacer l' adjectif "fermée" par "ouverte". De plus l'inégalité triangulaire entraîne que le caractère borné de A ne dépend pas du choix de x_0 (avec un x_0' il suffit de remplacer r par $r' = r + d(x_0, x_0')$).

Définition 1.1.7. *Soit X un ensemble et (Y, d) un espace métrique. Si X est un ensemble on dit qu'une fonction $f : X \to Y$ est bornée si son image $f(X)$ est bornée. On note $\mathcal{F}_b(X;Y)$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}(X;Y) = Y^X$ des fonctions bornées.*

1.1.5 Exemples

a) $\mathbb{R}$: La distance usuelle est donnée par $d(x, y) = |x - y|$. Les boules sont des intervalles. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}_+^*$, on a $B(x, r) =]x - r, x + r[$ et $B_f(x, r) = [x - r, x + r]$.

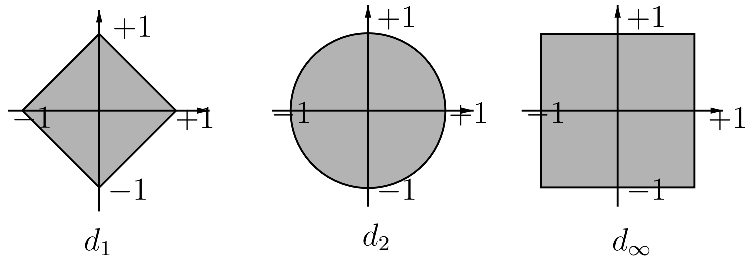
b) $\mathbb{C}$: On remplace la valeur absolue par le module $d(x, y) = |x-y|$. La boule ouverte de centre $x \in \mathbb{C}$ et de rayon $r > 0$, $B(x, r)$, est le disque ouvert de centre x et de rayon r et $B_f(x, r)$ est le disque fermé.

c) $\mathbb{K}^n$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$: On peut alors définir plusieurs distances faisant intervenir les distances entre les composantes. Pour deux éléments arbitraires de $\mathbb{K}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on pose :

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|, \qquad d_2(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{et} \qquad d_\infty(x, y) = \max_{i \in \{1, \ldots, n\}} |y_i - x_i|.$$

On vérifie aisément que d_1 et d_∞ sont des distances (i.e. vérifient les propriétés i),ii) et iii)) tandis que d_2 n'est rien d'autre que la distance euclidienne (On rappelle qu'alors l'inégalité triangulaire iii) est une conséquence de l' inégalité de Cauchy-Schwarz). Dans $\mathbb{R}^2$ les boules de centre 0 et de rayon 1 ont la forme suivante :



d) Produit fini d'espaces métriques : Si pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, (X_i, δ_i) est un espace métrique, on peut mettre comme précédemment les distances d_1,

d_2 et d_∞ sur $X = \prod_{i=1}^n X_i$:

$$d_1(x,y) = \sum_{i=1}^n \delta_i(x_i, y_i)$$

$$d_2(x,y) = \left(\sum_{i=1}^n \delta_i(x_i, y_i)^2, \right)^{\frac{1}{2}},$$

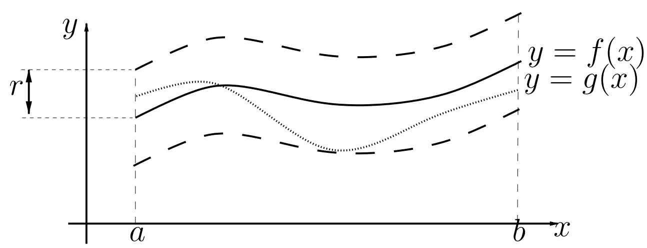
$$\text{et} \qquad d_\infty(x,y) = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} \delta_i(x_i, y_i),$$

où $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux éléments arbitraires de $X = \prod_{i=1}^n X_i$.

e) Distance de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}_b(X,Y)$: Si (Y, δ) est un espace métrique et X est un ensemble. L'ensemble $\mathcal{F}_b(X;Y)$ peut être muni de la distance

$$\forall f, g \in \mathcal{F}_b(X;Y), \quad (f,g) = \sup_{x\in X} \delta(f(x), g(x)).$$

On peut représenter graphiquement les boules de $\mathcal{F}_b\left([a,b];\mathbb{R}\right)$ pour la distance de la convergence uniforme.



La boule de centre f et de rayon r est l'ensemble des fonctions dont le graphe se trouve entre les 2 courbes en pointillés (déduites de f par translation parallèlement à l'axe des ordonnées). Ici, on a $d_\infty(f,g) \leq r$.

f) Distance triviale : Sur un ensemble X quelconque on peut mettre la distance triviale donnée par

$$\forall x, y \in X, \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = y \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dans ce cas on a $B(x, \frac{1}{2}) = \{x\} = B_f(x, \frac{1}{2}) = B(x,1)$ tandis que $B_f(x,1) = X$ est différent de $\{x\} = B(x,1)$ si X a au moins 2 éléments.

h) Soit (X,d) un espace métrique et une application $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante sous-additive et ne s'annulant qu'en 0 :

$$(\varphi(u) = 0) \Leftrightarrow (u = 0)$$

$$\forall u, v \in \mathbb{R}_+, \ \varphi(u) \underset{\text{croissante}}{\leq} \varphi(u+v) \underset{sous-additive}{\leq} \varphi(u) + \varphi(v)$$

Alors $\varphi \circ d$ est une distance sur X (cf. Exercice 5). Deux cas particuliers sont intéressants : $\varphi(u) = \min\{1, u\}$ et $\varphi(u) = \frac{u}{1+u}$. Les distances $\min\{1, d(x, y)\}$ et $\frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ ont la propriété d'être bornées par 1 sur X et (on le verra plus loin) d'être topologiquement équivalentes à la distance d (cf. Paragraphe 1.6.2). Quand on regardera les propriétés topologiques d'un espace métrique on pourra donc toujours supposer la distance bornée.

1.1.6 Distance entre deux parties, diamètre

Définition 1.1.8. *Soit (X, d) un espace métrique. Soit A et B deux parties de X on appelle distance entre A et B la quantité*

$$d(A, B) = \inf\{d(x, y),\ x \in A, y \in B\}.$$

EXEMPLE 1.1.9. Si on prend $A = \{0\} \subset \mathbb{R}$ et $B = \{\frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$ on a $d(A, B) = 0$ tandis que $A \neq B$. Ainsi la distance entre les parties ne définit pas vraiment une distance sur $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ (ou $\mathcal{P}(X)$ en général). Il s'agit donc d'un abus de notation et il faut bien interpréter $d(A, B)$ comme l'infimum de la distance entre les points de A et de B.

Définition 1.1.10. *On appelle diamètre d'une partie A de X et on note $Diam(A)$ la quantité*

$$Diam(A) = \sup\{d(x, y),\ x \in A, y \in A\}.$$

On vérifie immédiatement qu'une partie A de X est bornée si et seulement si son diamètre est fini.

1.1.7 Norme, espaces vectoriels normés

Un exemple important d'espace métrique sur lequel nous reviendrons plus loin est le cas des espaces vectoriels normés. On considère un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.11. *On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\| \ \|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$*

i) $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ *(homogénéité),*

ii) $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 1.1.12. *Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \ \|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\| \ \|$ est une norme sur E.*

La proposition suivante précise en quel sens les espaces vectoriels normés sont des espaces métriques. Il s'ensuit que toutes les propriétés des distances données plus haut ont une traduction en terme de norme dans les espaces vectoriels normés (En particulier, comme pour les distances il n'est pas nécessaire de supposer la norme positive ou nulle ; c'est une conséquence des axiomes i), ii) et iii)).

Proposition 1.1.13. *Si $(E, \|\ \|)$ est un espace vectoriel normé alors la quantité $d(x, y) = \|y - x\|$ définit une distance sur E.*

Preuve : Il est clair que les hypothèses i) avec $\lambda = 0$ et ii) pour la norme $\|\ \|$ entraîne la propriété i) de la distance d. La propriété i) avec $\lambda = -1$ pour la norme entraîne la propriété ii) pour la distance. L'inégalité triangulaire suit immédiatement. ∎

EXEMPLE 1.1.14. On se place toujours dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Il est clair que la valeur absolue (ou le module) $|\ |$ est une norme sur $\mathbb{K}$ pris comme $\mathbb{K}$ ou $\mathbb{R}$ espace vectoriel.

b) Sur $\mathbb{K}^n$ les distances d_1, d_2 et d_∞ introduites au 1.1.5 c) sont associées à des normes. Plus généralement la quantité

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pour } p < +\infty \\ \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i| & \text{pour } p = +\infty. \end{cases}$$

définit une norme sur $\mathbb{K}^n$ (cf. Exercice 6).

On peut encore généraliser de la façon suivante : Pour une famille finie de $\mathbb{K}$ espaces vectoriels normés, $(E_i, |\ |_i)_{i \in \{1,\dots,n\}}$, et pour $1 \leq p \leq \infty$ la quantité

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|_i^p\right)^{\frac{1}{p}} & \text{pour } p < +\infty \\ \max_{i \in \{1,\dots,n\}} |x_i|_i & \text{pour } p = +\infty \end{cases}$$

définit une norme sur le $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\prod_{i=1}^n E_i = \oplus_{i=1}^n E_i$.

c) Norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}_b(X; \mathbb{K})$: Soit X un ensemble on munit $\mathcal{F}_b(X; \mathbb{K})$ de la norme

$$\forall f \in \mathcal{F}_b(X; \mathbb{K}), \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|.$$

Il est clair que la distance associée est la distance de la convergence uniforme. De plus, cette norme coïncide avec la norme $\|\ \|_\infty$ définie plus haut si X est fini.

Plus généralement, si X est un ensemble et si $(E, \|\ \|)$ est un $\mathbb{K}$ espace vectoriel normé, on peut définir une norme de la convergence uniforme sur $\mathcal{F}_b(X; E)$ en posant

$$\forall f \in \mathcal{F}_b(X; E), \|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|.$$

1.2 Espaces topologiques

Quand on aborde des problèmes de convergence, on s'aperçoit assez vite que la notion de distance ou de norme est trop restrictive. Par exemple si on prend la suite de fonctions $f_n(x) = \left(\frac{x}{n}\right)^n$ sur $\mathbb{R}$, on a bien envie de dire qu'elle converge vers 0 puisqu'en tout point de $\mathbb{R}$ ou sur toute région bornée de $\mathbb{R}$ cette convergence est vérifiée. Cependant il n'y a pas de distance évidente que l'on peut mettre pour exprimer cette convergence : L'écart, mesuré globalement sur la droite réelle, entre deux termes de la suite est toujours infini. Les mathématiciens du XIXème et du début XXème siècle ont dégagé la structure d'espace topologique qui contient de façon abstraite toutes les hypothèses nécessaires à l'étude de la convergence et de la continuité.

1.2.1 Définition, ouverts

Définition 1.2.1. *On appelle espace topologique un couple $(X, \mathcal{O})$ où X est un ensemble et $\mathcal{O}$ est une famille de parties de X, appelées ouverts, vérifiant*

(O1) *Toute réunion d'ouverts est un ouvert,*

(O2) *Une intersection **finie** d'ouverts est un ouvert,*

(O3) *X et $\emptyset$ sont des ouverts.*

Une autre façon de dire est dire que la famille des ouverts est une partie de $\mathcal{P}(X)$ stable par union quelconque, intersection **finie** et contenant X et $\emptyset$. On peut voir que l'ensemble des réunions quelconques d'intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ définit une topologie sur $\mathbb{R}$. Plus généralement tout espace métrique est un espace topologique.

1.2.2 Topologie des espaces métriques

Soit (X, d) un espace métrique.

Définition 1.2.2. *On appelle ouvert de (X, d) toute partie O de X qui est vide ou qui vérifie*

$$\forall x \in O, \exists r > 0,\ B(x, r) \subset O.$$

On vérifie facilement les axiomes (O1) (O2) et (O3). Ainsi une distance définit une topologie.

Proposition 1.2.3. *Une boule ouverte est un ouvert.*

Preuve : Soit $B(x_0, r_0)$ une boule ouverte de (X, d). Soit $x \in B(x_0, r_0)$. On a $d(x_0, x) < r_0$ et on pose $\rho = \frac{r_0 - d(x_0,x)}{2}$. Alors la boule $B(x, \rho)$ est incluse dans $B(x_0, r_0)$. En effet pour $y \in B(x, \rho)$ on a

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + \frac{r_0 - d(x_0, x)}{2} = \frac{r_0 + d(x_0, x)}{2} < r_0.$$

■

Corollaire 1.2.4. *Un ouvert de (X,d) est une union quelconque de boules ouvertes.*

Preuve : Soit O un ouvert de (X,d). Pour tout $x \in O$, il existe $r > 0$ tel que $B(x,r) \subset O$ (Définition 1.2.2). Ainsi le réel strictement positif $r_x = \sup\{r > 0, B(x,r) \subset 0\}$ est bien défini pour tout $x \in O$ et on a $O = \cup_{x\in O} B(x,r_x)$. ■

1.2.3 Fermés

Définition 1.2.5. *Dans un espace topologique $(X,\mathcal{O})$ on appelle fermé toute partie de X dont le complémentaire est un ouvert. On note $\mathcal{F}$ la famille de tous les fermés. En résumé on a*

$$(f \in \mathcal{F}) \Leftrightarrow \left(\complement_X F \in \mathcal{O}\right).$$

On déduit de (O1)(O2) et (O3) par passage au complémentaire les propriétés :

Proposition 1.2.6. *La famille $\mathcal{F}$ de tous les fermés vérifie*

(F1) *Toute intersection de fermés est un fermé.*

(F2) *Une réunion **finie** de fermés est un fermé.*

(F3) *$\emptyset$ et X sont des fermés.*

Proposition 1.2.7. *Dans un espace métrique (X,d), toute boule fermée est un fermé.*

Preuve : Soit $B_f(x_0,r_0)$ une boule fermée de (X,d). Il s'agit de montrer que $\complement_X B_f(x_0,r_0)$ est un ouvert. Soit $x \notin B_f(x_0,r_0)$. On a $d(x_0,x) > r_0$ et on pose $\rho = \frac{d(x_0,x)-r_0}{2}$. Alors la boule $B(x,\rho)$ est incluse dans $\complement_X B_f(x_0,r_0)$. En effet pour $y \in B(x,\rho)$ on a

$$d(x_0,x) - d(x_0,y) \leq |d(x_0,x) - d(x_0,y)| \leq d(x,y) < \rho = \frac{d(x,x_0) - r_0}{2}$$

d'où l'on tire

$$r_0 < \frac{d(x_0,x) + r_0}{2} = d(x_0,x) - \frac{d(x_0,x) - r_0}{2} < d(x_0,y).$$

Cette dernière inégalité dit explicitement $y \in \complement_X B(x_0,r_0)$. ■

EXEMPLE 1.2.8. Dans $\mathbb{R}$ les intervalles fermés $[a,b]$, $-\infty < a \leq b < +\infty$ sont fermés. Attention : les intervalles $[a,+\infty[$ et $]-\infty,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, sont des fermés comme complémentaires des ouverts $]-\infty,a[$ et $]b,+\infty[$ (revenir à la définition des ouverts des espaces métriques). En revanche $[0,1[$ n'est ni ouvert ni fermé.

REMARQUE 1.2.9. On peut définir la topologie avec les fermés en prenant (F1)(F2) et (F3) comme axiomes et définir ensuite les ouverts comme les complémentaires des fermés. Les assertion (O1)(O2) et (O3) deviennent alors des propriétés. De ce fait on préfère noter $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique $\mathcal{T}$ faisant référence à $\mathcal{O}$ ou $\mathcal{F}$ (voire la famille des voisinages $\mathcal{V}$ définie plus bas.)

1.2.4 Exemples d'espaces topologiques

a) Les espaces métriques et les espaces vectoriels normés sont des espaces topologiques.

b) Topologie discrète : tous les ensembles sont des ouverts (et des fermés). C'est la topologie associée à la distance triviale. Pour vérifier qu'une topologie est discrète, il suffit de vérifier que tous les singletons sont ouverts. C'est le cas pour $\mathbb{Z}$ muni de la distance $d(x, y) = |x - y|$.

c) Topologie grossière : C'est la topologie qui a le moins d'ouverts (de fermés) possible : $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$, $\mathcal{F} = \{X, \emptyset\}$. On verra que si X a au moins 2 éléments cette topologie n'est pas métrisable.

Définition 1.2.10. *On dit qu'une topologie $\mathcal{T}$ sur un ensemble X est <u>métrisable</u> si on peut trouver une distance d sur X qui donne la topologie $\mathcal{T}$.*

d) On verra d'autres exemples moins élémentaires de topologies non métrisables (Ex : la topologie de la convergence simple des fonctions n'est en général pas métrisable (cf. Exercice 86), un autre exemple de topologie non métrisable utilisée en algèbre et géométrie algébrique est la topologie de Zariski (cf. Exercice 43).

1.2.5 Voisinages

Définition 1.2.11. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $x \in X$. On appelle <u>voisinage</u> de x dans X, toute partie de X contenant un ouvert contenant x. On note $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x :*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(X),\ \exists O \in \mathcal{O},\ x \in O \subset V\}.$$

Proposition 1.2.12. *Si (X, d) est un espace métrique et $x \in X$, on a*

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{P}(X),\ \exists r > 0,\ B(x, r) \subset V\}.$$

Preuve : Si V est un voisinage de $x \in X$, il existe un ouvert O tel que $x \in O \subset V$. Par définition des ouverts des espaces métriques, il existe $r > 0$ tel que $B(x, r) \subset O$. Dans le sens inverse si $B(x, r) \subset V$, alors on prend $O = B(x, r)$. ■

On peut caractériser les ouverts à l'aide des voisinages.

Proposition 1.2.13. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Un sous-ensemble O de X est un ouvert si et seulement si il est voisinage de chacun de ses points*

$$(O \in \mathcal{O}) \Leftrightarrow (\forall x \in O, O \in \mathcal{V}(x)) .$$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Si $O \in \mathcal{O}$, on a pour tout $x \in O$, $x \in O \subset O$ et donc $O \in \mathcal{V}(x)$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si O est un voisinage de chacun de ses points. Pour tout $x \in O$ il existe un ouvert ω tel que $x \in \omega \subset O$ et on note

$$\omega_x = \bigcup_{\substack{x \in \omega \subset O \\ \omega \text{ ouvert}}} \omega.$$

On a alors

$$O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subset \bigcup_{x \in O} \omega_x \subset O$$

et par conséquent $O = \cup_{x \in O} \omega_x$ est un ouvert d'après (O2). ■

Proposition 1.2.14. *La famille $\mathcal{V} = \cup_{x \in X} \mathcal{V}(x) \subset \mathcal{P}(X)$ de tous les voisinages vérifie*

(V1) *Si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors $x \in V$.*

(V2) *Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset A$ alors $A \in \mathcal{V}(x)$.*

(V3) *Toute intersection **finie** de voisinages de $x \in X$ est un voisinage de x.*

(V4) *Si $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe $W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $W \subset V$ et W est voisinage de chacun de ses points.*

Preuve : Les assertions (V1) et (V2) sont immédiates.
(V3) : Si $V_i \in \mathcal{V}(x)$ pour $i \in \{1, \ldots, n\}$. On peut alors trouver pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $O_i \in \mathcal{O}$ tel que $x \in O_i \subset V_i$. Mais alors $O = \cap_{i=1}^n O_i$ est un ouvert d'après (O2) qui contient x et qui est contenu dans $\cap_{i=1}^n V_i$. Dons $\cap_{i=1}^n V_i$ est un voisinage de x.
(V4) : Si $V \in \mathcal{V}(x)$ alors il existe $W \in \mathcal{O}$ tel que $x \in W \subset V$. Mais d'après la Proposition 1.2.13, W est voisinage de chacun de ses points. ■

REMARQUE 1.2.15. On peut définir la topologie en partant des voisinages avec (V1)(V2)(V3) et (V4) comme axiomes, puis définir les ouverts comme les parties qui sont voisinages de chacun de leurs points et (O1)(O2) et (O3) deviennent des propriétés.

1.2.6 Bases d'ouverts, bases de voisinages

Dans les espaces métriques, si les ouverts ne sont pas toujours aisément identifiables, on décrit en revanche simplement les boules ouvertes et on sait que tout ouvert s'écrit comme union de boules ouvertes. Cette situation est en fait générale. Il est souvent plus facile de décrire certains ouverts particuliers qui engendrent l'ensemble de tous les ouverts par union quelconque et intersection finie (les opérations permises par (O1) et (O2)). D'où la définition suivante.

Définition 1.2.16. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On dit qu'une famille $\mathcal{B}$ d'ouverts est une base d'ouverts de $(X, \mathcal{T})$ si tout ouvert $O \in \mathcal{O}$ s'écrit comme réunion quelconque d'intersections finies d'éléments de $\mathcal{B}$.*

REMARQUE 1.2.17. On notera qu'au niveau ensembliste une intersection finie d'unions peut s'écrire comme union d'intersections finies (cf. Exercice 1).

Pour les mêmes raisons, on introduit la notion de base de voisinages.

Définition 1.2.18. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $x \in X$. On dit que $\mathcal{BV}(x) \subset \mathcal{V}(x)$ est une base de voisinages de x si tout voisinage V de x contient un élément W de $\mathcal{BV}(x)$.*

On vérifie facilement la

Proposition 1.2.19. *Si (X, d) est un espace métrique alors on a*

i) *Tout point $x \in X$ admet une base dénombrable de voisinages*

$$\mathcal{BV}(x) = \left\{B\left(x, \tfrac{1}{n+1}\right),\ n \in \mathbb{N}\right\}.$$

ii) $\mathcal{B} = \{B(x, \frac{1}{n+1}),\ n \in \mathbb{N},\ x \in X\}$ *est une base d'ouverts de (X, d).*

REMARQUE 1.2.20. La propriété i) est une propriété très importante des espaces métriques. Elle n'est pas vraie en général. Sous certaines hypothèses supplémentaires, il s'agit même d'une propriété caractéristique des espaces métriques.

Enfin les bases de voisinages sont très utiles pour exprimer que des propriétés sont vraies localement dans un espace topologique.

Définition 1.2.21. *On dit qu'un espace topologique est localement truc si il admet en tout point une base de voisinages truc.*

Ainsi on peut dire que $\mathbb{R}$ et même tout espace métrique est localement borné. On parle de même de localement fermé, localement connexe, localement compact, localement convexe (dans les espaces vectoriels ou affines)... Ces deux dernières notions étant les plus utiles.

1.2.7 Sous-espaces topologiques

Pour définir un sous-espace topologique, il s'agit de préciser la topologie que l'on met sur un sous-ensemble, par exemple en précisant quels en sont les ouverts.

Définition 1.2.22. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit $A \subset X$. On appelle topologie induite par $\mathcal{T}$ sur A la topologie $\mathcal{T}_A$ dont la famille d'ouverts est*

$$\mathcal{O}_A = \{O \cap A,\ O \in \mathcal{O}\}.$$

On dit que $(A, \mathcal{T}_A)$ est un sous-espace topologique de $(X, \mathcal{T})$.

On appelle $O \cap A$ la trace de l'ouvert O sur A. On vérifie facilement que la famille des traces d'ouverts $\mathcal{O}_A$ vérifie les axiomes (O1)(O2) et (O3). On obtient aussi très rapidement les propriétés.

Proposition 1.2.23. **a)** *Les fermés de $\mathcal{T}_A$ sont les traces des fermés de $\mathcal{T}$:*

$$\mathcal{F}_A = \{F \cap A,\ F \in \mathcal{F}\}.$$

b) *Pour un point $x \in A$, les voisinages de x pour la topologie $\mathcal{T}_A$ sont les traces des voisinages pour la topologie $\mathcal{T}$:*

$$\mathcal{V}_A(x) = \{V \cap A,\ V \in \mathcal{V}(x)\}, \qquad x \in A.$$

c) *Si $B \subset A \subset X$, la topologie induite par $\mathcal{T}_A$ sur B n'est rien d'autre que la topologie $\mathcal{T}_B$ induite par $\mathcal{T}$ sur B :*

$$\mathcal{O}_B = \{O \cap B,\ O \in \mathcal{O}\} = \{O' \cap B,\ O' \in \mathcal{O}_A\} \qquad (O' = O \cap A).$$

Définition 1.2.24. *Si (X, d) est un espace métrique et si $A \subset X$. On dit que le couple (A, d_A) est un sous-espace métrique de (X, d) si $d_A = d\Big|_{A \times A}$ (i.e. pour tout $x, y \in A$ on a $d_A(x, y) = d(x, y)$).*

Il est clair que la restriction d_A de d à $A \times A$ définit une distance sur A. Le lien avec la notion topologique est donnée par

Proposition 1.2.25. *Un sous-espace métrique est un sous-espace topologique.*

Preuve : Il suffit de vérifier que les ouverts de (A, d_A) sont les traces des ouverts de (X, d) et même il suffit de le faire avec les bases d'ouverts que sont les ensembles de boules ouvertes. En fait il est clair que pour $x \in A$ et $r > 0$, on a $B_{d_A}(x, r) = B_d(x, r) \cap A$. ∎

EXEMPLE 1.2.26. **a)** La topologie induite sur $\mathbb{Z}$ par celle de $\mathbb{R}$ est la topologie discrète.

b) Si on prend $X = \mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle et $A = [0, 2[$. Alors $[0, 1[$ est un ouvert de A pour la topologie induite ($[0, 1[=] - 1, 1[\cap A$) tandis qu'il n'est ni ouvert ni fermé comme partie de $\mathbb{R}$. De même $[1, 2[$ est un fermé de A pour la topologie induite ($[1, 2[= [1, 3] \cap A$).

1.3 Adhérence, intérieur, extérieur

Dans ce paragraphe on travaille avec un espace topologique $(X, \mathcal{T})$.

1.3.1 Adhérence

Définition 1.3.1. *Soit A une partie de X et soit x un élément de X. On dit que*

a) *x est adhérent à A si tout voisinage V de x dans X contient un point de A.*

b) *x est un point d'accumulation de A si tout voisinage V de x dans X contient un point de A différent de x.*

c) *x est un point isolé de A si il existe un voisinage V de x tel que $V \cap A = \{x\}$.*

EXEMPLE 1.3.2. Dans $\mathbb{R}$ on considère l'ensemble $A = \{\frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$. Le point $\frac{1}{2}$ est un point isolé de A, il est adhérent à A mais n'est pas point d'accumulation. Le point 0 n'appartient pas à A mais il est adhérent à A. C'est un point d'accumulation de A.

Définition 1.3.3. *Pour une partie A de X on appelle adhérence de A et on note $\overline{A}$ l'ensemble de tous les points adhérents à A.*

Proposition 1.3.4. *L'adhérence $\overline{A}$ d'une partie A de X est le plus petit fermé de X contenant A.*

Preuve : On écrit la définition de $\overline{A}$ de façon ensembliste et on passe au complémentaire

$$\overline{A} = \{x \in X,\ \forall V \in \mathcal{V}(x),\ A \cap V \neq \emptyset\} = \complement_X\{x \in X,\ \exists V \in \mathcal{V}(x),\ A \cap V = \emptyset\}.$$

En utilisant la Définition 1.2.11 des voisinages, on obtient

$$\overline{A} = \complement_X\{x \in X\ \exists O \in \mathcal{O},\ A \cap O = \emptyset\} = \complement_X \left(\bigcup_{O \in \mathcal{O},\ O \cap A = \emptyset} O \right).$$

Ainsi $\overline{A} = \bigcap_{O \in \mathcal{O},\ O \cap A = \emptyset} \complement_X O = \bigcap_{F \in \mathcal{F},\ A \subset F} F$ est le plus petit fermé contenant A.

■ Des définitions vient tout de suite le

Corollaire 1.3.5. *Une partie A de X est fermée si et seulement si $\overline{A} = A$.*

Les opérations ensemblistes finies se comportent suit avec l'adhérence.

Corollaire 1.3.6. *Si A et B sont deux parties de X on*

$$A \subset \overline{A}, \quad \overline{\overline{A}} = \overline{A}, \quad \overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B} \quad et\ \overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}.$$

Preuve : Les deux premières relations sont immédiates.
Pour l'union : L'union $\overline{A} \cup \overline{B}$ est un fermé contenant A, B et donc $A \cup B$. On a donc la première inclusion $\overline{A \cup B} \subset \overline{A} \cup \overline{B}$. Par le même raisonnement, la chaîne d'inclusions $A \subset \overline{A \cup B} \subset \overline{A \cup B}$ entraîne $\overline{A} \subset \overline{A \cup B}$ et par symétrie $\overline{B} \subset \overline{A \cup B}$. On en tire l'inclusion réciproque $\overline{A} \cup \overline{B} \subset \overline{A \cup B}$.
Pour l'intersection : On a $A \cap B \subset A \subset \overline{A}$ et $A \cap B \subset B \subset \overline{B}$. L'intersection $A \cap B$ est donc incluse dans le fermé $\overline{A} \cap \overline{B}$, il en est donc de même de son adhérence. ∎

EXEMPLE 1.3.7. La dernière inclusion peut être stricte comme le montre l'exemple dans $\mathbb{R}$, $A = [0, 1[$ et $B =]1, 2]$. On a $A \cap B = \emptyset$ et donc $\overline{A \cap B} = \emptyset$ tandis que $\overline{A} \cap \overline{B} = \{1\}$.

Définition 1.3.8. *Une partie A de X est dite <u>dense</u> dans X si $\overline{A} = X$.*

EXEMPLE 1.3.9. Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ et des irrationnels $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ (cf. Exercice 12).

Définition 1.3.10. *On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est <u>séparable</u> s'il admet une partie dénombrable et dense.*

EXEMPLE 1.3.11. Dans $\mathbb{R}$, l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ est dénombrable et $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. L'espace métrique $\mathbb{R}$ est séparable (et on le rappelle non dénombrable).

Cette notion sera en particulier utile pour l'étude des espaces de Hilbert au Chapitre 7.

1.3.2 Intérieur

Définition 1.3.12. *Soit A une partie de X. On dit qu'un point x de A est <u>intérieur</u> à A si A est un voisinage de x dans X, $A \in \mathcal{V}(x)$.*

Définition 1.3.13. *On appelle <u>intérieur</u> d'une partie A de X, et on note $\overset{\circ}{A}$, l'ensemble des points intérieurs à A.*

Proposition 1.3.14. *L'intérieur d'une partie A de X est le plus grand ouvert contenu dans A, $\overset{\circ}{A} = \bigcup_{O \in \mathcal{O},\ O \in A} O$.*

Preuve : Il suffit d'écrire la définition de l'intérieur de façon ensembliste et d'utiliser la Définition 1.2.11 des voisinages

$$\overset{\circ}{A} = \{x \in A,\ A \in \mathcal{V}(x)\} = \{x \in A,\ \exists O \in \mathcal{O},\ x \in O \subset A\} = \bigcup_{O \in \mathcal{O},\ O \in A} O.$$

∎

Corollaire 1.3.15. *Une partie A de X est ouverte si et seulement si $A = \overset{\circ}{A}$.*

Corollaire 1.3.16. *Pour toute partie A de X on a*

$$\complement_X \overset{\circ}{A} = \overline{\complement_X A} \quad et \quad \complement_X \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_X A}}.$$

Preuve : Pour une partie A de X on écrit

$$\complement_X \overset{\circ}{A} = \complement_X \left(\bigcup_{O \in \mathcal{O},\ O \in A} O \right) = \bigcap_{O \in \mathcal{O},\ O \in A} \complement_X O = \bigcap_{F \in \mathcal{F},\ \complement_X A \subset F} F = \overline{\complement_X A}.$$

La deuxième égalité s'obtient par passage au complémentaire. ■

L'ensemble $\complement_X \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_X A}}$ est aussi appelé extérieur de A.

Corollaire 1.3.17. *Pour deux parties A et B de X on a*

$$\overset{\circ}{A} \subset A, \quad \overset{\circ}{\overbrace{\overset{\circ}{A}}} = \overset{\circ}{A}, \quad \overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}, \quad \overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subset \overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}.$$

Preuve : Ces relations se déduisent directement du Corollaire 1.3.6 par passage au complémentaire, compte tenu du corollaire précédent.
Une démonstration directe est laissée en exercice. ■

EXEMPLE 1.3.18. Là encore, la dernière inclusion peut être stricte. Par exemple dans $\mathbb{R}$ avec $A = [0,1]$ et $B = [1,2]$ on a $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} =]0;1[\cup]1,2[$ tandis que $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}} =]0,2[$.

1.3.3 Frontière

Définition 1.3.19. *On appelle <u>frontière</u> d'une partie A de X l'ensemble $Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A}$.*

Proposition 1.3.20. *Pour toute partie A de X on a $Fr(A) = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ et $(\overset{\circ}{A}, Fr(A), \overset{\circ}{\overbrace{\complement_X A}})$ forme une partition de X.*

Preuve : Pour une partie A de X on a

$$Fr(A) = \overline{A} \cap \overline{\complement_X A} = \overline{A} \cap \complement_X \overset{\circ}{A} = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Ainsi $(\overset{\circ}{A}, Fr(A))$ forme une partition de $\overline{A}$ tandis que $(\overline{A}, \complement_X \overline{A} = \overset{\circ}{\overbrace{\complement_X A}})$ est une partition de X. ■

EXEMPLE 1.3.21. **a)** Dans $\mathbb{R}^n$ muni de la distance euclidienne on a $\overline{B(0,1)} = B_f(0,1)$ et $Fr(B(0,1))$ est la sphère de centre 0 et de rayon 1 (cf. Exercice 14).

b) Sur un ensemble X non vide muni de la distance triviale (topologie discrète). On a

$$\overline{B(x,1)} = \overline{\{x\}} = \{x\}, \quad B_f(x,1) = X, \quad \overset{\circ}{B}(x,1) = \{x\} \quad \text{et} \quad Fr(B(x,1)) = \emptyset.$$

On voit en particulier que si X a au moins 2 éléments alors l'adhérence de la boule ouverte de rayon 1 n'est pas la boule fermée de rayon 1.

REMARQUE 1.3.22. Certains auteurs notent $\overline{B}(x,r)$ la boule fermée de centre x et de rayon r. Comme on le voit dans l'exemple a) ci-dessus cela ne pose pas de problème dans les espaces vectoriels normés (cf. Exercice 14). En revanche, cela peut prêter à confusion pour des distances générales comme le montre l'exemple b).

1.4 Limites

Dans ce paragraphe et les suivants nous travaillerons tantôt dans un espace topologique $(X,\mathcal{T})$ tantôt dans un espace métrique (X,d). Pour les définitions et propriétés générales on peut se placer dans un espace topologique quelconque. En revanche certaines propriétés sont particulières aux espaces métriques. On précisera bien à chaque fois dans quel cadre on se place et les propriétés des espaces métriques nécessaires.

1.4.1 Limite d'une suite

Définition 1.4.1. *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X et soit $l \in X$. On dit que l est <u>une limite</u> de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ quand n tend vers l'infini si pour tout voisinage V de l dans X, il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont dans V. Cela se résume en*

$$\forall V \in \mathcal{V}(l), \exists N_V \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_V, x_n \in V.$$

La traduction dans les espaces métriques est plus quantitative (On a une distance pour mesurer comment les termes de la suite s'approchent de la limite).

Proposition 1.4.2. *Soit (X,d) un espace métrique. On dit que $l \in X$ est une limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n,l) \leq \varepsilon.$$

La démonstration est assez simple et consiste à remplacer les voisinages par les boules (les boules fermées ou ouvertes centrées en l forment une base de voisinages de l). Pour la première fois nous détaillons cette preuve. Dans la suite, nous dirons simplement "Il suffit de remplacer les voisinages par des boules".

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que l est une limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Pour tout $\varepsilon > 0$ la boule $B_f(l,\varepsilon)$ est un voisinage de l et d'après la Définition 1.4.1 ci-dessus il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_\varepsilon,\ x_n \in B_f(l,\varepsilon)$. C'est à dire

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\varepsilon,\ d(l, x_n) \leq \varepsilon.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_\varepsilon,\ d(x_n, l) \leq \varepsilon$. Soit V un voisinage de l. Alors (cf. Proposition 1.2.12) il existe $r_V > 0$ tel que $B(l, r_V) \subset V$. On prend $\varepsilon_V = \frac{r_V}{2}$. Par hypothèse, on sait trouver $N_V \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N_V,\ d(x_n, l) \leq \varepsilon$. On a trouvé $N_V \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N_V,\ x_n \in B_f(l, \varepsilon_V) \subset B(l, r_V) \subset V,$$

et ce pour tout voisinage V de l. ∎

1.4.2 Espace topologique séparé, unicité de la limite

Définition 1.4.3. *On dit qu'un espace topologique $(X,\mathcal{T})$ est $\overline{\text{séparé}}$ si pour tout couple de points $x, y \in X$ distincts, $x \neq y$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ et $W \in \mathcal{V}(y)$ tels que $V \cap W = \emptyset$. On dit aussi que la topologie $\mathcal{T}$ sépare les points de X.*

Proposition 1.4.4. *Un espace métrique est séparé.*

Preuve : Soit (X, d) un espace métrique. Soit x, y deux points distincts de X. On pose $r = d(x, y) > 0$, $V = B(x, \frac{r}{3})$ et $W = B(y, \frac{r}{3})$. Si $z \in V \cap W$ alors on a

$$r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) < \frac{r}{3} + \frac{r}{3} = \frac{2r}{3},$$

ce qui est impossible pour $r > 0$. On a donc $V \cap W = \emptyset$. ∎

La notion d'espace séparé est importante pour le résultat suivant :

Théorème 1.4.5. *Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique séparé toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a au plus une limite. Si une telle limite $l \in X$ existe, on dit que l est la limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers l) quand n tend vers l'infini et on note $\lim_{n\to+\infty} x_n = l$.*

Preuve : Par l'absurde, supposons que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ait deux limites distinctes $l_1 \neq l_2$. Comme $(X,\mathcal{T})$ est séparé, il existe $V_1 \in \mathcal{V}(l_1)$ et $V_2 \in \mathcal{V}(l_2)$

tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. D'après la Définition 1.4.1 des limites, il existe deux entiers n_1 et n_2 tels que

$$(\forall n \geq n_1,\ x_n \in V_1) \quad \text{et} \quad (\forall n \geq n_2,\ x_n \in V_2)\,.$$

Mais alors $x_{\max\{n_1,n_2\}} \in V_1 \cap V_2 = \emptyset\,!!!$ ■

REMARQUE 1.4.6. On réserve la notation $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ au cas des espaces séparés. Dans ce cas les égalités $l = \lim_{n\to+\infty} x_n$ et $l' = \lim_{n\to+\infty} x_n$ entraînent bien $l = l'$. C'est le résultat d'unicité de la limite que l'on résume par cette notation.

EXEMPLE 1.4.7. **a)** L' exemple le plus simple de topologie non séparée est la topologie grossière sur un ensemble X ayant au moins 2 éléments. Tout élément x de X n'admet qu'un seul voisinage X. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite dans X, tout point x de X est une limite. Ainsi il n'y a pas unicité de la limite.
Une topologie qui ne sépare pas les points est une topologie qui n'a pas assez d'ouverts (de voisinages ou de fermés). Dans la suite, c'est le cas en analyse, on ne travaillera essentiellement avec des topologies séparées. On continuera de préciser l'hypothèse "espace séparé" pour bien identifier où elle intervient.

b) En algèbre et en géométrie algébrique, on utilise la topologie de Zariski qui n'est pas séparée et donc pas métrisable (cf. Exercice 43).

1.4.3 Limite et adhérence

Nous énonçons un résultat ci-dessous pour les espaces métriques qui admet diverses généralisations (voir la remarque ci-dessous).

Proposition 1.4.8. *Soit (X, d) un espace métrique. Pour toute partie A de X et tout point x de X on a l'équivalence entre :*

i) $x \in \overline{A}$.

ii) *Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A dont x est limite ($x = \lim_{n\to+\infty} x_n$).*

Preuve : i)$\Rightarrow$ ii) : La propriété des espaces métriques que l'on utilise est que tout point $x \in X$ admet une base dénombrable de voisinages $\mathcal{BV}(x) = \{B_n = B(x, \frac{1}{n+1}),\ n \in \mathbb{N}\}$. Soit x un élément de $\overline{A}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in B_n \cap A$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie est une suite de A et elle converge vers x. En effet si V est un voisinage de x dans X il existe $n_V \in \mathbb{N}$ tel que $B_{n_V} \subset V$ et on a alors

$$\forall n \geq n_V,\ x_n \in B_n \subset V_{n_V} \subset V.$$

ii) $\Rightarrow$ i) : Si $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de A, alors pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$ il existe n_V tel que : $\forall n \geq n_V, x_n \in V$. Pour tout voisinage V de x dans X on a trouvé un élément x_{n_V} appartenant à $A \cap V$. ■

REMARQUE 1.4.9. L'implication ii)$\Rightarrow$ *i*) est vraie dans tout espace topologique $(X, \mathcal{T})$ (il n'est même pas nécessaire de le supposer séparé). En revanche, pour la première implication i) $\Rightarrow$ ii) on a besoin que tout point admette une base dénombrable de voisinages, ce qui est le cas dans les espaces métriques. On remarque que si on a une base dénombrable de voisinages $\mathcal{BV}(x) = \{V_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, on peut toujours la supposer décroissante, $V_{n+1} \subset V_n$ quitte à remplacer V_n par $\cap_{p=0}^{n} V_p$.
Attention : Cela est général, dans un espace métrique on peut caractériser les propriétés topologiques en utilisant des suites. Ce n'est plus le cas avec un espace topologique général.
On peut toutefois donner un critère d'appartenance à l'adhérence d'une partie A de X muni d'une topologie $\mathcal{T}$ en généralisant la notion de suite convergente à celle de filtre convergent.[3]

1.4.4 Limite d'une fonction

Définition 1.4.10. *Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et soit $f \in \mathcal{F}(X; X')$. Soit A une partie non vide de X et soit $a \in \overline{A}$. On dit que $l \in X'$ est limite de $f(x)$ quand x tend vers a en restant dans A si*

$$\forall V' \in \mathcal{V}(l), \exists V \in V(a),\ f(A \cap V) \subset V'.$$

Si $(X', \mathcal{T}')$ est séparé, cette limite est unique et on note $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = l$.

EXEMPLE 1.4.11. **a)** On considère la fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ pour $x < 1$ et $f(1) = 0$. On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x) = 1$ tandis que $f(x)$ n'a pas de limite quand x tend vers 1 dans $[0,1]$.

b) On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ donnée par $f(x) = x^2$. L'écriture $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ revient en fait à considérer $X = X' = \overline{\mathbb{R}_+} = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, muni de la topologie pour laquelle une base de voisinages de $+\infty$ est formée des intervalles $[\alpha, +\infty]$ avec $\alpha \in \mathbb{R}_+$, et à écrire $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ x\in\mathbb{R}_+}} f(x) = +\infty$.

c) Pour la fonction $f : [0,1] \cup \{2\} \to \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = x^2$ pour $x \leq 1$ et $f(2) = 5$, on a $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x\in[0,1]\cup\{2\}}} f(x) = 5$.

[3]On rencontre dans la littérature deux variantes : la notion bourbakiste de base de filtre et la notion anglo-saxonne de famille filtrée ("net" en anglais). Le lecteur intéressé pourra consulter [2], p 83, pour une discussion de ce point.

Proposition 1.4.12. *Avec les notations de la Définition 1.4.10, la limite l est dans l'adhérence de l'image de A : $l \in \overline{f(A)}$.*

Preuve : Il suffit de voir que la Définition 1.4.10 entraîne que tout voisinage V' de l dans X' rencontre $f(A)$. ∎

Proposition 1.4.13. *Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in \overline{A}$ et $f \in \mathcal{F}(X; X')$, on a l'équivalence entre :*

i) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l \in X'$.

ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in A$ on a l'implication*

$$(d(x, a) \leq \alpha) \Rightarrow (d'(f(x), l) \leq \varepsilon) .$$

Preuve : Remplacer les voisinages par des boules. ∎

Proposition 1.4.14. *Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques, $\emptyset \neq A \subset X$, $a \in \overline{A}$ et $f \in \mathcal{F}(X; X')$, on a l'équivalence entre :*

i) *Il existe $l \in X'$ tel que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = l \in X'$.*

ii) *Il existe $l \in X'$ telle que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, la suite image $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l.*

iii) *Pour toute suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers a, il existe $l_x \in X'$ tel que la suite image $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers l_x.*

Preuve : i) $\Rightarrow$ ii) : Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de A ayant a pour limite. Pour tout voisinage V' de l dans X', il existe un voisinage V de a dans X tel que $f(V \cap A) \subset V'$. Par définition de $\lim_{n \to \infty} x_n = a$, il existe $n_V \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_V,\ x_n \in V$. On prend $n_{V'} = n_V$ et on a : $\forall n \geq n_{V'},\ f(x_n) \in f(V \cap A) \subset V'$.
ii) $\Rightarrow$ i) : Par l'absurde, supposons qu'il existe $V' \in \mathcal{V}(l)$ tel que pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$ il existe $x \in V \cap A$ tel que $f(x) \notin V'$. On prend la base dénombrable de voisinages $\mathcal{BV}(a) = \{B_n = B(a, \frac{1}{n+1}),\ n \in \mathbb{N}\}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ il existe $x_n \in B_n \cap A$ tel que $f(x_n) \notin V'$. Pour tout $V \in \mathcal{V}(a)$, il existe $n_V \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq n_V,\ x_n \in B_n \subset V$. On a donc $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ tandis que $f(x_n)$ ne converge pas vers l.
ii) $\Leftrightarrow$ iii) : La différence entre ii) et iii) est que dans ii) la limite l ne dépend pas du choix de la suite. Il suffit donc de vérifier que les l_x donnés au iii) sont tous identiques. Pour cela prenons deux suites $x^1 = (x^1_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $x^2 = (x^2_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers a dans X et notons l_{x^1} et l_{x^2} les limites des suites images données par hypothèse. On forme alors la suite $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en alternant les termes de x^1 et de x^2 : $x_n = x^2_n$ si n est pair et $x_n = x^1_n$ si n est impair. Cette suite x converge vers a dans X et on peut, par hypothèse, lui associer la limite de la suite image $l_x = \lim_{n \to \infty} f(x_n)$. Comme (X', d) est séparé, cela entraîne $l_{x^2} = l_x = l_{x^1}$. ∎

REMARQUE 1.4.15. Là encore (cf. Remarque 1.4.9) l'implication i)$\Rightarrow$ii) est vraie pour des espaces topologiques généraux $(X, \mathcal{T})$ et $(X, \mathcal{T}')$. En revanche la réciproque demande l'existence d'une base dénombrable de voisinages pour a (vrai si (X, d) est un espace métrique).
La notion de filtre convergent permet de donner une version générale de ce résultat. Cette notion englobe la notion de limite de suite et de limite de fonction en un point.

1.5 Continuité

1.5.1 Continuité en un point

Définition 1.5.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques et soit $a \in X$. On dit qu'une fonction $f \in \mathcal{F}(X; X')$ est continue au point a si l'image réciproque $f^{-1}(V')$ de tout voisinage V' de $f(a)$ est un voisinage de a. Cela s'écrit*

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f(a)),\ f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(a);$$

$$\textit{ou bien}\quad \forall O' \in \mathcal{O}',\quad f(a) \in O', \exists O \in \mathcal{O},\ a \in O \text{ et } f(O) \subset O'.$$

Proposition 1.5.2. *Une application $f : X \to X'$ est continue au point $a \in X$ si et seulement si $f(a)$ est limite de $f(x)$ quand x tend vers a.*

Preuve : Ici on a $A = X$ et la définition de la limite de $f(x)$ quand x tend vers A dit exactement que, pour tout voisinage V' de $f(a)$, $f^{-1}(V')$ contient $V \cap A = V$ qui est un voisinage de a et donc que $f^{-1}(V')$ est un voisinage de a. ■

Proposition 1.5.3. *Si (X, d) et (X', d') sont des espaces métriques, si $a \in X$ et si $f \in \mathcal{F}(X; X')$ les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

i) *f est continue au point a.*

ii) $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in X, (d(x, a) \leq \alpha) \Rightarrow (d'(f(x), f(a)) \leq \varepsilon)$.

iii) *Continuité séquentielle en a : Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X convergeant vers a, la suite image $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.*

Preuve : Déjà faite. Il suffit de traduire la continuité en limite de $f(x)$ quand x tend vers a. ■

REMARQUE 1.5.4. **a)** Là encore l'implication

$$(f \text{ continue en } a) \Rightarrow (f \text{ séquentiellement continue en } a)$$

est toujours vraie. En revanche la réciproque demande l'existence d'une base dénombrable de voisinages de a.

b) La propriété iii) (qui est donc toujours vraie si f est continue en a) a la conséquence suivante : Dans un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ avec $f \in \mathcal{F}(X; X')$, si l est limite de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et si $\underline{f \text{ est continue en } l}$ alors $f(l) = l$. En effet, comme $(X, \mathcal{T})$ est séparé, on écrit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n)$ et $\underline{\text{comme } f \text{ est continue en } l}$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(l).$$

REMARQUE 1.5.5. On peut munir $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ de la topologie suivante : pour $n_0 \in \mathbb{N}$ le singleton $\{n_0\}$ forme une base de voisinages pour n_0 (topologie discrète), pour $+\infty$ on prend la base de voisinages $\mathcal{BV}(+\infty) = \{\{n, n+1, \ldots, +\infty\},\ n \in \mathbb{N}\}$. Avec cette topologie et en posant $f(+\infty) = \lim_{n\to+\infty} x_n$, les suites convergentes d'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ ne sont rien d'autre que les fonctions de $\overline{\mathbb{N}}$ dans X continues en tout point.

1.5.2 Propriétés

Théorème 1.5.6. ***(Transitivité de la continuité)*** *Soit $(X, \mathcal{T})$, $(X', \mathcal{T}')$ et $(X'', \mathcal{T}'')$ trois espaces topologiques. Si la fonction $f : X \to X'$ est continue en $a \in X$ et si la fonction $g : X' \to X''$ est continue en $f(a) \in X'$ alors $g \circ f$ est continue en a.*

Preuve : Soit V'' un voisinage de $g\,[f(a)]$ dans X'', alors comme g est continue en $f(a)$, $g^{-1}(V'')$ est un voisinage de $f(a)$. Mais comme f est continue en a, $(g \circ f)^{-1}(V'') = f^{-1}(g^{-1}(V''))$ est un voisinage de a. ■

Proposition 1.5.7. ***(Rappels sur les fonctions numériques)*** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique, soit $f, g \in \mathcal{F}(X; \mathbb{K})$ avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Si f et g sont continues en $a \in X$ alors $f + g$, λf, fg sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue en a.*

Preuve : On munit $\mathbb{K}^2$ de la norme $\|(x, y)\|_\infty = \max\{|x|, |y|\}$. Il est clair que si f et g sont continues en $a \in X$ alors l'application $f \times g : X \to \mathbb{K}^2$ définie par $(f \times g)(x) = (f(x), g(x))$ et l'application $f \times \lambda : X \to \mathbb{K}^2$ définie par $(f \times \lambda)(x) = (f(x), \lambda)$ sont continues en a. De plus les applications $+ : (x, y) \to x + y$ et $\times : (x, y) \to xy$ sont continues en tout point de $\mathbb{K}^2$ tandis que l'application $/ : (x, y) \to x/y$ est continue en tout point de $\mathbb{K} \times \mathbb{K}^*$. On utilise la transitivité de la continuité pour conclure. ■

REMARQUE 1.5.8. Ainsi toutes les fonctions polynômes sont continues en tout point de $\mathbb{K}$ et toutes les fractions rationnelles définissent des fonctions continues en tout point de leur ensemble de définition.

1.5.3 Continuité globale

Définition 1.5.9. *Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On dit qu'une fonction $f : X \to X'$ est continue sur X si elle est continue en tout point de X. On note $\mathcal{C}^0(X; X')$ (ou $\mathcal{C}^0(X, \mathcal{T}; X', \mathcal{T}')$ s'il est besoin de préciser les topologies) l'ensemble de toutes les fonctions continues de X dans X'.*

Théorème 1.5.10. *Pour deux espaces topologiques $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ et $f \in \mathcal{F}(X; X')$ on équivalence entre :*

a) *f est continue sur X.*

b) *L'image réciproque de tout ouvert de X' est un ouvert de X :*

$$\forall O' \in \mathcal{O}',\ f^{-1}(O') \in \mathcal{O}.$$

c) *L'image réciproque de tout fermé de X' est un fermé de X :*

$$\forall F' \in \mathcal{F}',\ f^{-1}(F') \in \mathcal{F}$$

.

Preuve : a) $\Rightarrow$ b) : Si $O' \in \mathcal{O}'$, alors O' est un voisinage de chacun de ses points. Si f est continue il s'ensuit que $f^{-1}(O')$ est un voisinage de chacun de ses points. C'est un ouvert.
b)$\Rightarrow$ a) : Montrons que pour tout point $x \in X$, $V' \in \mathcal{V}(f(x))$ entraîne $f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(x)$. Si $V' \in \mathcal{V}(f(x))$, il existe $O' \in \mathcal{O}'$ tel que $f(x) \in O' \subset V'$. On a alors $x \in f^{-1}(O') \subset f^{-1}(V')$ et par hypothèse $f^{-1}(O')$ est un ouvert de X. Donc $f^{-1}(V')$ est un voisinage de x.
b)$\Leftrightarrow$ c) : On a les équivalences :

$$\begin{aligned}\big(\forall O' \in \mathcal{O}',\ f^{-1}(O') \in \mathcal{O}\big) &\Leftrightarrow \big(\forall O' \in \mathcal{O}',\ \complement_X f^{-1}(O') \in \mathcal{F}\big)\\ &\Leftrightarrow \big(\forall F' \in \mathcal{F}',\ f^{-1}(F) \in \mathcal{F}\big).\end{aligned}$$

■

REMARQUE 1.5.11. **a)** La continuité de f sur X n'entraîne pas $f(O) \in \mathcal{O}'$ pour $O \in \mathcal{O}$ et $f(F) \in \mathcal{F}'$ pour $F \in \mathcal{F}$. Par exemple la fonction $x \to x^2$ envoie l'ouvert de $\mathbb{R}$ $]-1, 1[$ sur $[0, 1[$ qui n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$; de même la fonction $x \to \arctan x$ envoie le fermé $\mathbb{R}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui est un ouvert de $\mathbb{R}$.

b) Les propriétés de transitivité et des fonctions numériques sont encore vraies pour la continuité globale.

c) Si l'on considère la topologie sur un ensemble comme une structure donnée par exemple par la famille d'ouverts. Le Théorème 1.5.10 dit que les applications continues sont les applications qui par image réciproque envoie la structure de X' dans celle de X. Ainsi les applications continues sont les morphismes associés à la structure "espace topologique" (le changement de sens ne pose pas de problème et est même assez fréquent, on parle de contravariance). La topologie algébrique s'appuie sur ce point de vue.

1.5.4 Homéomorphismes

Définition 1.5.12. *Soit $(X,\mathcal{T})$ et $(X',\mathcal{T}')$ deux espaces topologiques. On appelle homéomorphisme toute bijection f de X sur X' bicontinue, i.e. telle que f et f^{-1} soient continues.*

Si f est un homéomorphisme, l'image réciproque et l'image (puisque $f(O) = (f^{-1})^{-1}(O)$) de tout ouvert (resp. fermé) est un ouvert (resp. fermé). Ainsi un homéomorphisme établit une bijection entre $\mathcal{O}$ et $\mathcal{O}'$ (resp. entre $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$). Les homéomorphismes sont les isomorphismes associés à la structure "espace topologique".

Définition 1.5.13. *Si il existe un homéomorphisme de $(X,\mathcal{T})$ sur $(X',\mathcal{T}')$ on dit que $(X,\mathcal{T})$ et $(X',\mathcal{T}')$ sont homéomorphes.*

Proposition 1.5.14. *Deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sur un même ensemble X sont égales si et seulement si l'application identité $\mathrm{Id} : X \to X$ est un homéomorphisme de $(X,\mathcal{T})$ sur $(X,\mathcal{T}')$.*

Preuve : L'image réciproque Id^{-1} donne une bijection entre les éléments de $\mathcal{O}'$ et les éléments de $\mathcal{O}$. Comme $\mathrm{Id}^{-1}(O') = O'$ cela signifie que les ouverts de $\mathcal{T}'$ sont des ouverts de $\mathcal{T}$ et inversement. Les deux topologies ont les mêmes ouverts, elles sont égales. ■

EXEMPLE 1.5.15. **a)** On prend $X = [0,1[\cup[2,3[$ et on considère l'application $f : X \to [0,2]$ donnée par $f(x) = x$ si $x < 1$ et $f(x) = x-1$ si $x \geq 2$. Cette fonction f est continue bijective mais n'est pas un homéomorphisme de X sur $f(X) = [0,2]$ ($\lim_{x\to 1^-} f^{-1}(x) = 1 \neq f^{-1}(1) = 2$).

b) $\mathbb{R}$ est homéomorphe à tout intervalle ouvert $]a,b[$, $a,b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Il suffit de considérer $f(x) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{\pi}\arctan(x)$. La même fonction définie sur $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ prolongée par $f(-\infty) = a$ et $f(+\infty) = b$ donne un homéomorphisme de $\overline{\mathbb{R}}$ sur $[a,b]$.

c) Un résultat de topologie algébrique qui sort du cadre de ce cours établit que la sphère S^2 n'est homéomorphe à aucune partie du plan. Ceci exprime l'impossibilité de faire une carte plane de la terre sans "tricher".

1.5.5 Uniforme continuité et Lipschitz continuité

Il s'agit de notions purement métriques. Dans ce paragraphe on considère donc des espaces métriques (X,d) et (X',d'). On commence par une remarque en revenant sur la continuité sur les espaces métriques. La continuité globale d'une fonction $f : X \to X'$ s'écrit précisément

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_{x,\varepsilon} > 0,\ \forall y \in X,\ (d(y,x) \leq \alpha_{x,\varepsilon}) \Rightarrow (d'(f(y), f(x)) \leq \varepsilon)\,.$$

Le α dépend non seulement de ε mais du point x ou l'on teste la continuité. La continuité uniforme signifie que l'on peut prendre α indépendant de $x \in X$.

Définition 1.5.16. *On dit que $f \in \mathcal{F}(X; X')$ est uniformément continue si elle vérifie :*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_\varepsilon > 0,\ \forall x, y \in X,\ (d(x,y) \leq \alpha_\varepsilon) \Rightarrow (d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon)\,.$$

Définition 1.5.17. *On dit que $f \in \mathcal{F}(X, X')$ est lipschitzienne de rapport $k \in \mathbb{R}_+$ sur X si :*

$$\forall x, y,\ d'(f(x), f(y)) \leq k d(x,y).$$

On vérifie immédiatement les implications

Proposition 1.5.18.

$$(f \textit{ Lipschitzienne}) \Rightarrow (f \textit{ uniformément continue}) \Rightarrow (f \textit{ continue})\,.$$

D'une certaine façon les applications Lipschitziennes sont les morphismes d'espaces métriques d'où l'intérêt des notions suivantes.

Définition 1.5.19. a) *On dit que f est bilipschitzienne si c'est une bijection telle que f et f^{-1} sont Lipschitziennes.*

b) *On dit que f est une isométrie si pour tout $x, y \in X$ on a $d'(f(x), f(y)) = d(x,y)$. (Une isométrie est toujours injective. Si de plus elle est surjective alors elle est bilipschitzienne avec rapport 1 dans les deux sens.)*

EXEMPLE 1.5.20. **a)** Sur $\mathbb{R}$ l'application $x \to x^2$ n'est pas uniformément continue et n'est pas Lipschitzienne :

$$|x^2 - y^2| = |x+y||x-y| \quad \text{où } |x+y| \text{ est arbitrairement grand.}$$

b) Sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \to \arctan(x)$ est Lipschitzienne de rapport 1 :

$$|\arctan(x) - \arctan(y)| = \frac{1}{1+c^2}|x-y| \leq |x-y|$$

où $c \in [x,y]$ est donné par le théorème des accroissements finis. D'une façon générale une fonction continue dérivable de dérivée uniformément bornée est Lipschitzienne.

c) Sur un espace métrique (X,d). Pour tout $x_0 \in X$ la fonction $d(x_0, .) : x \in X \to d(x_0, x) \in \mathbb{R}$ est Lipschitzienne de rapport 1 puisque

$$\forall x, y \in X,\ |d(x_0, y) - d(x_0, x)| \leq d(x,y).$$

De plus si on met sur $X \times X$ la distance

$$d_\infty\left(((x_1,x_2),(y_1,y_2))\right) = \max\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2)\}$$

alors la distance $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ est Lipschitzienne de rapport 2. En effet pour tout $(x_1,x_2) \in X \times X$ et tout $(y_1,y_2) \in X \times X$ on a

$$\begin{aligned} |d(x_1,x_2) - d(y_1,y_2)| &\leq |d(x_1,x_2) - d(x_1,y_2)| + |d(x_1,y_2) - d(y_1,y_2)| \\ &\leq d(x_2,y_2) + d(x_1,y_1) \leq 2d_\infty\left((x_1,x_2),(y_1,y_2)\right). \end{aligned}$$

1.5.6 Prolongement par continuité

Nous allons d'abord donner un résultat d'unicité qui est valable dans une situation assez générale.

Proposition 1.5.21. *Soit $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et soit $(X',\mathcal{T}')$ un espace topologique séparé. Soit A une partie de X munie de la topologie induite et f une fonction continue de A dans X'. Alors il existe au plus une fonction $\overline{f} \in \mathcal{C}^0(\overline{A};X')$, $\overline{A}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}$, dont la restriction à A vaut f. De plus une condition sur f nécessaire à l'existence de $\overline{f}$ est que pour tout $a \in \overline{A} \setminus A$ la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ existe.*

Preuve : Supposons qu'il existe deux fonctions f_1 et f_2 continues de $\overline{A}$ dans X'. Alors, d'après la Proposition 1.5.2, pour tout $a \in \overline{A}$ on doit avoir $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in \overline{A}}} f_i(x) = f_i(a)$. Cela se traduit en appliquant directement la Définition 1.4.10 par

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f_i(a)),\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ f_i(V \cap \overline{A}) \subset V'.$$

Comme on veut $f_i\Big|_A = f$, cela donne pour $a \in \overline{A}$

$$\forall V' \in \mathcal{V}(f_i(a)),\ \exists V \in \mathcal{V}(a),\ f(V \cap A) \subset V'.$$

Autrement dit, on doit avoir $f_i(a) = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ pour $i = 1, 2$ et pour tout $a \in \overline{A}$. Comme $(X',\mathcal{T}')$ est séparé cela entraîne $f_1(a) = f_2(a)$ pour tout $a \in \overline{A}$. Il y a donc au plus une fonction $\overline{f}$ continue sur $\overline{A}$ qui prolonge f. En suivant le raisonnement ci-dessus, on voit qu'il est nécessaire que f soit continue sur A (ce qui est supposé) et que pour tout $a \in \overline{A} \setminus A$ la limite $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ existe. ■

EXEMPLE 1.5.22. Si on prend une fonction continue $f :]0,1[\to \mathbb{R}$ telle que les limites

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = f_0 \quad \text{et} \lim_{x\to 1^-} f(x) = f_1$$

existent dans $\mathbb{R}$, alors il n'y a qu'une façon d'obtenir une fonction $\overline{f}$ continue sur $[0,1]$ dont la restriction à $]0,1[$ est f : on pose $\overline{f}(0) = f_0$ et $\overline{f}(1) = f_1$. Il se trouve que $\overline{f}$ ainsi définie est bien continue.

Définition 1.5.23. *Avec les hypothèses et notations de la Proposition 1.5.21, si il existe une application $\overline{f} \in \mathcal{C}^0(\overline{A}, X')$ dont la restriction à A est f, on appelle $\overline{f}$ le prolongement par continuité de f à $\overline{A}$.*

La question de l'existence du prolongement par continuité est un petit peu plus délicate. Dans l'Exemple 1.5.22 cela ne pose pas vraiment de difficulté. Si on considère la situation en dimension 2 où A est le disque unité ouvert, on voit qu'il faut vérifier que la fonction $\overline{f}$, définie sur le disque unité fermé par passage à la limite, est bien continue sur le cercle unité. Toutefois, on peut montrer sous des hypothèses assez générales que la condition nécessaire de la Proposition 1.5.21 est en fait suffisante. Par souci de simplicité, on se limitera au cas où l'espace d'arrivée est métrique (voir la remarque ci-dessous pour une généralisation possible).

Proposition 1.5.24. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit (X', d') un espace métrique. Soit A une partie de X et f une fonction continue de A dans X' telle que pour tout $a \in \overline{A} \setminus A$ la limite $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ existe. Alors f admet un unique prolongement par continuité à $\overline{A}$ qui est donné par*

$$\forall a \in \overline{A}, \ \overline{f}(a) = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x).$$

Preuve : Par hypothèse la fonction $\overline{f}$ est bien définie sur $\overline{A}$. Il reste à vérifier qu'elle est continue en tout point de $\overline{A}$.

On remarque dans un premier temps l'inclusion $\overline{f}(O \cap \overline{A}) \subset \overline{f(O \cap A)}$ valable pour tout ouvert O de X. En effet, tout élément l de $\overline{f}(O \cap \overline{A})$ peut par définition de $\overline{f}$ s'écrire comme une limite $l = \lim_{\substack{x \to a \\ x \in O \cap A}} f(x)$. La Proposition 1.4.12 nous dit que l appartient à $\overline{f(O \cap A)}$.

Soit $a \in \overline{A}$, montrons que $\overline{f}$ est continue au point a. Soit $\varepsilon > 0$, on sait par définition de $\overline{f}$ qu'il existe un voisinage V de a tel que $f(V \cap A) \subset B_f(\overline{f}(a), \varepsilon)$ (On a pris $V' = B_f(\overline{f}(a), \varepsilon)$). Par définition des voisinages, il existe un ouvert O de X tel que

$$a \in O \quad \text{et } f(O \cap A) \subset B_f(\overline{f}(a), \varepsilon).$$

Comme la boule $B_f(\overline{f}(a), \varepsilon)$ est un fermé de X' on en déduit, pour un tel ouvert O, l'inclusion $\overline{f(O \cap A)} \subset B_f(\overline{f}(a), \varepsilon)$ et en utilisant la remarque initiale $\overline{f}(O \cap \overline{A}) \subset B_f(\overline{f}(a), \varepsilon)$. Ainsi pour tout $\varepsilon > O$, on a trouvé un voisinage $O \cap \overline{A}$ de a dans $\overline{A}$ tel que $\overline{f}(O \cap \overline{A}) \subset B_f(\overline{f}(a), \varepsilon)$. Comme l'ensemble $\{B_f(\overline{f}(a), \varepsilon), \ \varepsilon > 0\}$ forme une base de voisinages de $\overline{f}(a)$ dans X' cela entraîne la continuité de $\overline{f}$ en a. ■

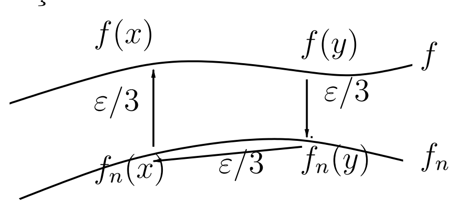
REMARQUE 1.5.25. Dans cette démonstration, on utilise le caractère localement fermé des espaces métriques. Tout point d'un espace métrique admet une base de voisinages fermés (les boules fermés de rayon arbitrairement petit). Cela donne l'inclusion de $\overline{f(O \cap A)}$ un voisinage de $\overline{f}(a)$ à partir de celle de $f(O \cap A)$. Le résultat est donc encore vrai si on remplace l'hypothèse "$(X'd')$ espace métrique" par l'hypothèse "$(X', \mathcal{T}')$ espace topologique séparé localement fermé". Il y a des topologies séparées qui ne vérifient pas cette propriété (cf. Exercice 42).

1.5.7 Limite uniforme de fonctions continues

On a déjà vu que si (X', d') est un espace métrique et X est un ensemble, alors l'ensemble des fonctions bornées $\mathcal{F}_b(X; X')$ muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est un espace métrique. Si on muni X d'une topologie, on peut alors considérer le sous-ensemble des fonctions continues bornées, $\mathcal{C}_b^0(X; X') = \mathcal{F}_b(X; X') \cap \mathcal{C}^0(X; X')$. Le résultat suivant dit que $\mathcal{C}_b^0(X; X')$ est un fermé de l'espace métrique $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$ (cf Corollaire 1.3.5 et Proposition 1.4.8).

Théorème 1.5.26. ***Une limite uniforme d'une suite de fonctions continues est continue :*** *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et soit (X', d') un espace métrique. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}_b^0(X; X')$ qui admet une limite $f \in \mathcal{F}_b(X, X')$ pour la distance de la convergence uniforme d_∞ alors $f \in \mathcal{C}_b^0(X; X')$.*

Preuve : La démonstration, assez simple, repose sur un argument en $\frac{\varepsilon}{3}$ que l'on peut illustrer de la façon suivante :



Soit $x \in X$, vérifions que la limite f est continue au point x. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe un entier N_ε tel que : $\forall n \geq N_\varepsilon,\ d_\infty(f_n, f) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On prend $n = N_\varepsilon$ et comme f_{N_ε} est continue au point $x \in X$, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que : $\forall y \in V,\ d'\left(f_{N_\varepsilon}(y), f_{N_\varepsilon}(x)\right) \leq \frac{\varepsilon}{3}$. On a alors

$$\begin{aligned}\forall y \in V,\ d'\left(f(y), f(x)\right) &\leq d'\left(f(y), f_{N_\varepsilon(y)}\right) + d'\left(f_{N_\varepsilon}(y), f_{N_\varepsilon}(x)\right) + d'\left(f(x), f_{N_\varepsilon(x)}\right)\\ &\leq 2d_\infty(f; f_{N_\varepsilon}) + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon,\end{aligned}$$

et pour tout $\varepsilon > 0$ on sait trouver un tel voisinage V de x. La limite f est continue en tout point x de X. ∎

REMARQUE 1.5.27. On verra au Chapitre 3 que si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact on a $\mathcal{C}^0(X; X') = \mathcal{C}_b^0(X; X')$. Par exemple pour $X = [0, 1]$, il est inutile de préciser que l'on prend des fonctions bornées, les fonctions continues sur $[0, 1]$ le sont toujours.

1.6 Comparaison de topologies, comparaison de distances

1.6.1 Topologies plus ou moins fines

On sait que deux topologies $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ sur un même ensemble sont identiques si elles ont les mêmes ouverts. En fait, on peut mettre une relation d'ordre sur les topologies définies sur un ensemble fixé.

Définition 1.6.1. *Sur un ensemble X, on dit que la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}'$ si $\mathcal{T}$ a plus d'ouverts que $\mathcal{T}'$, i.e. $\mathcal{O}' \subset \mathcal{O}$.*

EXEMPLE 1.6.2. **a)** La topologie grossière est la moins fine de toutes les topologies, $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$. La topologie discrète est la plus fine $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$.

b) Si A est une partie de l'ensemble X muni de la topologie $\mathcal{T}$. La topologie induite $\mathcal{T}_A$ sur A par $\mathcal{T}$ est la topologie la moins fine qui rendent l'injection $i : A \to X$ continue. En effet pour que l'injection soit continue, il faut que pour tout $O \in \mathcal{O}$ l'image réciproque $O \cap A = i^{-1}(O)$ soit un ouvert. Autrement dit la topologie sur A doit être plus fine que la topologie induite.

La Proposition 1.5.14 exprimait l'égalité de deux topologies en terme de continuité. On peut faire la même chose pour la comparaison en général.

Proposition 1.6.3. *Sur un ensemble X, la topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie $\mathcal{T}'$ si et seulement si l'application identité $\mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue.*

Preuve : On a tout simplement l'équivalence

$$(\forall O' \in \mathcal{O}',\ O' \in \mathcal{O}) \Leftrightarrow \left(\forall O' \in \mathcal{O}',\ \mathrm{Id}^{-1}(O') \in \mathcal{O}\right).$$

■

Corollaire 1.6.4. *Si $\mathcal{T}$ est plus fine que $\mathcal{T}'$ et si $\mathcal{T}'$ est plus fine que $\mathcal{T}$ alors $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.*

1.6.2 Equivalences de distances

Il y a au moins 2 façons de comparer deux distances définies sur un même ensemble X. On peut se contenter de comparer les topologies associées ou faire une comparaison plus quantitative.

Définition 1.6.5. *On dit que deux distances d et d' définies sur un ensemble X sont topologiquement équivalentes si elles définissent la même topologie.*

Proposition 1.6.6. *Soit d et d' deux distances définies sur un ensemble X.*

a) *La topologie de (X,d) est plus fine que celle de (X,d') si et seulement si, pour tout $x \in X$, $d'(x,y)$ tend vers 0 quand $d(x,y)$ tend vers 0 :*

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha_{\varepsilon,x} > 0,\ \forall y \in X,\ (d(x,y) \leq \alpha_{\varepsilon,x}) \Rightarrow (d'(x,y) \leq \varepsilon)\,.$$

b) *Les distances d et d' sont topologiquement équivalentes si et seulement si, pour tout $x \in X$, $d'(x,y)$ tend vers 0 quand $d(x,y)$ et inversement $d(x,y)$ tend vers 0 quand $d'(x,y)$ tend vers 0.*

Preuve : a) On écrit tout simplement la continuité en tout point de l'application identité $\mathrm{Id} : (X,d) \to (X,d')$.
b) On utilise a) et le Corollaire 1.6.4. ■

Définition 1.6.7. *On dit que deux distances d et d' sur un ensemble X sont métriquement équivalentes si il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que*

$$\forall x, y \in X,\ \alpha d(x,y) \leq d'(x,y) \leq \beta d(x,y).$$

REMARQUE 1.6.8. **a)** On écrit parfois l'équivalence des distances d et d' avec une seule constante $C > 0$ (ici $C = \max\{\beta, \alpha^{-1}\}$) :

$$\forall x, y \in X,\ C^{-1} d(x,y) \leq d'(x,y) \leq C d(x,y).$$

b) Pour les normes l'équivalence métrique s'écrit

$$\forall x \in X,\ \alpha \left\|x\right\| \leq \left\|x\right\|' \leq \beta \left\|x\right\|.$$

Proposition 1.6.9. *Soit d et d' deux distances définies sur X.*

a) *Les distances d et d' sont métriquement équivalentes si et seulement si l'application identité $\mathrm{Id} : (X,d) \to (X,d')$ est bilipschitzienne.*

b) *Si d et d' sont métriquement équivalentes alors elles sont topologiquement équivalentes.*

Preuve : a) est une réécriture de la définition et b) est une conséquence directe de la Proposition 1.5.18. ■

EXEMPLE 1.6.10. **a)** Sur $\mathbb{R}^n$ les normes $\| \ \|_1$, $\| \ \|_\infty$ et $\| \ \|_2$ sont métriquement équivalentes. On verra même au Chapitre 4 que toutes les normes sont métriquement équivalentes en dimension finie et que plus généralement l'équivalence topologique de normes entraîne l'équivalence métrique.

b) Sur $\mathbb{R}_+$ les distances $d(x, y) = |x - y|$ et $d'(x, y) = |x^2 - y^2|$ sont topologiquement équivalentes mais pas métriquement équivalentes.

REMARQUE 1.6.11. L'équivalence topologique est une notion topologique. Des distances topologiquement équivalentes conduisent aux mêmes fonctions continues et aux mêmes suites convergentes. L'équivalence métrique est plus précise et compare vraiment les distances. Ainsi des distances métriquement équivalentes conduisent en plus au mêmes fonctions uniformément continues, aux mêmes fonctions Lipschitziennes et aux mêmes suites de Cauchy (cf. Chapitre 5).

1.7 Topologie produit

La définition qui suit peut sembler un peu abstraite et peu naturelle. En fait, c'est exactement la bonne définition pour que toutes les propriétés de continuité relativement intuitives pour des produits finis soient encore vraies pour des produits quelconques. De plus cette topologie a une interprétation très élémentaire quand on travaille avec des espaces de fonctions.

1.7.1 Définition

On considère une famille $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ d'espaces topologiques où I est un ensemble quelconque (non nécessairement fini, non nécessairement dénombrable).

Définition 1.7.1. *Pour un sous-ensemble $\{i_1, \ldots, i_n\}$ de I fini ($n \in \mathbb{N}^*$) et pour une suite d'ouverts ω_{i_k} de X_{i_k}, $k \in \{1, \ldots, n\}$, on appelle cylindre ouvert de base $(\omega_{i_k})_{k\in\{1,\ldots,n\}}$ le sous-ensemble de $\prod_{i\in I} X_i$ donné par*

$$\mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}) = \prod_{i\in I} Y_i, \quad \textit{avec} \quad Y_i = \begin{cases} \omega_i \ \textit{si } i \in \{i_1, \ldots, i_n\}, \\ X_i \ \textit{si } i \in I \setminus \{i_1, \ldots, i_n\}. \end{cases}$$

Définition 1.7.2. *On appelle topologie produit sur $\prod_{i\in I} X_i$, la topologie donnée par la base d'ouverts faite de tous les cylindres ouverts*

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}),\ n \in \mathbb{N}^*;\ i_k \in I,\ \omega_{i_k} \in \mathcal{O}_{i_k},\ \textit{pour } k = 1 \ldots n \right\}.$$

On note $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ cette topologie.

REMARQUE 1.7.3. **a)** Dans la définition ci-dessus de la base $\mathcal{B}$, on peut se limiter à $n = 1$ puisque pour un $n \in \mathbb{N}^*$ le cylindre $\mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n})$ peut s'écrire comme l'intersection finie $\mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_{i_1}) \cap \ldots \cap \mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_{i_n})$.

b) On peut définir une autre topologie sur $\prod_{i\in I} X_i$ appelée parfois topologie des boîtes. Elle est donnée par la base d'ouverts

$$\mathcal{B}' = \left\{ \prod_{i\in I} \omega_i,\ \omega_i \in \mathcal{O}_i \right\}.$$

c) Si I est fini, la topologie produit et la topologie des boîtes coïncident. Ce n'est plus le cas si I est infini.

EXEMPLE 1.7.4. Compte tenu de la remarque c) ci-dessus la topologie produit sur $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ est la topologie des boîtes ouvertes. Elle est associée à la norme $\|x\|_\infty = \max_{i=1\ldots n} |x_i|$ (cf. la Proposition 1.7.13 ci-dessous pour un résultat plus général). Mais comme les normes $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$ sont métriquement équivalentes à $\| \ \|_\infty$, elles correspondent aussi à la topologie produit. On verra que toutes les normes sur un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ sont équivalentes. Ainsi n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$ donne la topologie produit. Il en est de même sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^{n^2}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \sim \mathbb{C}^{n^2}$.

Proposition 1.7.5. *Si pour tout $i \in I$, $(A_i, \mathcal{T}_{A_i})$ est un sous-espace topologique de $(X_i, \mathcal{T}_i)$, alors la topologie induite par $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ sur $\prod_{i\in I} A_i \subset \prod_{i\in I} X_i$ est la topologie produit $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_{A_i}$.*

Preuve : Il suffit d'identifier les bases d'ouverts et pour cela de remarquer

$$\mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n}) \cap \left(\prod_{i\in I} A_i \right) = \mathrm{Cyl}_{A_i}(\omega_{i_1} \cap A_{i_1}, \ldots, \omega_{i_n} \cap A_{i_n}).$$

Et on sait que les ouverts de $\mathcal{T}_{A_i}$ sont les les traces $\omega_i \cap A_i$ des ouverts de $\mathcal{T}_i$. ∎

1.7.2 Topologie produit et continuité

On commence par une caractérisation topologique qui montre que la topologie des cylindres ouverts n'est pas prise au hasard. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour $i_0 \in I$, on note $p_{i_0} : \prod_{i\in I} X_i \to X_{i_0}$ la projection sur X_{i_0} donnée par $p_{i_0}(x) = x_{i_0}$ pour $x = (x_i)_{i\in I}$.

Proposition 1.7.6. *La topologie produit $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$ est la topologie la moins fine qui rend toutes les projections $p_j : \prod_{i\in I} X_i \to X_j$ continues.*

Preuve : On note que pour tout $j \in I$ et tout ouvert $\omega_j \in \mathcal{O}_j$ de X_j, $p_j^{-1}(\omega_j)$ est un cylindre ouvert et donc un ouvert de $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$. Ainsi toutes les projections p_j sont continues si $\prod_{i\in I} X_i$ est muni de la topologie produit $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$.
Vérifions que toutes les topologies vérifiant cette propriété sont plus fines. Soit $\mathcal{T}$ une topologie sur $\prod_{i\in I} X_i$ telle que toutes les projections sont continues. Alors pour tout ouvert ω_{i_0} de X_{i_0}, l'image réciproque $p_{i_0}^{-1}(\omega_{i_0})$ est un ouvert de

$\mathcal{T}$. Cette image réciproque est le cylindre ouvert $\mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_{i_0})$. Mais les cylindres $\mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_j)$ pour $j \in I$ forment une base d'ouverts de la topologie produit. Ainsi tous les ouverts de la topologie produit sont des ouverts de $\mathcal{T}$. La topologie $\mathcal{T}$ est plus fine que la topologie $\prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$. ■

On peut caractériser simplement la continuité d'une fonction **à valeurs dans** un produit.

Proposition 1.7.7. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique et un produit $X' = \prod_{i\in I} X'_i$ muni de la topologie produit $\mathcal{T}' = \prod_{i\in I} X'_i$. Pour $i \in I$, on note p'_i la projection $X' \to X'_i$. Pour qu'une application $f : X \to X' = \prod_{i\in I} X'_i$ soit continue il faut et il suffit que toutes les composantes $p'_i \circ f : X \to X'_i$ soient continues.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p'_i \circ f"'] & X' = \prod_{i\in I} X'_i \arrow[d, "p'_i"] \\ & X'_i \end{tikzcd}$$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ C'est une conséquence de la proposition précédente et de la transitivité de la continuité.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit une application $f : X \to X'$ dont toutes les composantes sont continues. Soit $x \in X$ et soit V' un voisinage de $f(x)$ dans X'. Par définition de la topologie produit (et des voisinages) il existe un cylindre ouvert $O' = \mathrm{Cyl}_{X'_i}(\omega'_{i_1}, \ldots, \omega'_{i_n})$ tel que $f(x) \in O' \subset V'$. On a $O' = \cap_{k=1}^n (p'_{i_k})^{-1}(\omega'_{i_k})$. On en déduit

$$f^{-1}(O') = f^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{n} (p'_{i_k})^{-1}(\omega'_{i_k})\right) = \bigcap_{k=1}^{n} (p'_{i_k} \circ f)^{-1}(\omega'_{i_k})$$

et la continuité des composantes $p'_{i_k} \circ f$ impose que $f^{-1}(O')$ est un ouvert de X contenant x. Ainsi $f^{-1}(V') \supset f^{-1}(O')$ est un voisinage de x. ■

EXEMPLE 1.7.8. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ le produit des matrices définit une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. En effet pour $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ les composantes du produit AB s'écrivent $\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$. Il s'agit de sommes et de produits de fonctions continues puisque les composantes a_{ik} et b_{jk} dépendent continûment de (A, B). Toutes les composantes sont continues , donc l'application $(A, B) \to AB$ est continue.

Compte tenu de la Remarque 1.5.5, on déduit de la proposition précédente la caractérisation de la convergence d'une suite dans un produit.

Corollaire 1.7.9. *Une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans espace topologique produit $(X, \mathcal{T})$, $X = \prod_{i\in I} X_i$ et $\mathcal{T} = \prod_{i\in I} \mathcal{T}_i$, a pour limite $x \in X$ si et seulement si toutes ses composantes $(x_i^n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont pour limite $x_i \in X_i$ pour la topologie $\mathcal{T}_i$.*

Preuve : On applique la Proposition 1.7.7 ci-dessus en remplaçant X par $\overline{\mathbb{N}}$ et $\prod_{i\in I} X'_i$ par $\prod_{i\in I} X_i$. ■

Le résultat suivant donne une relation entre la continuité d'une fonction définie **sur** un produit et la continuité des applications partielles.

Définition 1.7.10. *Soit $X = \prod_{i\in I} X_i$ un produit d'ensembles et X' un ensemble et soit $f \in \mathcal{F}(X;X')$. Pour $a = (a_i)_{\in I}$ et $J \subset I$, on note f_{a_J} l'application partielle définie par*

$$f_{a_J} \quad : \quad \begin{array}{l} \prod_{i\in I\setminus J} X_i \to X' \\ x = (x_i)_{i\in I\setminus J} \to f_{a_J}(x) = f(y) \qquad \textit{avec } y_i = \begin{cases} x_i \ \textit{si } i \notin J \\ a_i \ \textit{si } i \in J. \end{cases} \end{array}$$

Proposition 1.7.11. *On munit $X = \prod_{i\in I} X_i$ de la topologie produit et soit $(X', \mathcal{T}')$ un espace topologique. Si l'application $f : X = \prod_{i\in I} X_i \to X'$ est continue au point $a = (a_i)_{i\in I} \in X$ alors pour tout $J \subset I$ l'application partielle f_{a_J} est continue au point $(a_i)_{i\in I\setminus J}$.*

Preuve : Pour $i \in I$, on pose $Y_i = X_i$ si $i \notin J$ et $Y_i = \{a_i\}$ si $i \in J$. Alors l'application

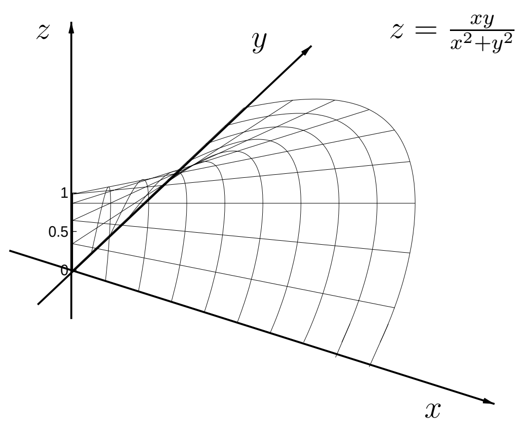
$$\Phi \quad : \quad \begin{array}{l} \prod_{i\in I\setminus J} X_i \to \prod_{i\in I} Y_i \\ x = (x_i)_{i\in I\setminus J} \to y = (y_i)_{i\in I} \qquad \text{avec } y_i = \begin{cases} x_i \text{ si } i \notin J \\ a_i \text{ si } i \in J \end{cases} \end{array}$$

est continue et on a $f_{a_J} = f \circ \Phi$. ■

REMARQUE 1.7.12. La réciproque est fausse. L'exemple type est le cas de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$

Les application partielles $f(0,.)$ et $f(.,0)$ sont les fonctions nulles et sont donc continues. En revanche pour $y = \alpha x$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$ et $x \neq 0$, on a $f(x,\alpha x) = \frac{\alpha}{1+\alpha^2}$ qui ne tend pas vers 0 quand x tend vers 0. La fonction f n'est pas continue en 0.



Représentation dans le 1$^{\text{er}}$ cadran ($x > 0$, $y > 0$) du graphe de la fonction f.

1.7.3 Produit d'espaces métriques

On sait définir la topologie produit sur un produit d'espaces métriques. On peut se demander si cette topologie est métrisable. Cela dépend du cardinal de l'ensemble d'indices. Nous séparons ci-dessous les deux cas où cela est vrai (la distance change).

Proposition 1.7.13. *La topologie produit d'un produit fini d'espaces métriques est métrisable.*

Preuve : Si $(X_k, \delta_k)_{k\in\{1,\dots,n\}}$ est un produit fini d'espaces métriques, alors la topologie produit, $\mathcal{T}$, sur $X = \prod_{k=1}^n X_k$ est celle donnée par la distance

$$d_\infty(x,y) = \max_{k\in\{1,\dots,n\}} \delta_k(x_k, y_k), \quad x = (x_k)_{k\in\{1,\dots,n\}},\ y = (y_k)_{k\in\{1,\dots,n\}} \in X.$$

En effet, pour tout $l \in \{1,\dots,n\}$, la projection $p_l : (X, d_\infty) \to X_l$ est lipschitzienne de rapport 1, puisque $\delta_l(x_l, y_l) \leq d_\infty(x,y)$, donc continue. Ainsi toutes les composantes de l'application $\mathrm{Id} : (X, d_\infty) \to (X, \mathcal{T})$ sont continues et la Proposition 1.7.7 nous dit alors que cette application est continue.

Il reste à vérifier que $\mathrm{Id} : (X, \mathcal{T}) \to (X, d_\infty)$ est continue, ou encore que la topologie (X, d_∞) est moins fine que la topologie produit. Il suffit de s'assurer que toute boule ouverte de (X, d_∞) est un ouvert de $\mathcal{T}$. Cela est immédiat puisque une boule ouverte pour la distance d_∞ est un cylindre ouvert. ■

REMARQUE 1.7.14. De façon plus rapide, on peut dire que la topologie produit est dans le cas fini la topologie des boîtes qui est associée à la distance d_∞. La démonstration en deux étapes se généralise au cas dénombrable.

Proposition 1.7.15. *La topologie produit d'un produit dénombrable d'espaces métriques est métrisable.*

Preuve : Pour une famille dénombrable d'espaces métriques, $(X_k, \delta_k)_{k\in\mathbb{N}}$, on met sur le produit $X = \prod_{k\in\mathbb{N}} X_k$ la distance

$$d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \frac{\delta_k(x_k, y_k)}{1 + \delta_k(x_k, y_k)}, \quad x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}}, y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X.$$

On vérifie avec la même démarche que précédemment que cette distance donne la topologie produit (la dernière partie est un peu plus délicate). Les détails sont laissés au lecteur (cf. Exercice 29). ■

REMARQUE 1.7.16. En utilisant le Corollaire 1.7.9, on voit qu'il n'est pas possible de prendre la distance $d_\infty(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \delta_k(x_k, y_k)$. En effet si on considère dans $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ la suite d'éléments $(e^n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $e_k^n = \delta_{nk}$ elle converge vers la suite nulle pour la topologie produit. En effet pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite composante $(e_k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers (et même stationne à) 0. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $d_\infty(0, e^n) = 1$, la topologie produit ne peut être associée à cette distance.

1.7.4 Topologie produit et convergence simple

Si X est un ensemble et $(Y, \mathcal{T})$ est un espace topologique, l'ensemble $\mathcal{F}(X;Y)$ des applications de X dans Y n'est rien d'autre que Y^X. On peut donc se demander ce qu'est la topologie produit sur $\mathcal{F}(X;Y)$. Les composantes $f \in \mathcal{F}(X;Y) = Y^X$ sont tout simplement les valeurs $f(x)$, $x \in Y$. Avec le Corollaire 1.7.9 la convergence d'une suite pour cette topologie n'est rien d'autre que la convergence simple des fonctions : Une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X dans Y converge simplement vers $f \in \mathcal{F}(X;Y)$ si pour tout $x \in Y$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ admet $f(x)$ pour limite dans $(Y, \mathcal{T})$.

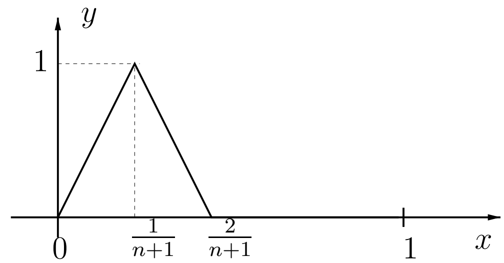
On peut comprendre cette interprétation de la topologie produit sur Y^X en considérant une base de voisinages d'un élément (une fonction) f de Y^X faite de cylindres ouverts. Par exemple pour $Y = \mathbb{R}$, on a la base de voisinages autour de $f \in \mathbb{R}^X$

$$\mathcal{BV}(f) = \{V(f; \varepsilon, n, x_1, \ldots, x_n),\ \varepsilon > 0,\ n \in \mathbb{N}^*,\ x_1, \ldots, x_n \in X\}$$

avec $$V(f; \varepsilon, n, x_1, \ldots, x_n) = \left\{g \in Y^X, |g(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon,\ \forall i \in \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

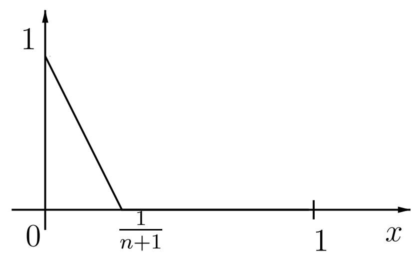
Si (Y, d) est un espace métrique on peut considérer sur $\mathcal{F}_b(X;Y) \subset Y^X$ les deux topologies : convergence uniforme, convergence simple. La première est une topologie métrique tandis que la deuxième est induite par la topologie produit et n'est pas métrisable en général (cf. Paragraphe 1.7.3 et Exercice 86). Il est clair que la convergence uniforme entraîne la convergence simple et cela s'exprime de façon plus générale en disant que la topologie de la convergence uniforme est plus fine que la topologie produit (Les projections sont continues de $(\mathcal{F}_b(X;Y), d_\infty)$, cf. Proposition 1.7.6). Elle est en général strictement plus fine.

EXEMPLE 1.7.17. L'exemple donné dans la Remarque 1.7.16 est un cas de suite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ convergeant simplement vers 0 mais pas uniformément. Avec le même genre d'idée on peut considérer des “bosses glissantes” :
- Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$: On se donne une fonction $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est nulle en dehors d'une partie bornée de $\mathbb{R}$, alors la suite donnée par $f_n(x) = f_0(x - n)$ converge simplement vers 0 mais pas uniformément si $f_0 \neq 0$.
- Dans $\mathbb{R}^{[0,1]}$: On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{F}([0,1]; \mathbb{R})$ donnée par



Graphe de la fonction f_n, $n \in \mathbb{N}$.

Enfin sur $[0,1]$, on peut considérer un dernier exemple qui montre que l'hypothèse d'uniforme convergence dans le Théorème 1.5.26 joue son rôle.



Graphe d'une fonction g_n, $n \in \mathbb{N}$.

La suite de fonctions continues $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g qui vaut 1 en 0 et 0 sur $]0,1]$ et qui n'est pas continue.

1.8 Topologie quotient

Pour un ensemble X muni d'une relation d'équivalence $\mathcal{R}$, l'espace quotient $X/\mathcal{R}$ est l'ensemble des classes d'équivalences de $\mathcal{R}$ et il y a une projection naturelle $\pi_{\mathcal{R}} : X \to X/\mathcal{R}$ qui a un élément $x \in X$ associe sa classe d'équivalence $\widehat{\dot{x}} \in X/\mathcal{R}$. Etant donné une topologie $\mathcal{T}$ sur X, quelle topologie naturelle $\mathcal{T}_{\mathcal{R}}$ peut-on mettre sur $X/\mathcal{R}$? On souhaite en particulier que la projection $\pi_{\mathcal{R}}$ soit continue et donc que pour un ouvert O' de cette topologie $\pi_{\mathcal{R}}^{-1}(O_{\mathcal{R}})$ soit un ouvert de $\mathcal{T}$. Cela suffit pour définir une topologie puisque l'image réciproque agit bien sur les opérations ensemblistes.

Définition 1.8.1. *Soi $(X,\mathcal{T})$ un espace topologique et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. On appelle topologie quotient sur $X/\mathcal{R}$ celle donnée par la famille d'ouverts*

$$\mathcal{O}_{\mathcal{R}} = \left\{O_{\mathcal{R}} \in \mathcal{P}(X/\mathcal{R}), \pi_{\mathcal{R}}^{-1}(O_{\mathcal{R}}) \in \mathcal{O}\right\}.$$

On dit que $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_{\mathcal{R}})$ est un quotient topologique de $(X,\mathcal{T})$.

EXEMPLE 1.8.2. Avec les topologies usuelles, le cercle S^1 est le quotient topologique de la droite réelle par la relation $(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (x - y \in 2\pi\mathbb{Z})$. (Pour d'autres exemples voir Exercice 40)).

Par construction on a la

Proposition 1.8.3. *La topologie quotient $\mathcal{T}_R$ est la topologie la plus fine qui rend la projection $\pi_\mathcal{R} : X \to X/\mathcal{R}$ continue.*

Comme pour le produit (en inversant le sens), on a une caractérisation de la continuité des fonctions continues **sur**0 un espace quotient.

Proposition 1.8.4. *Avec les notations ci-dessus, une application $g : (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_R) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si $g \circ \pi_R$ est continue de $(X, \mathcal{T})$ dans $(X', \mathcal{T}')$.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_\mathcal{R}"'] & X' \\ X/\mathcal{R} \arrow[ur, "g \circ \pi_\mathcal{R}"'] & \end{tikzcd}$$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$: C'est la transitivité de la continuité.
$\boxed{\Leftarrow}$: Supposons $g \circ \pi_R$ continue. Pour un ouvert $O' \in \mathcal{O}'$, l'image réciproque $\pi_R^{-1}\left[g^{-1}(O')\right] = \left[g \circ \pi_R\right]^{-1}(O')$ est un ouvert de $(X, \mathcal{T})$. Par définition des ouverts de $(X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_\mathcal{R})$, $g^{-1}(O')$ est un ouvert et ce pour tout $O' \in \mathcal{O}'$. Donc g est continue. ■

A une application $f : X \to X'$, on peut associer la relation d'équivalence sur X, $(x\mathcal{R}_f y) \Leftrightarrow (f(x) = f(y))$. On note alors X/f l'espace quotient, π_f la projection associée et $\mathcal{T}_f$ la topologie quotient. On rappelle la décomposition canonique $f = \dot{\widehat{f}} \circ \pi_f$ où $\dot{\widehat{f}} : X/f \to X'$ est donnée par $\dot{\widehat{f}}(\dot{\widehat{x}}) = f(x)$. La proposition précédente donne tout de suite le

Corollaire 1.8.5. *L'application $f : (X, \mathcal{T}) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue si et seulement si $\dot{\widehat{f}} : (X/f, \mathcal{T}_f) \to (X', \mathcal{T}')$ est continue.*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_f"'] & X' \\ X/f \arrow[ur, "\dot{\widehat{f}}"'] & \end{tikzcd}$$

EXEMPLE 1.8.6. Dans le cadre de l'Exemple 1.8.2, ce corollaire nous dit que l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans X' s'identifie avec celui des fonctions continues du cercle S^1 dans X'.

Le résultats suivant montre qu'il faut des hypothèses liant la topologie de l'ensemble de départ $\mathcal{T}$ et la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ pour avoir de bonnes propriétés sur la topologie quotient.

Proposition 1.8.7. *Pour que la topologie quotient $\mathcal{T}_\mathcal{R}$ soit séparée, il est nécessaire que les classes d'équivalences soient fermées dans $(X, \mathcal{T})$.*

Preuve : Si la topologie $\mathcal{T}_\mathcal{R}$ est séparée, alors tous les singletons, $\left\{\widehat{\dot{x}}\right\}$, de $X/\mathcal{R}$ sont des fermés (cf. Exercice 9). Comme la projection $\pi_\mathcal{R} : (X, \mathcal{T}) \to (X/\mathcal{R}, \mathcal{T}_R)$ est continue, une classe d'équivalence $\widehat{\dot{x}} = \pi_\mathcal{R}^{-1}\left(\left\{\widehat{\dot{x}}\right\}\right)$ est nécessairement fermée. ■

De la même façon, il ne suffit pas que la topologie de départ soit métrique pour que la topologie quotient soit métrisable (cf. Exercice 41).

Chapitre 2

Connexité

D'un point de vue intuitif, un espace topologique connexe est un espace topologique fait d'un seul morceau. On commence par la présentation d'une situation modèle sur laquelle nous reviendrons : Supposons connu le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ce sera dans ce cours une conséquence d'un résultat plus général). On se demande quelles sont les parties à la fois ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$, ou de manière équivalente, quelles sont les parties ouvertes A de $\mathbb{R}$ telles que $(A, \complement_{\mathbb{R}} A)$ forme une partition d'ouverts de $\mathbb{R}$. Soit A un tel sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Alors la fonction caractéristique $1_A : \mathbb{R} \to \{0, 1\} \subset \mathbb{R}$ est continue puisque pour tout ouvert O de $\{0, 1\}$ l'image réciproque $f^{-1}(O) = \emptyset$, $\mathbb{R}$,A ou $\complement_{\mathbb{R}} A$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Le théorème des valeurs intermédiaires impose alors que 1_A est constante sur $\mathbb{R}$, c'est à dire $A = \mathbb{R}$ ou $A = \emptyset$.

2.1 Définition, exemple fondamental

2.1.1 Définition

Définition 2.1.1. *On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées sont X et $\emptyset$.*

Il revient au même de dire que X n'admet pas de partition non triviale d'ouverts (ou de fermés).

Définition 2.1.2. *On dit qu'une partie A de X est connexe si $(A, \mathcal{T}_A)$ est connexe($\mathcal{T}_A$ topologie induite).*

Proposition 2.1.3. *Une partie A de X est connexe si et seulement si l'existence de deux ouverts disjoints O_1 et O_2 de $(X, \mathcal{T})$ tels que $A \subset O_1 \cup O_2$ entraîne $A \subset O_1$ ou $A \subset O_2$.*

Preuve : L'existence de O_1 et O_2, ouverts disjoints de $(X, \mathcal{T})$ tels que $A \subset O_1 \cup O_2$, revient à dire que $(A, \mathcal{T}_A)$ admet la partition d'ouverts $(O_1 \cap A, O_2 \cap A)$ (définition de la topologie induite). La partie A est connexe si et seulement si $A = O_1 \cap A$ ou $O_1 \cap A = \emptyset$. ■

2.1.2 Exemple fondamental : les connexes de $\mathbb{R}$.

Théorème 2.1.4. *Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont les intervalles.*

Preuve : a) Les parties connexes de $\mathbb{R}$ sont nécessairement des intervalles : Soit A une partie connexe de $\mathbb{R}$. Soit $x, y \in A$ et soit $z \in \mathbb{R}$ tels que $x < z < y$. Si $z \notin A$ alors $O_1 =]-\infty, z[$ et $O_2 =]z, +\infty[$ sont deux ouverts disjoints de $\mathbb{R}$ tels que $A \subset O_1 \cup O_2$. On a alors $A \subset O_1$ ce qui contredit $y \in A$ ou $A \subset O_2$ ce qui contredit $x \in A$. Par conséquent $z \in A$. On en déduit

$$\forall x, y \in A,\ \{z \in \mathbb{R}, \min\{x, y\} \leq z \leq \max\{x, y\}\} \subset A.$$

La partie connexe A est un intervalle.
b) Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont connexes : Supposons que pour un intervalle I de $\mathbb{R}$ il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 de $\mathbb{R}$ tels que $I \subset O_1 \cup O_2$. Supposons $I \cap O_2 \neq \emptyset$ montrons qu'alors $I \subset O_2$ et $I \cap O_1 = \emptyset$. Soit $x \in I \cap O_2$, on considère $\omega_x = I \cap O_1 \cap]-\infty, x[$. C'est un ouvert de I.

Par l'absurde supposons ω_x non vide. Il admet alors une borne supérieure ($\mathbb{R}$ satisfait la propriété de la borne supérieure) que l'on note a. Cette borne supérieure a est inférieure ou égale à x et majore les éléments de ω_x. Comme $\omega_x \subset I$, $x \in I$ et comme I est un intervalle, on a nécessairement $a \in I$.
Mais alors $a \in I \cap O_2$. En effet, dans le cas contraire les relations $a \in O_1 \cap I$ et $a \leq x$ avec $x \in O_2$ entraînent $a \in \omega_x$. Comme ω_x est un ouvert de I, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\cap I \subset \omega_x$. L'intervalle I contient a et $x > a + \epsilon$. Par conséquent $a + \varepsilon/2$ appartient à ω_x et cela contredit la définition de a.
Maintenant, si $a \in O_2$, comme O_2 est un ouvert, il existe $\varepsilon' > 0$ tel que $]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[\subset O_2$. Comme O_1 et O_2 sont disjoints, on obtient $]a - \varepsilon', a + \varepsilon'[\cap \omega_x = \emptyset$ ce qui est contraire à la définition de a.

En conclusion ω_x doit être vide.

De la même manière en travaillant avec la borne inférieure, on montre que $O_1 \cap I \cap]x, +\infty[$ doit être vide. On a donc $O_1 \cap I = \emptyset$ et $I \subset O_2$. ■

EXEMPLE 2.1.5. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est inclus dans l'union des ouverts disjoints $O_1 =]-\infty, \sqrt{2}[$ et $O_2 =]\sqrt{2}, +\infty[$ sans être inclus dans l'un des deux. L'ensemble des rationnels $\mathbb{Q}$ n'est pas connexe.
Avec le même découpage on voit aussi que $[0, 1] \cup [2, 3]$ n'est pas connexe.
En utilisant le résultat ci-dessus, il suffit de dire que ce ne sont pas des intervalles.

2.2 Fonctions continues et connexité

Le résultat ci-dessous est à la fois simple et lourd de conséquences.

Théorème 2.2.1. *L'image d'un connexe par une application continue est connexe.*

Preuve : Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques, $(X, \mathcal{T})$ connexe et soit $f \in \mathcal{C}^0(X, X')$. Supposons que $f(X)$ ne soit pas connexe. Alors il existe deux ouverts non vides disjoints O'_1 et O'_2 tels que $f(X) \subset O'_1 \cup O'_2$ sans que $f(X)$ soit contenu dans l' un d'eux. Comme f est continue, cela entraîne que $(f^{-1}(O'_1), f^{-1}(O'_2))$ est un partition non triviale de X, ce qui contredit la connexité de X. ■

Corollaire 2.2.2. ***(Théorème des valeurs intermédiaires)***
Si $f \in \mathcal{C}^0(X; \mathbb{R})$ avec $(X, \mathcal{T})$ espace topologique connexe, alors $f(X)$ est un intervalle.

Le résultat suivant donne une caractérisation de la connexité qui rejoint la discussion de l'introduction.

Proposition 2.2.3. *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe si et seulement si toute fonction continue de X dans $\{0, 1\}$ est constante.*

Preuve : L'ensemble $\{0, 1\}$ pris comme partie de $\mathbb{R}$ a pour topologie la topologie discrète.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si $(X, \mathcal{T})$ est connexe et si $f : X \to \{0, 1\}$ est continue alors le couple $(f^{-1}(\{0\}), f^{-1}(\{1\}))$ est une partition d'ouverts de X. Donc ou bien $f^{-1}(\{0\}) = X$ et $f \equiv 0$ ou bien $f^{-1}(\{1\}) = X$ et $f \equiv 1$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute application continue $f : X \to \{0, 1\}$ est constante. Si $(A, \complement_X A)$ est une partition d'ouverts alors la fonction caractéristique 1_A est continue sur X. Par hypothèse, elle est donc constante et $A = X$ ou $A = \emptyset$. X est connexe. ■

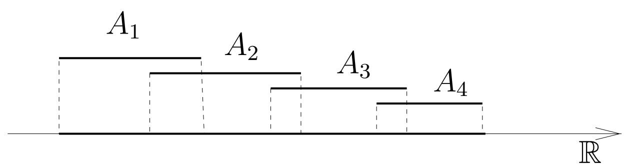
2.3 Union, adhérence et produit

2.3.1 "Union"

Théorème 2.3.1. *Toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties connexes d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ <u>ayant deux à deux une intersection non vide</u> a une réunion connexe.*

Preuve : Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes telle que pour tout $i, j \in I$, $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Supposons qu'il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $A = \cup_{i \in I} A_i \subset O_1 \cup O_2$. Pour un $i_0 \in I$ fixé, A_{i_0} est connexe et inclus dans $A \subset O_1 \cup O_2$. Cela entraîne $A_{i_0} \subset O_1$ ou $A_{i_0} \subset O_2$. Si $A_{i_0} \subset O_1$, l'hypothèse $A_i \cap A_{i_0} \neq \emptyset$ entraîne $A_i \cap O_1 \neq \emptyset$ tandis que la connexité de A_i donne $A_i \subset O_1$, ce pour tout $i \in I$. On en déduit $A \subset O_1$, l'autre possibilité $A_{i_0} \subset O_2$ donnant $A \subset O_2$. En conclusion, A est connexe. ∎

REMARQUE 2.3.2. On peut affaiblir l'hypothèse sur les intersections en supposant simplement que pour un $i_0 \in I$ on a $A_{i_0} \cap A_i \neq \emptyset$ pour tout $i \in I$. Ou bien à partir du résultat pour l'union de 2 parties connexes montrer la connexité d'une union finie par récurrence avec une hypothèse encore plus faible.



Dans la figure ci-dessus l'union des quatre intervalles A_1, A_2, A_3 et A_4 est un intervalle sans qu'aucun des A_i n'intersecte tous les autres.

Une application du résultat précédent est que pour tout point x d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, l'union de toutes les parties connexes de X contenant x est connexe. C'est le plus grand connexe contenant x.

Définition 2.3.3. *Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique quelconque. Pour tout point x de X, on appelle composante connexe de x et on note $C(x)$ le plus grand connexe contenant x :*

$$C(x) = \bigcup_{\substack{x \in C \subset X \\ C \text{ connexe}}} C.$$

Avec cette notation il est clair que deux points x et y appartiennent à un même connexe si et seulement si $C(x) = C(y)$.

Proposition 2.3.4. *La relation "appartenir à un même connexe" qui se traduit par $C(x) = C(y)$ est un relation d'équivalence dont les classes d'équivalence sont les composantes connexes de X. Ainsi les composantes connexes de X forment une partition de X.*

REMARQUE 2.3.5. D'un point de vue intuitif, les composantes connexes de X sont les morceaux d'un seul tenant de X. Par exemple les composantes connexes de $X = [0, 1] \cup [2, 3]$ sont $[0, 1]$ et $[2, 3]$.

2.3.2 Adhérence

Théorème 2.3.6. *Si une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe alors son adhérence $\overline{A}$ est connexe.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}^0(\overline{A}; \{0,1\})$. Comme A est connexe et f est continue sur A on a $A \subset f^{-1}(\{0\})$ ou $A \subset f^{-1}(\{1\})$ d'après la Proposition 2.2.3. Comme $f^{-1}(\{0\})$ ou $f^{-1}(\{1\})$ sont fermés, on doit avoir $\overline{A} = f^{-1}(\{0\})$ ou $f^{-1}(\{1\})$ et f est constante.

■

Corollaire 2.3.7. *Les composantes connexes d'un espace topologique quelconque $(X, \mathcal{T})$ sont des fermés.*

2.3.3 Produit

Théorème 2.3.8. *Un produit d'espaces connexes est connexe.*

Preuve : Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques connexes. On va montrer que le produit $\prod_{i \in I} X_i$ muni de la topologie produit est connexe en deux étapes. On traite dans un premier temps le cas où I est fini. Le cas général s'en déduit ensuite par un argument de densité.
a) Cas où I est fini : Il suffit de le faire pour $I = \{1, 2\}$. Soit f une application continue de $(X_1 \times X_2$ dans $\{0,1\}$. Pour tout $x_2 \in X_2$ l'application partielle $f(., x_2) : X_1 \to \{0,1\}$ est continue donc constante puisque X_1 est connexe. Il en est de même pour l'application partielle $f(x_1, .) : X_2 \to \{0,1\}$ et ce pour tout $x_1 \in X_1$. Il s'ensuit que f est constante sur $X_1 \times X_2$. Ainsi $X_1 \times X_2$ est connexe.

b) Cas où I est infini : Il suffit de montrer qu'il n'y a qu'une seule composante connexe. Soit $x \in X = \prod_{i \in I} X_i$ fixé. Pour une partie J finie de I, l'ensemble $X_J(x) = \{y \in X,\ \forall i \in I \setminus J,\ y_i = x_i\}$ est homéomorphe au produit fini $\prod_{i \in J} X_i$ et est donc connexe. Par conséquent le sous-ensemble $X_f(x) = \cup_{J \subset I,\ J \text{ fini}} X_J(x)$ est une union d'ensembles connexes contenant x. C'est un connexe contenant x et on a $X_f(x) \subset C(x)$ et même $\overline{X_f(x)} \subset C(x)$. Or l'ensemble $X_f(x)$ est dense dans $X = \prod_{i \in I} X_i$. En effet, soit $y \in X$ et soit $V \in \mathcal{V}(y)$. Par définition de la topologie produit, il existe un cylindre ouvert $O = \mathrm{Cyl}_{X_i}(\omega_j, j \in J)$, avec $J \subset I$ fini, tel que $y \subset O \subset V$. On considère le point z de X donné par $z_i = y_i$ si $i \in J$ et $z_i = x_i$ si $i \in I \setminus J$. Alors on a clairement $z \in O \cap X_f(x) \subset V \cap X_f(x)$. L'ensemble $X_f(x)$ rencontre n'importe quel voisinage de n'importe quel point de X, il est dense dans X. En conclusion, $C(x) = X$ et $X = \prod_{i \in I} X_i$ est connexe. ■

Corollaire 2.3.9. *Les pavés de $\mathbb{R}^n$ sont connexes.*

2.4 Connexité par arcs

Dans ce paragraphe, nous introduisons une notion un peu plus forte que la connexité qui est en fait plus facile à vérifier dans des situations pratiques.

Définition 2.4.1. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique, on appelle chemin ou arc joignant $x \in X$ à $y \in X$ toute application continue de $\gamma : [0,1] \to X$ telle que $\gamma(0) = x$ et $\gamma(1) = y$.*

Définition 2.4.2. *On dit qu'une partie A d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est connexe par arcs si deux points quelconques de A peuvent être reliés par un chemin.*

Théorème 2.4.3. *Un espace topologique connexe par arcs est connexe.*

Preuve : Soit $(x, \mathcal{T})$ un espace topologique connexe par arcs et soit $x \in X$ fixé. On peut écrire

$$X = \bigcup_{y \in X} \{y\} = \bigcup_{\substack{\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1]; X) \\ \gamma(0) = x}} \gamma([0,1]) .$$

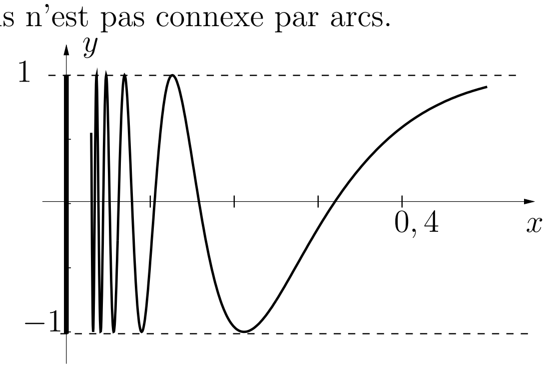
Or pour tout $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1]; X)$ l'image $\gamma([0,1])$ de l'intervalle $[0,1]$ est connexe. Comme dans l'union ci-dessus tous les chemins considérés contiennent le point x, l'union qui vaut X est connexe. ■

EXEMPLE 2.4.4. **a)** Dans $\mathbb{R}^n$ toutes les parties convexes sont connexes.

b) Il y a des ensembles connexes qui ne sont pas connexes par arcs. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, l'ensemble $\left\{(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)),\ x > 0\right\}$ est connexe par arcs donc connexe. Son adhérence qui est

$$\{(x, \sin(1/x)),\ x > 0\} \cup (\{0\} \times [-1,1])$$

est connexe mais n'est pas connexe par arcs.



REMARQUE 2.4.5. On peut définir une relation d'équivalence "appartenir au même connexe par arcs" et définir des composantes connexes par arcs. Elles sont plus petites que les composantes connexes et ne sont pas nécessairement fermées comme le montre l'exemple b) ci-dessus (cf. Exercice 50).

Chapitre 3

Compacité

Le terme de compacité évoque une idée de petitesse. Ainsi dans un espace topologique compact, il n'est pas possible de mettre une infinité de points sans qu'ils s'accumulent quelque part. On verra aussi que les parties compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties fermées bornées. En fait de petitesse, les compacts sont définis par une propriété de finitude topologique. L'importance de la notion de compacité vient du fait qu'elle permet de ramener des problèmes de complexité apparemment infinie à l'étude d'un nombre fini de cas.

3.1 Définitions

Définition 3.1.1. ***(Borel-Lebesgue)*** *On dit qu'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact s'il est séparé et si de tout recouvrement d'ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini :*

$$\left(X = \bigcup_{i\in I} O_i\right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I,\ J \text{ fini},\ X = \bigcup_{i\in J} O_i\right).$$

Par passage au complémentaire on a une définition équivalente avec les fermés que nous donnons ici comme propriété.

Proposition 3.1.2. *Un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ est compact s'il est séparé et si de toute famille de fermés d'intersection vide on peut extraire une sous-famille finie d'intersection vide :*

$$\left(\bigcap_{i\in I} F_i = \emptyset\right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I,\ J \text{ fini},\ \bigcap_{i\in J} F_i = \emptyset\right).$$

Le résultat suivant est une conséquence utile dans le cas ou les fermés sont emboîtés.

Proposition 3.1.3. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace compact, toute suite décroissante de fermés non vides, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $F_{n+1} \subset F_n$, $F_n \neq \emptyset$, a une intersection non vide.*

Preuve : Par contraposée, si $\cap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$, il existe $n_1, \ldots, n_N \in \mathbb{N}$ tels que $F_{n_1} \cap \ldots \cap F_{n_N} = \emptyset$. Dans ce cas $F_{\max\{n_1,\ldots,n_N\}} = F_{n_1} \cap \ldots \cap F_{n_N} = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse. ∎

REMARQUE 3.1.4. En fait il n'est pas nécessaire de supposer la famille de fermés dénombrable. Dès que l'ensemble I est muni d'une relation d'ordre total (toute partie finie admet un maximum et un minimum), la famille $(F_i)_{i\in I}$ étant décroissante par rapport à l'ordre sur I et l'inclusion dans $\mathcal{F}$, le résultat est vrai.

Définition 3.1.5. *Une partie A d'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ est dite compacte si $(A, \mathcal{T}_A)$ avec la topologie induite est compact.*

La propriété de Borel-Lebesgue dans $(A, \mathcal{T}_A)$ s'écrit alors avec les ouverts de $(X, \mathcal{T})$,

$$\left(A \subset \underset{i\in I}{\cup} O_i\right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I,\ J \text{ fini},\ A \subset \underset{i\in J}{\cup} O_i\right),$$

et la définition avec les fermés de $(X, \mathcal{T})$

$$\left(A \cap \left(\underset{i\in I}{\cap} F_i\right) = \emptyset\right) \Rightarrow \left(\exists J \subset I,\ I \text{ fini},\ A \cap \left(\underset{i\in J}{\cap} F_i\right) = \emptyset\right).$$

EXEMPLE 3.1.6. **a)** L'ensemble vide $\emptyset$ est compact.

b) Tout ensemble fini avec n'importe quelle topologie est compact.

c) La droite réelle $\mathbb{R}$ n'est pas compacte $\mathbb{R} = \cup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+2[$.

3.2 Compacité des espaces métriques

Dans un espace métrique, on doit pouvoir caractériser la compacité, qui est une propriété topologique, avec des suites. C'est ce que dit le théorème de Bolzano-Weierstrass que nous détaillons un peu en vue de préciser la situation dans un espace topologique général (cf. Remarque 3.2.4).

Théorème 3.2.1. *Pour une partie A d'un espace métrique (X, d), les trois assertions sont équivalentes :*

i) *A est compacte.*

ii) *Propriété de Bolzano-Weierstrass : Toute partie infinie de A admet un point d'accumulation dans A.*

iii) *De toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A, on peut extraire une sous-suite convergeant dans A.*

REMARQUE 3.2.2. Notons que l'on peut exprimer la propriété ii) d'une autre manière en disant que toute suite de A admet une valeur d'adhérence dans A. Une valeur d'adhérence d'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un point x tel que pour tout voisinage $V \in \mathcal{V}(x)$ la suite prennent une infinité de fois sa valeur dans V. Cela correspond aux deux possibilités : a) L'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est fini et dans ce cas il y a nécessairement une valeur qui est prise une infinité de fois ; b) L'ensemble $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ est infini et on est sous l'hypothèse de ii).

Nous aurons besoin d'un résultat intermédiaire pour les espaces métriques qui est souvent utile.

Lemme 3.2.3. ***(Lemme de la maille)*** *Si une partie A d'un espace métrique vérifie iii) et si $\cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement d'ouverts de A, alors il existe une constante $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in A$ la boule $B(x,\rho)$ est incluse dans un des O_i :*

$$\forall x \in X,\ \exists i_x \in I,\ B(x,\rho) \subset O_{i_x}.$$

Preuve : Elle se fait par l'absurde. Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in A$ tel que $B(x_n, \frac{1}{n+1})$ n'est incluse dans aucun des O_i. Par l'hypothèse iii), on peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant dans A. Posons $l = \lim_{k\in\mathbb{N}} x_{n_k}$. Comme l appartient à A, il existe $i \in I$ tel que $l \in O_i$ et comme O_i est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(l,\varepsilon) \subset O_i$. Par définition de la limite on peut trouver k_ε tel que $d(l, x_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{3}$ pour $k \geq k_\varepsilon$ et on peut donc supposer k_ε assez grand pour que $\frac{1}{n_{k_\varepsilon}+1} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Mais dans ce cas, on a $B(x_{n_{k_\varepsilon}}, \frac{1}{n_{k_\varepsilon}+1}) \subset B(l,\varepsilon) \subset O_i$, ce qui contredit la définition de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. En conclusion, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $x \in A$ la boule $B(x, \frac{1}{n_0+1})$ est incluse dans un des O_i et on prend $\rho = \frac{1}{n_0+1}$. ■

Preuve du Théorème 3.2.1 : i)$\Rightarrow$ ii) : Il suffit de démontrer qu'une partie dénombrable de A admet un point d'accumulation dans A. En numérotant ses éléments cela revient à considérer une suite de A, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, telle que $x_n \neq x_m$ si $n \neq m$. La suite d'ensembles donnée par $X_n = \{x_k,\ k \geq n\}$ vérifie $X_{n+1} \subset X_n$ et en prenant l'adhérence dans A, $\overline{X_{n+1}}^A \subset \overline{X_n}^A$. Ainsi $\left(\overline{X_n}^A\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non vides du compact A. L'intersection $\cap_{n\in\mathbb{N}} \overline{X_n}^A$ est non vide et on note x un de ses éléments. Ce point x appartient à A et est un point d'accumulation de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$: Pour tout voisinage V de x on peut trouver un terme x_n de la suite différent de x qui appartient à V. Si x est un terme de la suite, $x = x_{n_1}$, l'appartenance de x à $\overline{X_{n_1+1}}^A$ dit qu'il existe $x_n \in X_{n_1+1} \cap V$ tandis que $x \notin X_{n_1+1}$. Si x n'est pas un terme de la suite on peut prendre $n_1 = 0$.
ii)$\Rightarrow$ iii) : Compte tenu de la Remarque 3.2.2, la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence $l \in A$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut trouver $n_k \in \mathbb{N}$ tel que $d(l, x_{n_k}) < \frac{1}{k+1}$. La sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge alors vers l puisque

$\{B(l, \frac{1}{k+1}),\ k \in \mathbb{N}\}$ forme une base de voisinages de l.

iii)$\Rightarrow$ i) : Si $\cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement d'ouverts de A. D'après le Lemme de la maille (3.2.3), on peut trouver $\rho > 0$ tel que

$$\forall x \in A,\ \exists i_x \in I,\ B(x, \rho) \subset O_{i_x}.$$

On construit la suite $(x_n)_{n\in M\subset\mathbb{N}}$ par récurrence :
- $x_0 \in A$
- Si $\cup_{k=1}^{n} B(x_k, \rho)$ ne recouvre pas A, on prend x_{n+1} dans $A \setminus \cup_{k=1}^{n} B(x_k, \rho)$. Dans le cas contraire, on s'arrête et $M = \{0, \ldots, n\}$.

L'ensemble d'indices M est nécessairement fini. En effet dans le cas contraire on a construit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $d(x_n, x_m) \geq \rho$ pour $m \neq n$. En extrayant une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $l \in A$ on obtient pour k assez grand

$$\rho \leq d(x_{n_{k+1}}, x_{n_k}) \leq d(x_{n_{k+1}}, l) + d(x_{n_k}, l) \leq \frac{\rho}{3} + \frac{\rho}{3} = \frac{2\rho}{3},$$

ce qui est impossible pour $\rho > 0$.
Donc l'ensemble M est fini et on a $A \subset \cup_{j\in M} B(x_j, \rho) \subset \cup_{j\in M} O_{i_{x_j}}$. ■

REMARQUE 3.2.4. **a)** Pour i)$\Rightarrow$ ii), on n'a pas besoin de la structure métrique. La propriété de Bolzano-Weierstrass est vraie pour tout espace topologique compact. En revanche ii)$\Rightarrow$iii) nécessite l'existence d'une base de voisinages dénombrable : Pour que le point d'accumulation soit effectivement la limite d'une sous-suite, on a besoin de cette propriété des espaces métriques. Enfin l'implication iii)$\Rightarrow$i) repose sur le Lemme de la maille (3.2.3) qui se formule explicitement avec une distance.

b) Une conséquence du Théorème est que le Lemme de la maille s'applique à tout espace métrique compact.

c) Ce théorème a une généralisation complète pour des espaces topologiques quelconques reposant encore sur la notion de filtre.

Corollaire 3.2.5. *Tout espace métrique compact est séparable.*

Preuve : Soit (X, d) un espace métrique compact. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'union $\cup_{x\in X} B(x, \frac{1}{n+1})$ est un recouvrement d'ouverts de X. On peut donc en extraire un sous recouvrement fini $\cup_{k=0}^{N_n} B(x_{k,n}, \frac{1}{n+1})$. L'ensemble

$$\{x_{k,n},\ k \in \{0, \ldots, N_n\},\ n \in \mathbb{N}\}$$

est alors un ensemble dense dénombrable dans X. ■

Nous terminons ce paragraphe par l'exemple sans lequel toutes ces notions n'auraient pas vraiment d'intérêt.

Théorème 3.2.6. ***(Heine-Borel-Lebesgue)*** *Tout intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$, $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$, est compact.*

Preuve : On utilise la propriété iii) du Théorème 3.2.1. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $[a,b]$, on va extraire une sous-suite convergente par une méthode de dichotomie. On construit la suite de couple $((a_k,b_k))_{k\in\mathbb{N}}$ par récurrence :

- $a_0 = a$ et $b_0 = b$
- On pose $c_k = \frac{a_k+b_k}{2}$. Si il existe un nombre infini d'indices n tels que $x_n \in [a_k, c_k]$ on prend $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = c_k$. Sinon on prend $a_{k+1} = c_k$ et $b_{k+1} = b_k$.

On a formé ainsi deux suites adjacentes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que pour tout $k \in \mathbb{N}$ il existe $x_{n_k} \in [a_k, b_k]$. Une conséquence de la propriété de la borne supérieure est que deux suites adjacentes convergent et ont même limite. Cette limite est aussi limite de la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. ∎

3.3 Propriétés des compacts

3.3.1 Compacts et fermés

Proposition 3.3.1. *Dans un espace topologique séparé, une partie compacte est fermée.*

Preuve : Soit K une partie compacte de $(X,\mathcal{T})$ séparé. Montrons que $\complement_X K$ est ouvert. Soit $x \in \complement_X K$. Comme $(X,\mathcal{T})$ est séparé, pour tout $y \in K$ il existe $V_{x,y} \in \mathcal{V}(x)$ et $\omega_{x,y} \in \mathcal{O}$ tels que $y \in \omega_{x,y}$ et $V_{x,y} \cap \omega_{x,y} = \emptyset$. Comme K est compact, on peut extraire du recouvrement d'ouverts $\cup_{y\in K}\,\omega_{x,y}$ un sous-recouvrement fini $K \subset \cup_{i=1}^n \omega_{x,y_i}$. On prend alors $V = \cap_{i=1}^n V_{x,y_i}$ et on a $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subset \complement_X K$. ∎

Proposition 3.3.2. *Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique compact et F est un fermé de X alors F est compact.*

Preuve : Si $(F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés telle que $F \cap (\cap_{i\in I} F_i) = \emptyset$ alors la famille $(F \cap F_i)_{i\in I}$ est une famille de fermés d'intersection vide de X. Comme $(X,\mathcal{T})$ est compact il existe une partie finie J de I telle que

$$\emptyset = \underset{i\in J}{\cap}(F \cap F_i) = F \cap \left(\underset{i\in J}{\cap} F_i\right).$$

∎

Corollaire 3.3.3. *Dans un espace topologique compact, les compacts sont les fermés.*

Corollaire 3.3.4. *Les compacts de $\mathbb{R}$ sont les fermés bornés.*

Preuve : Dans $\mathbb{R}$, un ensemble fermé borné et une partie fermée de l'intervalle $[-L, L]$ pour L assez grand. C'est un fermé d'un compact donc un compact.
Réciproquement, un compact de $\mathbb{R}$ est nécessairement fermé. De plus il est borné : sinon on pourrait prendre une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $|x_n| \geq n$ qui n'aurait pas de point d'accumulation dans $\mathbb{R}$. ■

Nous terminons par une notion parfois utile quand on veut utiliser des arguments de compacité pour des ensembles qui ne sont pas fermés.

Définition 3.3.5. *On dit qu'une partie A d'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ est relativement compacte si sont adhérence est compacte.*

3.3.2 Union, intersection, produit

Proposition 3.3.6. *Dans un espace topologique séparé, une union finie de compacts est compacte.*

Preuve : Si $\cup_{i\in I} O_i$ est un recouvrement d'ouverts de l'union de compacts $\cup_{k=1}^{n} K_k$, c'en est un des compacts $K_1, \ldots, K_n$ pris séparément. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on peut trouver une partie finie J_k de I telle que $K_k \subset \cup_{i\in J_k} O_i$. On prend $J = J_1 \cup \ldots \cup J_n$ et $\cup_{i\in J} O_i$ est un sous-recouvrement fini. ■

Proposition 3.3.7. *Dans un espace topologique, une intersection quelconque de parties compactes est compacte.*

Preuve : L'intersection $\cap_{i\in I} K_i$ est une intersection de fermés du compact K_{i_0} ($i_0 \in I$ fixé). C'est un fermé donc un compact. ■

Théorème 3.3.8. ***(Tychonoff)*** *Un produit d'espaces topologiques compacts est compact.*

"Preuve" : On admettra ce résultat dans le cas général. On le démontre ici simplement dans deux cas.
a) Produit fini d'espaces compacts : Il suffit de le faire pour le produit de deux espaces compacts $X_1 \times X_2$. Soit $\cup_{i\in I} O_i$ un recouvrement d'ouverts de $X_1 \times X_2$. Pour tout $x = (x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$, il existe $i_x \in I$ et $(\omega_x^1, \omega_x^2) \in \mathcal{O}_1 \times \mathcal{O}_2$ tels que $(x_1, x_2) = x \in \omega_x^1 \times \omega_x^2 \subset O_{i_x}$. Pour $x_2 \in X_2$ fixé, l'union $\cup_{x_1\in X_1} \omega^1_{(x_1,x_2)} \times \{x_2\}$ est un recouvrement d'ouverts de $X_1 \times \{x_2\} \sim X_1$ qui par hypothèse est compact. Il existe donc $N(x_2) \in \mathbb{N}$ et $N(x_2)$ points $x_1^1, \ldots, x_1^{N(x_2)}$ de X_1 tels que $X_1 \times \{x_2\} \subset \cup_{k=1}^{N(x_2)} \omega^1_{(x_1^k, x_2)} \times \{x_2\}$. Maintenant pour $x_2 \in X_2$, l'intersection $\omega(x_2) = \cap_{k=1}^{N(x_2)} \omega^2_{(x_1^k, x_2)}$ est un ouvert de X_2 contenant x_2.

Comme X_2 est compact, on peut extraire du recouvrement $\cup_{x_2 \in X_2} \omega(x_2)$ un sous recouvrement fini $X_2 = \cup_{l=1}^{N} \omega(x_2^l)$. On a alors

$$X_1 \times X_2 = X_1 \times \left(\bigcup_{l=1}^{N} \omega(x_2^l) \right) = \bigcup_{l=1}^{N} \left[\bigcup_{k=1}^{N(x_2^l)} \omega^1_{(x_1^k, x_2^l)} \times \omega(x_2^l) \right]$$
$$\subset \bigcup_{l=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{N(x_2^l)} \omega^1_{(x_1^k, x_2^l)} \times \omega^2_{(x_1^k, x_2^l)} \subset \bigcup_{l=1}^{N} \bigcup_{k=1}^{N(x_2)} O_{i_{(x_1^k, x_2^l)}}.$$

b) Cas métrisable, produit dénombrable d'espaces métriques : Soit $(X_n, d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques. On sait que la topologie produit sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ est associée à la distance

$$d(x,y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}, \quad x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

On peut dons appliquer le critère iii) du Théorème 3.2.1. Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ (suite de suites $x_n^k \in X_n$). On va construire une sous-suite convergente par procédé diagonal (cf. la figure ci-dessous). La suite $(x_0^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite du métrique compact (X_0, d_0). On peut donc extraire une sous-suite $(x_0^{k_0(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ convergeant vers une limite $c_0 \in X_0$. On construit la suite de fonctions $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $k_n : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, par récurrence. La fonction k_n étant fixée telle que $(x_j^{k_n(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ converge vers $l_j \in X_j$, pour $0 \le j \le n$, la compacité de X_{n+1} permet d'extraire de $(x_{n+1}^{k_n(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ une sous-suite $(x_{n+1}^{k_{n+1}(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $c_{n+1} \in X_{n+1}$.
On considère maintenant la suite $(x^{k_l(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ de $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Pour $j \in \mathbb{N}$, la suite composante $\left(x_j^{k_l(l)}\right)_{l\ge j}$ est une suite extraite de $\left(x_j^{k_j(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ et converge donc vers $c_j \in X_j$. Autrement dit la sous-suite $\left(x^{k_l(l)}\right)_{l\in\mathbb{N}}$ de $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, c'est à dire pour la topologie produit sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$. ■

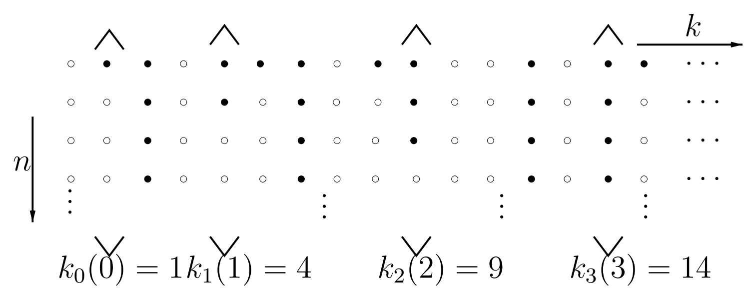


Illustration du procédé diagonal. Les termes des suites extraites sont pointés en noir. Les crochets verticaux indiquent l'extraction finale.

Corollaire 3.3.9. *Les pavés $\prod_{i=1}^{n} [a_i, b_i]$, $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, de $(\mathbb{R}^n, \| \ \|_\infty)$, sont compacts.*

Preuve : Les pavés sont tout simplement des produits d'intervalles fermés bornés et la norme $\| \|_\infty$ donne la topologie produit. ∎

REMARQUE 3.3.10. On verra au Chapitre 4 et d'ailleurs en utilisant ce résultat que toutes les normes sur $\mathbb{R}^n$ sont équivalentes. Ainsi il n'est pas utile sauf pour faire un calcul explicite de préciser la norme sur $\mathbb{R}^n$.

Corollaire 3.3.11. *Les compacts de $\mathbb{R}^n$ sont les ensembles fermés bornés.*

Preuve : Même démonstration que pour $\mathbb{R}$ en utilisant les pavés. ∎

REMARQUE 3.3.12. On en déduit que les parties relativement compactes de $\mathbb{R}^n$ sont les parties bornées.

3.4 Fonctions continues et compacts

3.4.1 Image d'un compact

Théorème 3.4.1. *Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques séparés. L'image d'un compact par une application continue de X dans X' est compacte.*

Preuve : Soit $f \in \mathcal{C}^0(X; X')$ et soit K un compact de X. Si $\cup_{i\in I} O'_i$ est un recouvrement d'ouverts de $f(K)$, alors $\cup_{i\in I} f^{-1}(O'_i)$ est un recouvrement d'ouverts de K. Comme K est compact on peut en extraire un sous-recouvrement fini , $K \in \cup_{i\in J} f^{-1}(O'_i)$, $J \subset I$ fini. On a alors $f(K) \subset \cup_{i\in J} O'_i$. Ainsi $f(K)$ est compact. ∎

Corollaire 3.4.2. *Toute fonction continue sur un espace compact à valeurs dans $\mathbb{R}$ est bornée et atteint ses bornes supérieure et inférieure.*

Preuve : Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et $f \in \mathcal{C}^0(X; \mathbb{R})$, alors l'image $f(X)$ est un compact de $\mathbb{R}$. L'image $f(X)$ est bornée. La fonction f est donc bornée et on peut définir $\sup_{x\in X} f(x)$ et $\inf_{x\in X} f(x)$ (propriété de $\mathbb{R}$). L'image $f(X)$ est fermée et on a donc $\sup_{x\in X} f(x) \in f(X)$ et $\inf_{x\in X} f(x) \in f(X)$. Autrement dit les bornes supérieure et inférieure sont atteintes. Ce sont des maximum et minimum. ∎

Il est bien sûr faux de dire que l'image réciproque d'un compact par une application continue est un compact. Par exemple l'image réciproque de $[0, 1]$ par la projection sur l'axe des abscisses dans $\mathbb{R}^2$ est $[0, 1] \times \mathbb{R}$ qui n'est pas compact. En revanche, c'est toujours un fermé. Le fait que l'image réciproque d'un compact soit un compact est une propriété que l'on rencontre et qui est parfois bien utile. Il y a un mot pour identifier cette propriété.

Définition 3.4.3. *On dit qu'une application continue $f : X \to X'$, où $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques séparés, est propre si pour tout compact K' de X' l'image réciproque $f^{-1}(K')$ est un compact de X.*

EXEMPLE 3.4.4. Si on note $\Delta = \{(x, x), x \in \mathbb{R}\}$ la diagonale dans $\mathbb{R}^2$, la restriction de la projection sur l'axe des abscisses à Δ est propre.

3.4.2 Compact et uniforme continuité

Théorème 3.4.5. ***(Heine)*** *Si (X, d) et (X', d') sont deux espaces métriques avec (X, d) compact, toute application continue $f : X \to X'$ est uniformément continue.*

Preuve : Si $f : X \to X'$ est continue, alors $\cup_{z \in X'} f^{-1}\left(B_{d'}(z, \frac{\varepsilon}{2})\right)$ est un recouvrement d'ouverts de X. Par le Lemme de la maille 3.2.3, il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in X$, il existe $z_x \in X$ tel que $B_d(x, 2\rho) \subset f^{-1}\left(B_{d'}(z_x, \frac{\varepsilon}{2})\right)$. Pour tout $x, y \in X$ tels que $d(x, y) \leq \rho < 2\rho$, on a

$$d'(f(x), f(y)) \leq d'(f(x), f(z_x)) + d'(f(z_x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

3.5 Espaces localement compacts

On rappelle la définition d'un espace localement compact (cf. Chapitre 1 Section 1.2.6).

Définition 3.5.1. *On dit qu'un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$ est localement compact si tout point admet une base de voisinages compacts.*

EXEMPLE 3.5.2. Comme les pavés de $\mathbb{R}^n$ sont compacts et que l'on peut former avec des pavés une base de voisinages en tout point de $\mathbb{R}^n$ (boules fermées pour la distance d_∞), $\mathbb{R}^n$ est localement compact. Il en est de même de tout espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et même de tout fermé d'un espace vectoriel de dimension finie.

REMARQUE 3.5.3. **a)** On verra au Chapitre 4 qu'un espace vectoriel normé de dimension infinie n'est pas localement compact.

b) L'importance de la notion d'espace localement compact vient du fait qu'elle permet de généraliser à des espaces topologiques non métrisable des arguments reposant sur des proprits essentiellement mtriques comme la complétude (Cf Chapitre 5 et Exercice 148) ou la spartation des ferms (Exercice 154)

c) Tout espace topologique localement compact peut être vu comme une partie d'un espace compact. (cf. Exercice 83).

Chapitre 4

Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, nous allons étudier plus en détails les espaces vectoriels normés sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On verra qu'il y a une différence fondamentale entre les espaces vectoriels normés de dimension finie et ceux de dimension infinie, ces derniers intervenant la plupart du temps comme espaces de fonctions. Les résultats de ce chapitre portant sur la dimension infinie peuvent être vu comme les premiers rudiments d'analyse fonctionnelle. Dans tout ce chapitre, on travaillera sur des espaces vectoriels réels ou complexes, i.e. ayant pour corps de base le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

4.1 Généralités

4.1.1 Définitions

Dans un premier temps rappelons les définitions de norme et d'espace vectoriel normé sur $\mathbb{K}$.

Définition 4.1.1. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\| \ \|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$*

i) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$ *(homogénéité),*

ii) $(\|x\| = 0) \Rightarrow (x = 0)$,

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Définition 4.1.2. *Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \| \ \|)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\| \ \|$ est une norme sur E.*

Proposition 4.1.3. *Si $(E, \| \ \|)$ est un espace vectoriel normé alors $d(x, y) = \|y - x\|$ définit une distance sur E. De plus la topologie ainsi définie est com-*

patible avec la structure d'espace vectoriel, i.e. les applications

$$\begin{array}{ccc} E \times E \to E & \textit{et} & \mathbb{K} \times E \to E \\ (x, y) \to x + y & & (\lambda, x) \to \lambda.x \end{array}$$

sont continues.

Preuve : La continuité des deux applications ci-dessus vient des inégalités :

$$\begin{array}{rl} & \|(x' + y') - (x + y)\| \leq \|x' - x\| + \|y' - y\| \\ \text{et} & \|\lambda' x' - \lambda x\| \leq |\lambda' - \lambda| \, \|x'\| + |\lambda| \, \|x' - x\| \, . \end{array}$$

■

En remarquant $\|x\| = d(0, x)$, on a aussi immédiatement la

Proposition 4.1.4. *La norme* $\| \ \|$ *est une application* 1*-Lipschitzienne de* $(E, \| \ \|)$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *:*

$$\forall x, y \in E, \ |\|y\| - \|x\|| \leq \|y - x\| \, .$$

On rappelle également l'équivalence (métrique) pour les normes.

Définition 4.1.5. *Deux normes* $\| \ \|$ *et* $\| \ \|'$ *sur un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* E *sont* <u>*équivalentes*</u> *si il existe une constante* $C > 0$ *telle que*

$$\forall x \in E, \ C^{-1} \|x\| \leq \|x\|' \leq C \|x\| \, .$$

4.1.2 Exemples

a) Sur $\mathbb{K}^n$ les normes

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \ 1 \leq p < \infty, \quad \text{et} \quad \|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|.$$

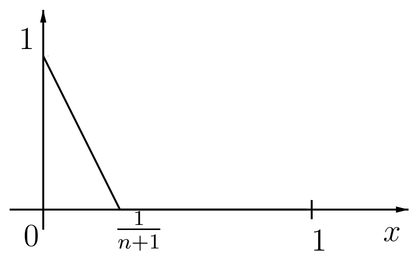
sont toutes équivalentes (cf. Exercice 6).

b) De même si $(E_i, | \ |_i)_{i \in \{1, \dots, n\}}$ est une famille finie de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés alors les quantités définies par $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^{n} |x_i|_i^p)^{\frac{1}{p}}$, pour $1 \leq p < \infty$ et $\|x\|_\infty = \max \{|x_i|_i, \ i \in \{1, \dots, n\}\}$ sont des normes sur $\prod_{i=1}^{n} E_i = \oplus_{i=1}^{n} E_i$, toutes équivalentes.

c) La quantité $\|f\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |f(t)|$ définit une norme sur $\mathcal{F}_b ([0, 1]; \mathbb{K})$ et sur $\mathcal{C}^0 ([0, 1]; \mathbb{K})$ (de plus la borne supérieure est un maximum pour les fonctions continues). C'est la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$. Plus généralement si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact et si $(E, \| \ \|_E)$ est un espace vectoriel normé alors la quantité définie sur $\mathcal{C}^0(X; E)$ par $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_E = \max_{x \in X} \|f(x)\|_E$ est la norme de la convergence uniforme sur X pour les fonctions à valeurs dans E.

d) Les quantités $\max_{i\in\{1,\dots,k\}} \left\|f^{(i)}\right\|_\infty$ et $\left(\sum_{i=1}^k \left\|f^{(i)}\right\|_\infty^p\right)^{\frac{1}{p}}$, $1 \leq p < \infty$, sont des normes toutes équivalentes sur $\mathcal{C}^k([0,1];\mathbb{K})$.

e) La quantité $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt$ est une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{K})$ qui n'est pas équivalente à la norme de la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$. En effet, considérons la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $f_n(x) = 1-(n+1)x$ pour $x \leq \frac{1}{2(n+1)}$ et $f_n(x) = 0$ pour $x \geq \frac{1}{n+1}$:



On a $\|f_n\|_\infty = 1$ tandis que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$ de telle sorte que le rapport $\frac{\| \ \|_1}{\| \ \|_\infty}$ n'est pas uniformément minoré.

f) Pour $1 \leq p < \infty$ on considère l'espace de suites

$$l^p(\mathbb{N};\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p < \infty \right\}$$

et pour $p = \infty$ on prend $l^\infty(\mathbb{N};\mathbb{K}) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N};\mathbb{K})$. La quantité $\|x\|_p = \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ est une norme sur $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ pour $p < \infty$ et pour $p = \infty$ on prend la norme de la convergence uniforme $\| \ \|_\infty$. Pour $p < q$ les espaces $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ et $l^q(\mathbb{N};\mathbb{K})$ sont distincts mais on a $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K}) \subset l^q(\mathbb{N};\mathbb{K})$ et les normes $\| \ \|_p$ et $\| \ \|_q$ sur $l^p(\mathbb{N};\mathbb{K})$ ne sont pas équivalentes.

4.1.3 Applications linéaires continues

Proposition 4.1.6. *Soit $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M \|x\|_E .$$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Si f est une application linéaire continue de E dans F, il existe $\rho > 0$ tel que la boule fermée de E, $B_{f,E}(0,\rho)$, soit incluse dans $f^{-1}(B_{f,F}(0,1))$. Pour $x \in E \setminus \{0\}$, le vecteur $\frac{\rho}{\|x\|_E} x$ appartient à $B_{f,E}(0,\rho)$ d'où

$$\frac{\rho}{\|x\|_E} \|f(x)\|_F = \left\| f\left(\frac{\rho}{\|x\|_E} x\right)\right\|_F \leq 1.$$

Il suffit de prendre $M = \frac{1}{\rho}$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si on a la constante M alors on a

$$\forall x, y \in E,\ \|f(y) - f(x)\|_F = \|f(y - x)\|_F \leq M \|y - x\|_E$$

et l'application linéaire f est Lipschitzienne. ∎

Corollaire 4.1.7. *Toute application linéaire continue $f : E \to F$ est Lipschitzienne.*

Une autre conséquence est qu'il n'y a pas de distinction entre équivalence topologique et métrique pour les normes.

Corollaire 4.1.8. *Deux normes sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E sont topologiquement équivalentes si et seulement si elle sont métriquement équivalentes.*

Preuve : Deux normes sont topologiquement équivalentes si l'application Id est bicontinue. Mais comme Id est linéaire cela entraîne qu'elle est bilipschitzienne et donc que les normes sont métriquement équivalentes. ∎

EXEMPLE 4.1.9. **Exemple d'application linéaire non continue :** Si on munit $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\ dt$ alors la forme linéaire $f \to f(0)$ n'est pas continue. En effet en prenant la même suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que dans l'exemple d) on a $f_n(0) = 1$ tandis que $\|f_n\|_1 = \frac{1}{n+1}$.

Définition 4.1.10. *Les normes $\| \ \|_E$ et $\| \ \|_F$ étant fixées, on note $\underline{\mathcal{L}(E;F)}$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On appelle dual topologique de E et on note $E' = \mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires continues sur E.*

Proposition 4.1.11. *La quantité $\|f\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F$ est une norme sur $\mathcal{L}(E;F)$.*

Preuve : L'égalité $\|f\| = 0$ entraîne $f(x) = 0$ pour $x \neq 0$ (et de plus $f(0) = 0$ car f est linéaire). L'homogénéité et l'inégalité triangulaire s'obtiennent facilement :

$$\|\lambda f\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|\lambda f(x)\|_F = |\lambda| \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = |\lambda|\, \|f\|$$

et

$$\|f+g\| = \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)+g(x)\|_F \leq \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F + \sup_{\|x\|_E=1} \|g(x)\|_F \leq \|f\| + \|g\|.$$

∎

On a des propriétés similaires pour les applications bilinéaires et même multilinéaires (laissé en exercice).

Proposition 4.1.12. *Si $(E_1, \| \|_{E1})$, $(E_2, \| \|_{E2})$ et $(F, \| \|_F)$ sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés, une application bilinéaire $\Phi : E_1 \times E_2 \to F$ est continue si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x, y \in E_1 \times E_2,\ \|\Phi(x,y)\|_F \leq M \|x\|_{E1} \|y\|_{E2}.$$

Preuve : La démonstration est la même que pour le cas linéaire. ∎

On termine avec une estimation de la norme de la composée de deux applications linéaire continues.

Proposition 4.1.13. *Si $(E, \| \|_E)$, $(F, \| \|_F)$ et $(G, \| \|_G)$ sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés alors pour $f \in \mathcal{L}(E; F)$ et $g \in \mathcal{L}(F; G)$ la composée $g \circ f$ appartient à $\mathcal{L}(E; G)$ et on a $\|g \circ f\| \leq \|g\| \|f\|$.*

Preuve : Il est clair que la composée $g \circ f$ est linéaire et continue. De plus pour $x \in E$ on a

$$\|g \circ f(x)\|_G = \|g\,[f(x)]\|_G \leq \|g\| \|f(x)\|_F \leq \|g\| \|f\| \|x\|_E,$$

d'où la majoration de la norme de $g \circ f$. ∎

REMARQUE 4.1.14. Ce résultat dit en particulier que l'application :$(f, g) \to g \circ f$ est bilinéaire continue de $\mathcal{L}(E; F) \times \mathcal{L}(F; G)$ dans $\mathcal{L}(E; G)$.

4.1.4 Algèbre normée

Définition 4.1.15. *Si $(\mathcal{A}, +, .\lambda, \circ)$ est une algèbre sur $\mathbb{K}$, on appelle norme d'algèbre toute norme $\| \|$ sur le $\mathbb{K}$-espace vectoriel $(\mathcal{A}, +, .\lambda)$ qui vérifie*

$$\forall A, B \in \mathcal{A},\ \|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|.$$

On dit alors que $(\mathcal{A}, \| \|)$ est une algèbre normée.

De la Proposition 4.1.13, on déduit immédiatement

Proposition 4.1.16. *Si $(E, \| \|_E)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé alors $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E; E)$ muni de la norme $\|f\| = \sup_{\|x\|_E = 1} \|f(x)\|_E$ est une $\mathbb{K}$-algèbre normée.*

EXEMPLE 4.1.17. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ toutes les normes ne sont pas des normes d'algèbre. En effet $\|(a_{ij})\|_\infty = \max_{i,j \in \{1,\dots,n\}} |a_{ij}|$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mais ne vérifie pas l'inégalité des normes d'algèbre pour $n > 1$: La matrice A qui a des 1 partout a pour norme $\|A\|_\infty = 1$ et on a

$$\|A^2\|_\infty = \|nA\|_\infty = n > 1 = \|A\|_\infty \|A\|_\infty.$$

En revanche les quantités

$$\max_{i \in \{1,\dots,n\}} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \max_{j \in \{1,\dots,n\}} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|$$

définissent des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cf. Exercice 100).

4.2 Compacité et conséquences dans les espaces vectoriels normés

C'est sur ce point qu'il y a une différence essentielle entre la dimension finie et la dimension infinie. Le résultat positif en dimension finie peut toutefois être utilisé pour obtenir des résultats en dimension infinie.

4.2.1 Dimension finie, $\dim E = n < \infty$

On commence par un petit lemme.

Lemme 4.2.1. *Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E et si on lui associe la norme $\|x\|_\infty = \|\sum_{i=1}^n x_i e_i\|_\infty = \max_{i\in\{1,\ldots,n\}} |x_i|$, alors la boule unité fermée $B_f(0,1)$ est compacte.*

Preuve : L'isomorphisme d'espaces vectoriels : $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \to \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E$ est un homéomorphisme (et même une isométrie bijective) de $(\mathbb{K}^n, \|\ \|_\infty)$ sur $(E, \|\ \|_\infty)$. On a vu que la boule unité fermée de $\mathbb{K}^n$ est compacte, il en est de même de son image $B_f(O,1) \subset E$. ■

Théorème 4.2.2. *Dans un espace vectoriel de dimension finie E, $\dim E = n < \infty$:*

a) *Toutes les normes sont équivalentes.*

b) *Pour toute norme, les compacts sont les fermés bornés*

c) *Si $(F, \|\ \|_F)$ est un autre $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé (dimension quelconque), toute application linéaire de E dans F est continue.*

Preuve : 1) On prend $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et on lui associe la norme $\|\ \|_\infty$ comme dans le Lemme 4.2.1. Si $\|\ \|$ désigne une autre norme sur E, on a pour $x = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n \in E$

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^n |x_i|\,\|e_i\| \leq \left(\sum_{i=1}^n \|e_i\|\right) \|x\|_\infty = C\,\|x\|_\infty\,.$$

De plus cette dernière inégalité dit également que Id est continue de $(E, \|\ \|_\infty)$ dans $(E, \|\ \|)$. Par conséquent la norme $\|\ \| : (E, \|\ \|_\infty) \to \mathbb{R}_+$ est continue. Comme la sphère de rayon 1, $S_\infty(0,1) = \{x \in E,\ \|x\|_\infty = 1\}$ est un compact de $(E, \|\ \|_\infty)$ (partie fermée du compact $B_f(0,1)$) et comme la fonction continue $\|\ \|$ y est strictement positive, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in S_\infty(0,1),\ \|x\| \geq \delta.$$

Pour $x \in E$ non nul on a $\left\|\frac{x}{\|x\|_\infty}\right\| \geq \delta$ et on en déduit

$$\forall x \in E,\ \delta\,\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq C\,\|x\|_\infty\,.$$

2) Comme toutes les normes sont (métriquement) équivalentes, les propriétés de compacité et de fermé borné ne dépendent pas de la norme. Or les compacts de $(E, \| \ \|_\infty)$ sont les fermés bornés de $(E, \| \ \|_\infty)$.
c) Si f est une application linéaire de E dans F, on a

$$\|f(x)\|_F = \left\| f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right)\right\|_F \leq \left(\sum_{i=1}^n \|f(e_i)\|\right) \|x\|_\infty$$

et on conclut avec l'équivalence des normes. ■

REMARQUE 4.2.3. La première assertion a la conséquence pratique suivante. Quand on veut faire un raisonnement topologique, utiliser la continuité, passer à la limite, ...dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, il n'est pas nécessaire de préciser la norme. On le fait quand vraiment on veut calculer ou majorer très précisément une certaine quantité.

Corollaire 4.2.4. *Si E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie, toutes les formes linéaires sont continues. Autrement dit le dual topologique E' s'identifie avec le dual algébrique E^*.*

REMARQUE 4.2.5. L'exemple 4.1.9 montre que cela n'est plus vrai en dimension quelconque.

Corollaire 4.2.6. *En dimension finie, tout sous-espace vectoriel est fermé.*

Preuve : Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension finie et soit F un sous-espace vectoriel de E. Ce sous-espace F peut être vu comme le noyau de la projection $\pi : E \to E/F$ sur l'espace vectoriel quotient. Cette projection est linéaire donc continue puisque E est de dimension finie (la norme sur E/F étant quelconque). Mais dans ce cas $F = \ker(\pi) = \pi^{-1}(\{0\})$ est un fermé. ■

4.2.2 Dimension infinie

Soit $(E; \| \ \|_E)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé de dimension quelconque. Nous commençons par donner une généralisation du Corollaire 4.2.6 qui repose sur la compacité en dimension finie.

Proposition 4.2.7. *Tous sous-espace vectoriel de dimension finie F est un fermé de $(E, \| \ \|_E)$.*

Preuve : L'espace vectoriel normé $(F, \| \ \|_E)$ est de dimension finie. Ses fermés bornés sont donc compacts. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F qui converge dans E, $\lim_{n\to\infty} x_n = l_E \in E$, elle est bornée dans $(E, \| \ \|_E)$ et donc dans $(F, \| \ \|_E)$. On peut donc extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge dans F, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l_F \in F$. Et comme E est séparé, on $l_E = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l_F \in F$ et ce pour tout suite de F ayant une limite l_E dans E. F est fermé. ■

Le résultat suivant dit que la boule unité fermée d'un espace vectoriel normé n'est jamais compacte en dimension infinie.

Théorème 4.2.8. ***(Riesz)*** *Si* $(E, \| \ \|_E)$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel normé, on a équivalence entre :*

a) $B_f(0,1)$ *est compacte.*

b) E *est de dimension finie.*

Preuve : a)$\Leftarrow$b) : Déjà fait.
a)$\Rightarrow$b) : On note $B = B_f(0,1)$. La famille $\left(B(x, \frac{1}{2})\right)_{x\in B}$ donne un recouvrement fini d'ouverts de B. Si B est compacte, il existe $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in B$ tels que $B \subset \cup_{i=1}^n B(x_i, \frac{1}{2})$. On note $F = \mathrm{Vect}\,(x_i,\ 1 \leq i \leq n)$ l'espace vectoriel engendré par ces x_i. C'est un sous-espace de dimension finie donc un fermé de E. De plus l'inclusion précédente donne

$$B \subset F + \frac{1}{2}B \subset F + \frac{1}{2}\left(F + \frac{1}{2}B\right) = F + \frac{1}{4}B$$

et par récurrence $B \subset F + \frac{1}{2^n}B$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit si $x \in B$ on peut trouver $x_n \in F$ tel que $d(x, x_n) = \|x - x_n\| \leq \frac{1}{2^n}$. On a donc $d(x, F) = 0$ ce qui entraîne $x \in \overline{F}$ et, puisque F est fermé, $x \in F$ (cf. Exercice 16). Dans ce cas E tout entier est inclus dans F qui est de dimension finie. ∎

On a vu que les applications linéaires ne sont pas nécessairement continues. D'où l'intérêt des résultats suivants qui répondent par l'affirmative dans certains cas.

Définition 4.2.9. *Dans un espace vectoriel normé* $(E, \| \ \|_E)$ *on dit qu'une somme directe* $E = F \oplus G$ *est topologique si les projections* $\Pi_{F,G} : E \to F$ *et* $\Pi_{G,F} : E \to G$ *données par* $\Pi_{F,G}(x_F + x_G) = x_F$ *et* $\Pi_{G,F}(x_F + x_G) = x_G$ *sont continues. On dit aussi que* G *(resp.* F*) est un supplémentaire topologique de* F *(resp.* G*).*

Compte tenu de la relation $\Pi_{F,G} = \mathrm{Id} - \Pi_{G,F}$, il suffit qu'une des deux projections soit continue. De plus cela entraîne que $F = \mathrm{Ker}\,\Pi_{G,F}$ et $G = \mathrm{Ker}\,\Pi_{F,G}$ sont des sous-espaces fermés. C'est une condition nécessaire mais pas suffisante. Il y a même des sous-espaces fermés qui n'ont aucun supplémentaire topologique (par exemple, l'espace des suites qui tendent vers 0 dans $l^\infty(\mathbb{N};\mathbb{R})$). On a équivalence quand l'un des deux sous-espaces est de dimension finie

Proposition 4.2.10. *Si* $E = F \oplus G$ *avec* F *fermé et* G *de dimension finie, alors la somme directe est topologique.*

Preuve : Il s'agit de vérifier que la projection $\Pi_{F,G}$ est continue. Par l'absurde, supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x^n \in E$ tel que $\|x^n\|_E = 1$ et $\|x_F^n\|_E \geq n$ avec $x^n = x_F^n + x_G^n$, $x_F^n \in F$ et $x_G^n \in G$. On pose alors $f^n = \frac{1}{\|x_F^n\|_E} x_F^n$

et $g^n = \frac{1}{\|x_F^n\|_E} x_G^n$. On a

$$\|g^n\| = \frac{1}{\|x_F^n\|_E} \|x^n - x_F^n\|_E \leq \frac{\|x^n\|_E}{\|x_F^n\|_E} + 1 = \frac{1}{\|x_F^n\|_E} + 1 \leq 2.$$

La suite $(g^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite bornée de G qui est de dimension finie (c'est un fermé et ses fermés bornés sont compacts). On peut donc extraire une sous-suite qui converge dans G, $\lim_{k\to\infty} g^{n_k} = g \in G$. On a alors

$$\lim_{k\to\infty} f^{n_k} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{\|x_F^{n_k}\|_E} x - g^{n_k} \right) = -g.$$

Comme F est fermé par hypothèse, on doit avoir $-g \in F$. Mais dans ce cas $g \in F \cap G = \{0\}$ et $\lim_{k\to\infty} f^{n_k} = 0$, ce qui contredit $\|f^{n_k}\|_E = 1$. ■

Proposition 4.2.11. *Une forme linéaire sur un espace vectoriel normé* $(E, \|\ \|_E)$ *est continue si et seulement si son noyau est fermé.*

Preuve : Soit φ une forme linéaire sur E.
$\boxed{\Rightarrow}$ Si φ est continue alors $\operatorname{Ker}\varphi = \varphi^{-1}(\{0\})$ est un sous-espace vectoriel fermé de E.
$\boxed{\Leftarrow}$ Si $\operatorname{Ker}\varphi$ est un sous espace vectoriel fermé, on a deux cas :

a) $\operatorname{Ker}\varphi = E$ et alors $\varphi \equiv 0$ est continue sur E.

b) Il existe $u \in E$ tel que $\varphi(u) \neq 0$. On a alors $E = \operatorname{Ker}\varphi \oplus \mathbb{K}u$ (en effet si $x \in E$, le vecteur $x - \frac{\varphi(x)}{\varphi(u)} u \in \operatorname{Ker}\varphi$). On est dans la situation de la Proposition 4.2.10 et la projection $\Pi = \Pi_{\mathbb{K}u, \operatorname{Ker}\varphi}$ est continue tandis que l'application linéaire $\theta : \mathbb{K}u \to \mathbb{K}$ donnée par $\theta(\lambda u) = \lambda$ est continue ($\mathbb{K}u$ est de dimension 1). En conséquence la forme linéaire φ est égale à $\varphi(u)\theta \circ \Pi$. Elle est continue.

■

4.3 Espace vectoriel normé quotient

Si les sous-espaces vectoriels fermés n'ont pas nécessairement de supplémentaire dans l'espace ambiant, les espaces quotients ont toutefois de bonnes propriétés. On rappelle que si F est un sous-espace vectoriel de E, l'espace vectoriel quotient E/F est donné par la relation d'équivalence $(x \sim y) \Leftrightarrow (x - y \in F)$. Les classes d'équivalence ne sont rien d'autres que les sous-espaces affines $\widehat{\dot{x}} = x + F$ et en notant $\pi : E \to E/F$ la projection associée à cette relation d'équivalence, on a $\pi(x) = x + F \in E/F$ pour $x \in E$. On sait que pour que la topologie quotient soit séparée les classes d'équivalence $x + F$ doivent être fermées dans E (cf. Proposition 1.8.7). L'hypothèse que F est fermé est donc toute naturelle.

Proposition 4.3.1. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de $(E, \|\ \|)$, alors la quantité*

$$\left\|\dot{\widehat{x}}\right\|_{E/F} = \inf_{f\in F} \|x - f\|$$

définit une norme sur E/F. De plus la topologie associée à cette norme est la topologie quotient.

Preuve : Pour $x \in E$, la quantité $\inf_{f\in F} \|x - f\|$ n'est rien d'autre que la distance $d(x, F)$. Elle ne dépend pas du choix de x dans sa classe car si $x' \in \dot{\widehat{x}} = x + F$ on a

$$d(x', F) = \inf_{f\in F} \|x' - f\| = \inf_{f\in F} \|x - (x - x' + f)\| = d(x, x - x' + F) = d(x, F).$$

Il s'agit bien d'une application de E/F dans $\mathbb{R}_+$.

Vérifions que $\left\|\dot{\widehat{x}}\right\|_{E/F} = d(x, F)$ est bien une norme.

i) Pour $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on a

$$\begin{aligned}\left\|\lambda\dot{\widehat{x}}\right\|_{E/F} = d(\lambda x, F) = \inf_{f\in F} \|\lambda x - f\| &= |\lambda| \inf_{f\in F} \left\|\lambda x - \frac{1}{\lambda} f\right\| \\ &= |\lambda|\, d\left(x, \frac{1}{\lambda} F\right) = |\lambda| \left\|\dot{\widehat{x}}\right\|_{E/F}.\end{aligned}$$

Pour $\lambda = 0$, on rappelle que $0.\dot{\widehat{x}} = \dot{\widehat{0}}$.

ii) La distance $d(x, F)$ est nulle si et seulement si x appartient à $\overline{F} = F$ (cf. Exercice 16), autrement dit si et seulement si $\dot{\widehat{x}} = \dot{\widehat{0}}$.

iii) Pour l'inégalité triangulaire, on prend deux vecteurs x_1 et x_2 de E et on sait, par définition de $\|\ \|_{E/F}$, trouver pour $\varepsilon > 0$ arbitraire deux vecteurs $f_1 \in F$ et $f_2 \in F$ tels que

$$\|x_i - f_i\| \leq \left\|\dot{\widehat{x_i}}\right\|_{E/F} + \varepsilon.$$

On a alors avec l'inégalité triangulaire pour $\|\ \|$

$$\begin{aligned}\left\|\dot{\widehat{x_1}} + \dot{\widehat{x_2}}\right\| = \inf_{f\in F} \|x_1 + x_2 - f\| &\leq \|x_1 + x_2 - (f_1 + f_2)\| \\ &\leq \|x_1 - f_1\| + \|x_2 - f_2\| \left\|\dot{\widehat{x_1}}\right\|_{E/F} + \left\|\dot{\widehat{x_2}}\right\|_{E/F} + 2\varepsilon.\end{aligned}$$

On termine en faisant tendre ε vers 0.

La quantité $\| \ \|_{E/F}$ définit bien une norme sur E/F.

Comme F est fermé, on sait que l'application $x \in E \to d(x, F) \in \mathbb{R}_+$ est continue. Par conséquent, l'image réciproque d'une boule ouverte de E/F par la projection $\pi : E \to E/F$ est un ouvert de E. Il s'ensuit que la topologie associée à la norme $\| \ \|_{E/F}$ est moins fine que la topologie quotient. Inversement, si V est un voisinage de $\widehat{\dot{x}}$ pour la topologie quotient de E/F, alors $\pi^{-1}(V)$ est un voisinage de x invariant par les translations parallèles à F. Pour une boule ouverte dans E, $B(x, \rho)$, incluse dans $\pi^{-1}(V)$, l'invariance par translation entraîne que tout le cylindre

$$\underset{f \in F}{\cup} (f + B(x, \rho)) = \{y \in E, \ d(y - x, F) < \rho\}$$

est inclus dans $\pi^{-1}(V)$. En projetant cela donne

$$\left\{ \widehat{\dot{y}} \in E/F, \ \left\| \widehat{\dot{y}} - \widehat{\dot{x}} \right\| < \rho \right\} \subset V$$

de telle sorte que V est un aussi voisinage de $\widehat{\dot{x}}$ pour la topologie de la norme $\| \ \|_{E/F}$. La topologie quotient est moins fine que la topologie associée à la norme $\| \ \|_{E/F}$. Les deux topologies coïncident. ■

Chapitre 5

Espaces métriques complets

Jusqu'à présent on pouvait parler de la convergence d'une suite seulement quand on connaissait a priori la limite. La complétude qui est une notion métrique permet de prédire l'existence d'une limite à partir de propriétés de la suite. Dans tout ce chapitre on se placera dans le cadre d'un espace métrique (X, d).

5.1 Suites de Cauchy, espaces métriques complets, exemple fondamental

5.1.1 Suites de Cauchy

Définition 5.1.1. *On dit qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace métrique (X, d) est de Cauchy si elle vérifie*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon,\ d(x_m, x_n) \leq \varepsilon.$$

Proposition 5.1.2. *Une suite de Cauchy est toujours bornée.*

Preuve : Il existe N_1 tel que : $\forall m, n \geq N_1, d(x_m, x_n) \leq 1$. En particulier on a pour $n \geq N_1$, $d(x_n, x_{N_1}) \leq 1$ et en posant $M = \max_{k<N_1} d(x_k, x_{N_1})$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, d(x_n, x_{N_1}) \leq \max\{M, 1\}.$$

■

L'argument suivant est très commode.

Proposition 5.1.3. *Toute suite de Cauchy admettant une sous-suite convergente converge.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (X,d) telle que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l \in X$. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ et $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tels que

$$\left(\forall m,n \geq N_\varepsilon,\ d(x_m,x_n) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right) \text{et } \left(\forall k \geq k_\varepsilon,\ d(x_{n_k},l) \leq \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

On prend $N'_\varepsilon = \max\{N_\varepsilon, n_{k_\varepsilon}\}$ et on a pour $n \geq N'_\varepsilon$

$$d(x_n,l) \leq d(x_n,x_{n_{k_\varepsilon}}) + d(x_{n_{k_\varepsilon}},l) \leq \varepsilon.$$

Ainsi $\lim_{n\to\infty} x_n = l$. ■

5.1.2 Espace métrique complet

On commence par un résultat assez simple

Proposition 5.1.4. *Toute suite convergente est de Cauchy.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de (X,d) telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in X$. Pour $\varepsilon > 0$ il existe $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n,l) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour $n \geq N_\varepsilon$. On a alors

$$\forall m,n \geq N_\varepsilon,\ d(x_m,x_n) \leq d(x_m,l) + d(l,x_n) \leq \varepsilon$$

et la suite est de Cauchy. ■

Un espace métrique complet est un espace métrique ou la réciproque est vraie.

Définition 5.1.5. *On dit que l'espace métrique (X,d) est complet si toute suite de Cauchy converge.*

5.1.3 Exemple fondamental

Théorème 5.1.6. $\mathbb{R}$ *est complet.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\mathbb{R}$. Elle est bornée : $\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n| \leq M$. On peut donc extraire une sous-suite qui converge dans $\mathbb{R}$ (puisque $[-M,M]$ est compact). Mais alors la Proposition 5.1.3 donne la convergence de toute la suite.

■

REMARQUE 5.1.7. On peut faire une démonstration sans utiliser l'argument de compacité et en revenant à la propriété de la borne supérieure de $\mathbb{R}$. Il suffit pour cela de montrer que les suites $y_n = \inf_{p\geq n} x_p$ et $z_n = \sup_{p\geq n} x_p$ sont des suites adjacentes.

EXEMPLE 5.1.8. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet. On peut approcher un irrationnel $r \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ par une suite de rationnels $x_n = \frac{p_n}{q_n}$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc dans $\mathbb{Q}$. Elle ne converge pas dans $\mathbb{Q}$ puisque $r \notin \mathbb{Q}$.

5.1.4 Un autre exemple

Théorème 5.1.9. *Si X est un ensemble et (X', d') est un espace métrique complet, alors $\mathcal{F}_b(X; X')$ muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Preuve : Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon,\ \sup_{x\in X} d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon.$$

En particulier pour $x \in X$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X', d') qui est complet et admet donc une limite dans X' que l'on note $f(x)$.
On a ainsi défini une fonction $f : X \to X'$. Vérifions qu'elle est bornée sur X. Il existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $d_\infty(f_{N_1}, f_n) \leq 1$ pour tout entier $n \geq N_1$. On a alors pour $y_0 \in X'$ (on note également y_0 la fonction constante $X \to X'$ associée)

$$\forall x \in X,\ \forall n \geq N_1,\ d'(y_0, f_n(x)) \leq d'(y_0, f_{N_1}(x)) + 1 \leq d_\infty(y_0, f_{N_1}) + 1$$

et en prenant la limite $n \to \infty$ (pour $x \in X$ fixé) on obtient

$$\forall x \in X,\ d'(y_0, f(x)) \leq d_\infty(y_0, f_{N_1}) + 1$$

et $f \in \mathcal{F}_b(X; X')$.
Vérifions enfin que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers f dans $\mathcal{F}_b(X; X')$ pour la distance de la convergence uniforme d_∞. Pour $\varepsilon > 0$ et $x \in X$, on a l'inégalité $d'(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. On prend la limite $m \to \infty$ à $x \in X$ fixé et on obtient

$$\forall x \in X,\ \forall n \geq N_\varepsilon,\ d'(f_n(x), f(x)) \leq \varepsilon,$$

ce qui s'écrit aussi, puisque N_ε ne dépend pas de x, $d_\infty(f_n, f) \leq \varepsilon$. Ainsi on a $\lim_{n\to\infty} d_\infty(f_n, f) = 0$ et la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans $(\mathcal{F}_b(X; X'), d_\infty)$. ■

REMARQUE 5.1.10. La démonstration ci-dessus procède d'une méthode assez générale pour établir la complétude d'un espace métrique : 1) Identifier une limite possible pour la suite de Cauchy (souvent en utilisant un résultat de complétude connu et en faisant intervenir une topologie mieux connue) ; 2) Vérifier que l'éventuelle limite est bien dans l'ensemble 3) Vérifier que la suite converge bien vers cette limite pour la distance de départ. Pour 2) et 3) il faut bien faire attention aux dépendances par rapport à ε (et $x \in X$ pour des espaces de fonctions) et travailler avec des inégalités larges (plus facile pour passer à la limite).

5.2 Propriétés des espaces complets

5.2.1 Fermés de complets

Proposition 5.2.1. *Dans un espace métrique complet (X,d), les sous-espaces complets sont les fermés.*

Preuve : Soit F une partie d'un espace métrique complet (X,d).
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons F fermé. Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (F,d), c'est une suite de Cauchy de (X,d). Elle admet donc une limite dans X. Mais comme F est fermé cette limite appartient à F.
$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons (F,d) complet. Si une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de F admet une limite $l\in X$, alors elle est de Cauchy dans (X,d) et donc dans (F,d). Comme (F,d) est complet elle converge dans F et comme (X,d) est séparé cela entraîne $l\in F$. F est fermé.

■

Corollaire 5.2.2. *Si $(X,\mathcal{T})$ est un espace topologique et (X',d') est un espace métrique complet, l'espace $\mathcal{C}_b^0(X;X')$ des fonctions continues bornées de X dans X' muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est complet.*

Preuve : D'après le Théorème 1.5.26, c'est une partie fermée de l'espace métrique complet $(\mathcal{F}_b(X;X'),d_\infty)$. Il est donc complet. ■

Corollaire 5.2.3. *Soit (X,d) un espace métrique. Une intersection quelconque de sous-espaces complets est complète.*

Preuve : L'intersection $\cap_{i\in I}F_i$ est une intersection de fermés donc un fermé de l'espace complet (F_{i_0},d). C'est un complet. ■

5.2.2 Union de complets et complétude des compacts

Pour ces deux cas, la complétude s'obtient en montrant la convergence d'une sous-suite d'une suite de Cauchy.

Proposition 5.2.4. *Soit (X,d) un espace métrique. Une union finie de sous-espaces complets de (X,d) est complète.*

Preuve : Soit $(A_i)_{i\in\{1,\dots,N\}}$ une famille finie de parties complètes de (X,d). Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (X,d), il existe $i_0\in\{1,\dots,N\}$ et une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $x_{n_k}\in A_{i_O}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Dans ce cas la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de (A_{i_0},d) qui est complet. On a trouvé une sous-suite convergente et on conclut avec la Proposition 5.1.3. ■

Proposition 5.2.5. *Tout espace métrique compact est complet.*

Preuve : Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'un espace métrique compact (X,d). On peut en extraire une sous-suite qui converge dans (X,d) et on conclut avec la Proposition 5.1.3. ∎

5.2.3 Produit d'espaces complets

Proposition 5.2.6. *Un produit fini ou dénombrable d'espaces métriques complets est complet.*

Preuve : Le cas fini a déjà été traité dans le Théorème 5.1.9 puisque pour les produits finis convergence simple (topologie produit) et convergence uniforme coïncident. Il reste à traiter le cas dénombrable. Soit $(X_n,d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques complets. On note d la distance sur $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$ donnée par

$$d(x,y)=\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}\frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$$

pour laquelle la topologie associée est la topologie produit. Soit $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $\left(\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n, d\right)$. Pour $n\in\mathbb{N}$ fixé et $k,l\in\mathbb{N}$ assez grands, on a $d_n(x_n^k,x_n^l)\le\frac{2^n d(x^k,x^l)}{1-2^n d(x^k,x^l)}$. Ainsi la suite $(x_n^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X_n,d_n) et donc converge dans X_n. Ainsi la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge pour la topologie de la convergence simple dans $\prod_{n\in\mathbb{N}} X_n$, mais cette topologie n'est rien d'autre que la topologie associée à d. ∎

EXEMPLE 5.2.7. Ainsi $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, tous les espaces vectoriels normés de dimension finie et leurs parties fermées sont des espaces métriques complets. Si on met la distance d sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ comme ci-dessus, c'est un espace métrique complet mais cette distance n'est pas associée à une norme (cf. Exercice 116)

5.3 Espaces de Banach

On travaille avec le corps $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 5.3.1. *On appelle espace de Banach un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé complet.*

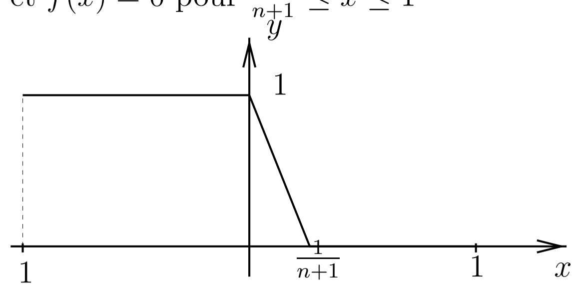
On a vu au paragraphe précédent la

Proposition 5.3.2. *Les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie sont des espaces de Banach.*

Proposition 5.3.3. *Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique et $(E, \| \ \|_E)$ est un espace de Banach alors $\mathcal{F}_b(X; X')$ et $\mathcal{C}^0_b(X; X')$ munis de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} \|f(x)\|_E$ sont des espaces de Banach.*

Preuve : Déjà fait avec le Corollaire 5.2.2). Il suffit de prendre $(X', d') = (E, \| \ \|_E)$. ■

EXEMPLE 5.3.4. L'espace $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni de $\| \ \|_\infty$ est un espace de Banach. En revanche $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\| \ \|_1$ n'est pas complet. On prend la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée par $f_n(x) = 1$ pour $x \le 0$, $f_n(x) = 1 - (n + 1)x$ pour $0 \le x \le \frac{1}{n+1}$ et $f(x) = 0$ pour $\frac{1}{n+1} \le x \le 1$



On a alors

$$\|f_n - f_m\|_1 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f_m(x)| \, dx \le \frac{1}{2(n+1)} + \frac{1}{2(m+1)} \le \varepsilon$$

pour $m, n \ge \varepsilon^{-1}$. La suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy mais ne peut pas converger dans $\mathcal{C}^0([-1, 1]; \mathbb{R})$ pour la norme $\| \ \|_1$. Une fonction qui vaut 1 sur $[-1, 0[$ et 0 sur $]0, 1]$ n'est pas continue.

La complétude d'un espace vectoriel normé est très utile pour étudier la convergence des séries.

Définition 5.3.5. *Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ on dit qu'une série $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ est absolument convergente (ou normalement convergente) si $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < +\infty$.*

Dans la définition ci-dessus on ne dit pas que la série converge mais que la série des normes converge. La convergence de la série est éventuellement une conséquence du

Théorème 5.3.6. *Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé $(E, \| \ \|_E)$ est un espace de Banach si et seulement si toute série absolument convergente converge dans E,*

$$\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty\right) \Rightarrow \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n \in E\right).$$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons $(E, \| \ \|_E)$ complet. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E telle que $\sum_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|_E < \infty$. Alors les sommes $S_N = \sum_{n\le N} x_n$ vérifient pour

$M \geq N$
$$\|S_M - S_N\|_E = \left\| \sum_{n=N+1}^{M} x_n \right\|_E \leq \sum_{n=N+1}^{M} \|x_n\|_E .$$
Ainsi, la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de Cauchy dans $(E, \|\ \|)$ et donc converge.
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que toute série absolument convergente converge. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(E, \|\ \|_E)$. On peut extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ telle que : $\forall k \in \mathbb{N},\ \left\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\right\| \leq 2^{-k}$ (il suffit de prendre $n_k = N_{2^{-k}}$). On pose alors $u_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$ pour $k \in \mathbb{N}$ et la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ est absolument convergente donc converge dans $(E, \|\ \|_E)$ par hypothèse. Or on a $x_{n_{k+1}} - x_{n_0} = \sum_{j=0}^{k} u_j$ et on en déduit que la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $(E, \|\ \|_E)$. Avec la Proposition 5.1.3 on obtient $\lim_{n\to\infty} x_n = x_{n_0} + \sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$. ∎

5.4 Applications de la complétude

5.4.1 Un exemple avec les séries

On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, d'une norme d'algèbre (par exemple $\|A\| = \max\limits_{\|X\|_\infty = 1} \|AX\|_\infty$).

Proposition 5.4.1. *Si $f(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors la série $f(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n A^n$ converge dès que $\|A\| < R$.*

Preuve : Puisque $\|\ \|$ est une norme d'algèbre, on a pour $n \in \mathbb{N}$, $\|c_n A^n\| = |c_n|\,\|A^n\| \leq |c_n|\,\|A\|^n$. Pour $\|A\| < R$, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |c_n|\,\|A\|^n < +\infty$ et la série $f(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} c_n A^n$ est absolument convergente donc convergente. ∎

EXEMPLE 5.4.2. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ on peut définir e^{tA}, e^{itA}, $\cos(tA)$,…et pour $\|A\| < 1$ ($\|\ \|$ norme d'algèbre), $(\mathrm{Id} + A)^{-1}$ et $\ln(\mathrm{Id} + A)$.

5.4.2 Prolongement

Théorème 5.4.3. ***(Théorème de prolongement)*** *Soit (X, d), (X', d') deux espaces métriques, avec (X', d') complet et soit $Y \subset X$. Si une application $f : Y \to X'$ est uniformément continue et si Y est dense dans X, alors f admet un unique prolongement par continuité $\tilde{f} : X \to X'$.*

Preuve : D'après la Proposition 1.5.24, il s'agit de montrer que pour tout $x \in X$ la limite $\lim\limits_{\substack{y\to x \\ y\in Y}}$ existe dans X'. Comme (X, d) est un espace métrique on peut utiliser les suites $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y telles que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x \in X$. Une telle suite est nécessairement de Cauchy dans (X,d) et donc dans(Y,d). Comme f est uniformément continue, la suite image $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X',d') qui est complet. Par conséquent cette suite image $(f(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans (X',d') et ce pour toute suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Y convergeant vers x. La Proposition 1.4.14 assure l'indépendance de la limite par rapport au choix de la suite et nous dit que la limite $\lim\limits_{\substack{y\to x\\ y\in Y}} f(y)$ existe.

■

Comme on sait que les applications linéaires continues sont nécessairement Lipschitziennes et donc uniformément continues, la version du théorème ci-dessus dans les espaces vectoriels normés est

Corollaire 5.4.4. *Si $(E,\|\ \|_E)$ est un espace vectoriel normé, $(F,\|\ \|_F)$ est un espace de Banach et si D est un sous-espace vectoriel dense de E, toute application linéaire continue $(D,\|\ \|_E)\to(F,\|\ \|_F)$ se prolonge en une application linéaire continue de $(E,\|\ \|_E)$ dans $(F,\|\ \|_F)$.*

EXEMPLE 5.4.5. L'intégrale définie de $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, $\int_0^1 f(t)\ dt$ est continue quand on munit $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ de la norme $\|\ \|_1$. Comme $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ est dense dans $(L^1([0,1];\mathbb{R}),\|\ \|_1)$ qui est complet (cf. Cours d'Intégration). elle se prolonge de manière unique en une application linéaire continue à $L^1([0,1];\mathbb{R})$.

5.4.3 Point fixe des applications contractantes

Théorème 5.4.6. ***(Picard)*** *Soit (X,d) un espace métrique complet. Si l'application $f:X\to X$ est une application contractante*

$$\forall x,y\in X,\ d\left(f(y),f(x)\right)\le\alpha\ d(y,x),\quad \underline{\alpha<1},$$

alors elle admet un unique point fixe $x\in X$, $f(x)=x$. De plus toute suite récurrente donnée par $x_{n+1}=f(x_n)$ et $x_0\in X$ converge géométriquement vers x

$$\forall n\in\mathbb{N}, d(x_n,x)\le d(x_0,x)\alpha^n.$$

Preuve : 1) Unicité : Supposons que $x_1,x_2\in x$ soient deux points fixes de f. On a alors

$$d(x_1,x_2)=d(f(x_2),f(x_1))\le\alpha d(x_2,x_1).$$

L'inégalité $(1-\alpha)d(x_1,x_2)\le 0$ avec $\alpha<1$ entraîne $x_2=x_1$.
2) Existence : On va construire x par une méthode d'approximation successive. On considère une suite récurrente donnée par $x_{n+1}=f(x_n)$ avec $x_0\in X$. Pour $m,n\in\mathbb{N}$ on a en supposant $n\ge m$

$$d(x_n,x_m)\le\sum_{k=m}^{n}d\left(x_{k+1},x_k\right)=\sum_{k=m}^{n-1}d\left[f^k(x_1),f^k(x_0)\right].$$

La propriété de contraction avec $\alpha < 1$ donne

$$d\left[f^k(x_1), f^k(x_0)\right] \leq \alpha d\left[f^{k-1}(x_1), f^{k-1}(x_0)\right] \leq \alpha^k d(x_1, x_0)$$

puis

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k d(x_1, x_0) \leq \frac{\alpha^m}{1-\alpha} d(x_1, x_0).$$

Pour $\varepsilon > 0$, on prend $N_\varepsilon > \frac{\ln((1-\alpha)\varepsilon/d(x_0,x_1))}{\ln(\alpha)}$ et on a pour $m, n \geq \varepsilon$, $d(x_m, x_n) \leq \varepsilon$. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans (X, d). Elle admet une limite $x \in X$ qui doit vérifier puisque f est continue $f(x) = x$.
3) Convergence géométrique : Pour une suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ et $x_0 \in X$ on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ d(x_n, x) = d\left[f^n(x_0), f^n(x)\right] \leq \alpha^n d(x_0, x)$$

et la convergence vers x est géométrique de raison α. ■

5.5 Complété

Théorème 5.5.1. *Si (X, d) est un espace métrique, il existe un espace métrique $(\tilde{X}, \tilde{d})$ complet dont (X, d) est un sous-espace dense. Cet espace est unique à isométrie près. On l'appelle le complété de (X, d).*

Preuve : 1) Unicité : Supposons que (X, d) soit un sous-espace dense de deux espaces métriques $(\tilde{X}_1, \tilde{d}_1)$ $(\tilde{X}_2, \tilde{d}_2)$ dont les distances d_1 et d_2 prolongent d. Le plongement $i_2 : (X, d) \to (\tilde{X}_2, \tilde{d}_2)$ est une isométrie. En particulier elle est uniformément continue tandis que X est dense dans $(\tilde{X}_1, \tilde{d}_1)$ et tandis que $(\tilde{X}_2, \tilde{d}_2)$ est complet. Elle se prolonge donc de façon unique en une isométrie de $i_2 : (\tilde{X}_1, \tilde{d}_1) \to (\tilde{X}_2, \tilde{d}2)$. De même l'isométrie $i_1 : (X, d) \to (\tilde{X}_1, \tilde{d}_1)$ a un unique prolongement isométrique i_1 de $\tilde{X}_2$ dans $\tilde{X}_1$. Enfin comme $\tilde{i}_1 \circ \tilde{i}_2\Big|_X = \mathrm{Id}_X$, on a par unicité du prolongement continu $\tilde{i_1} \circ \tilde{i_2} = \mathrm{Id}_{\tilde{X}_1}$ L'isométrie $\tilde{i}_1$ est surjective donc une bijection isométrique de $\tilde{X}_2$ sur $\tilde{X}_1$. Les espaces $(\tilde{X}_1, \tilde{d}_1)$ et $(\tilde{X}_2, \tilde{d}_2)$ sont identiques.
2) Existence : On considère $\mathcal{C}_X$ l'ensemble des suites de Cauchy de (X, d). Si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de Cauchy de X alors l'écart

$$\begin{aligned}|d(x_n, y_n) - d(x_m, y_m)| &\leq |d(x_n, y_n) - d(x_n, y_m)| + |d(x_n, y_m) - d(x_m, y_m)| \\ &\leq d(y_n, y_m) + d(x_n, x_m)\end{aligned}$$

est plus petit que $\varepsilon > 0$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$ avec N_ε assez grand puisque x et y sont deux suites de Cauchy. Ainsi la suite $(d(x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et donc converge. On pose alors

$$\forall x, y \in \mathcal{C}_X,\ \delta(x, y) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n).$$

Par passage à la limite, on a pour tout $x, y, z \in \mathcal{C}_X$

$$\delta(y,x) = \delta(x,y) \quad \text{et } \delta(x,z) \leq \delta(x,y) + \delta(y,z).$$

Afin de définir une distance à partir de δ, on met sur $\mathcal{C}_X$ la relation d'équivalence

$$(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\delta(x,y) = 0) \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0\right),$$

et on prend pour $\tilde{X}$ l'ensemble quotient $\mathcal{C}_X \big/ \mathcal{R}$ et pour $\tilde{d}$ la fonction

$$\begin{aligned} \tilde{d}: \quad & \tilde{X} \times \tilde{X} \to \mathbb{R}_+ \\ & (\dot{\widehat{x}}, \dot{\widehat{y}}) \to \tilde{d}(\dot{\widehat{x}}, \dot{\widehat{y}}) = \delta(x,y). \end{aligned}$$

La quantité $\delta(x,y)$ ne dépend pas du choix de x dans la classe d'équivalence $\dot{\widehat{x}}$ et du choix de y dans sa classe $\dot{\widehat{y}}$ grâce à l'inégalité triangulaire. Il reste à vérifier que $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est un espace métrique complet dans lequel X est inclus et dense.

a) $\tilde{d}$ est une distance sur $\tilde{X}$. La symétrie et l'inégalité triangulaire sont héritées de δ et l'équivalence $\left(\tilde{d}(\dot{\widehat{x}}, \dot{\widehat{y}}) = 0\right) \Leftrightarrow \left(\dot{\widehat{x}} = \dot{\widehat{y}}\right)$ vient du passage au quotient.

b) $X \subset \tilde{X}$: Pour $a \in X$ on considère la suite constante $x[a] = (x_n = a)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est un élément de $\mathcal{C}_X$ et on identifie a et $\dot{\widehat{x[a]}}$. De plus le plongement de (X,d) dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$ est isométrique puisque $\tilde{d}(\dot{\widehat{x[a]}}, \dot{\widehat{x[b]}}) = \delta(x[a], x[b]) = d(a,b)$.

c) Soit $(\dot{\widehat{x^n}})_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de $(\tilde{X}, \tilde{d})$. En prenant des représentants cela revient à considérer une suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}_X$ telle que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall m, n \geq N_\varepsilon,\ \delta(x^m, x^n) \leq \varepsilon.$$

i) Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé $x^n = (x_k^n)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy de X et il existe $k_n \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall k, k' \geq k_n, d(x_k^n, x_{k'}^n) \leq \frac{1}{n+1}$. Procédé diagonal : On considère la suite $x = (x_{k_n}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de X.

ii) $x \in \mathcal{C}_X$: Pour $m, n, k \in \mathbb{N}$, on écrit

$$d(x_n, x_m) = d\left(x_{k_n}^n, x_{k_m}^m\right) \leq d(x_{k_n}^n, x_k^n) + d(x_k^n, x_k^m) + d(x_k^m, x_{k_m}^m)$$

et en prenant $k \geq \max\{k_n, k_m\}$,

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + d(x_k^n, x_k^m).$$

Pour $\varepsilon > 0$ il existe N_ε tel que $\delta(x^n, x^m) \leq \frac{\varepsilon}{4}$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. Pour de tels m et n on a alors par définition de δ, $d(x^n_k, x^m_k) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ pour k assez grand. Ainsi, on obtient

$$d(x_n, x_m) \leq \frac{1}{n+1} + \frac{1}{m+1} + \frac{\varepsilon}{2}$$

et on peut trouver $N'_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N'_\varepsilon$.

iii) $\dot{\widehat{x}} = \lim_{n\to\infty} \dot{\widehat{x^n}}$: Il suffit de montrer $\lim_{n\to\infty} \delta(x^n, x) = 0$. Pour $n, j \in \mathbb{N}$ on a

$$d(x^n_j, x_j) \leq d(x^n_j, x_n) + d(x_n, x_j) = d\left(x^n_j, x^n_{k_n}\right) + d(x_n, x_j).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Avec les notations précédentes, on a pour $n \geq N'_\varepsilon$ et $j \geq \max\{k_n, N'_\varepsilon\}$

$$d(x^n_j, x_j) \leq \frac{1}{n+1} + \varepsilon.$$

En prenant la limite quand $j \to \infty$ on obtient

$$\forall n \geq N'_\varepsilon,\ \delta(x^n, x) = \lim_{j\to\infty} d(x^n_j, x_j) \leq \frac{1}{n+1} + \varepsilon.$$

Et en prenant $n \geq N''_\varepsilon$ avec N''_ε assez grand cela donne $\delta(x^n, x) \leq 2\varepsilon$.

d) X est dense dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$: Si $\dot{\widehat{x}}$ est un élément quelconque de $\tilde{X}$, on prend un représentant $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{C}_X$ et on considère la suite de suites constantes $(x[x_n])_{n\in\mathbb{N}}$ (la classe de la suite constante $x[a] \in \mathcal{C}_X$ s'identifiant avec l'élément a de X). On a alors

$$\delta\left(x[x_n], x\right) = \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_k) \leq \varepsilon$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq N_\varepsilon$. On a donc $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \dot{\widehat{x[x_n]}} = \dot{\widehat{x}}$ dans $(\tilde{X}, \tilde{d})$.

$\blacksquare$

REMARQUE 5.5.2. On a vu que $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 f(t)\, dt$ n'est pas complet (cf. Exemple 5.3.4). Le Théorème ci-dessus dit de façon abstraite qu'il existe un complété. Un objectif de la Théorie de la Mesure et de l'Intégration est d'identifier ce complété comme un espace de "fonctions". Le résultat (cf. cours d'Intégration) est que ce complété est $L^1([0,1], dx)$, l'espace des fonctions intégrables quotienté par la relation d'équivalence "égalité presque partout".

Chapitre 6

Propriétés des espaces de fonctions continues

Si $(X, \mathcal{T})$ est un espace topologique compact, on peut munir $\mathcal{C}^0(X; \mathbb{K})$ de la norme de la convergence uniforme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$ (où le sup est en fait un max). Dans ce chapitre, nous présentons deux résultats topologiques, de densité (Théorème de Stone-Weierstrass) et de compacité (Théorème d'Ascoli), sur des familles de fonctions continues. Il s'agit de résultats classiques qui ont de nombreuses conséquences et applications.

6.1 Théorème de Stone-Weierstrass

Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact. On sait que $(\mathcal{C}^0(X; \mathbb{K})$ muni des opérations $+, .\lambda, \times$ et de la topologie de la convergence uniforme associée à la norme $\| \ \|_\infty)$ est une algèbre de Banach. Une question se pose au sujet de la densité de ses sous-algèbres : Sont-elles denses ? Par exemple : Peut-on approcher uniformément toute fonction continue : $[0, 1] \to \mathbb{R}$ par des fonctions polynômes (les fonctions polynômes forment une sous-algèbre de $\mathcal{C}([0, 1]; \mathbb{K}))$? Peut-on approcher toute fonction continue périodique par des polynômes trigonométriques. . .Le Théorème de Stone-Weierstrass apporte une réponse assez générale à cette question.

6.1.1 Enoncé et conséquences

Le résultat de base porte sur les fonctions continues à valeurs réelle puisque la démonstration utilise de façon cruciale la relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. La généralisation au cas complexe donnée en corollaire s'obtient en décomposant en partie réelle et imaginaire.

Théorème 6.1.1. ***(Stone-Weierstrass)*** *Soit A une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ vérifiant*

1) *A sépare les points, i.e : Pour tout couple de points distincts $(x,y) \in X \times X$, $x \neq y$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq f(y)$.*

2) *Pour tout $x \in X$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$.*

Alors A est dense dans $(\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$: $\overline{A}^{\| \ \|_\infty} = \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$.

Corollaire 6.1.2. *Si K est une partie compacte de $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ est dense dans $(\mathcal{C}^0(K;\mathbb{R}), \| \ \|_\infty)$.*

Preuve : L'algèbre des polynômes sur $\mathbb{R}$ à n variables définit bien une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(K;\mathbb{R})$ en associant à tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$ la fonction polynôme $P(x) = P(x_1,\ldots,x_n)$ qui dépend continûment de $x \in K$. Vérifions les hypothèses du Théorème 6.1.1
1) Pour $x,y \in K$ distincts, il existe $i \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $x_i \neq y_i$. On prend $P = X_i$ et on a $X_i(x) = x_i \neq y_i = X_i(y)$.
2) Pour $x \in K$, on a $1(x) = 1 \neq 0$ avec $1 \in \mathbb{R}[X_1,\ldots,X_n]$. ■

Corollaire 6.1.3. *Si A est une sous-algèbre de $\mathcal{C}(X;\mathbb{C})$ vérifiant*

1) *A sépare les points.*

2) *Pour tout $x \in X$, il existe une fonction $f \in A$ telle que $f(x) \neq 0$.*

3) *A est globalement invariant par conjugaison complexe : Pour une fonction $f \in A$, la fonction complexe-conjuguée $\overline{f}$ est aussi élément de A.*

Alors A est dense dans $(\mathcal{C}^0(X;\mathbb{C}); \| \ \|_\infty)$.

Preuve : L'idée est tout simplement de se ramener au cas réel en s'appuyant sur la condition 3). On note $A_r = A \cap \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$. Pour tout $f \in A$, la partie réelle $\mathbb{R}\mathrm{e}\, f = \frac{1}{2}(f + \overline{f})$ et la partie imaginaire $\mathcal{I}\mathrm{m}\, f = \frac{1}{2i}(f - \overline{f})$ appartiennent à A_r (puisque $\overline{f} \in A$). De plus comme A vérifie les hypothèses 1) et 2), on s'assure que A_r vérifie 1) et 2) en considérant $\mathbb{R}\mathrm{e}\, f$ ou $\mathcal{I}\mathrm{m}\, f$. Le Théorème de Stone-Weierstrass 6.1.1 réel, nous dit que dans ce cas $\overline{A_r}^{\| \ \|_\infty} = \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$.

Soit $g \in \mathcal{C}^0(X;\mathbb{C})$, on écrit $g = \mathbb{R}\mathrm{e}\, g + i\,\mathcal{I}\mathrm{m}\, g$ et on approche en norme de la convergence uniforme $\mathbb{R}\mathrm{e}\, g \in \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ et $\mathcal{I}\mathrm{m}\, g \in \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ par des éléments de A_r

$$\mathbb{R}\mathrm{e}\, g = \lim_{n\to\infty} f_{n,R} \quad \text{et} \quad \mathcal{I}\mathrm{m}\, g = \lim_{n\to\infty} f_{n,I}.$$

On a alors la convergence uniforme $\lim_{n\to\infty}(f_{n,R} + i f_{n,I}) = g$ avec $f_{n,R} + i f_{n,I} \in A$. On a donc $\overline{A}^{\| \ \|_\infty} = \mathcal{C}^0(X;\mathbb{C})$. ■

Corollaire 6.1.4. *Si K est un compact de $\mathbb{C}^n$, alors $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n}]$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{C})$.*

Preuve : Comme pour le Corollaire 6.1.2, $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n}]$ définit bien une sous-algèbre de $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{C})$ si on associe à $P\in\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n}]$ la fonction continue sur K, $P(x,\overline{x})=P(x_1,\ldots,x_n,\overline{x_1},\ldots,\overline{x_n})$. Les hypothèses 1) et 2) se vérifient de la même manière.
Pour l'hypothèse 3), il est clair que si $f(x)=P(x,\overline{x})\in\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n}]$ alors sa fonction complexe conjuguée $\overline{f}(x)=\overline{f(x)}=\overline{P}(\overline{x},x)$ appartient aussi à $\mathbb{C}[X_1,\ldots,X_n,\overline{X_1},\ldots,\overline{X_n}]$. ■

REMARQUE 6.1.5. Il est absolument nécessaire de prendre des polynômes des deux variables x et $\overline{x}$. Non seulement, on en a besoin dans la démonstration mais de plus on voit facilement que la densité est fausse pour l'algèbre des fonctions polynômes de la seule variable $x\in\mathbb{C}^n$. Ainsi, si on prend pour $K=\overline{D}$ le disque unité fermé du plan complexe $\mathbb{C}$, on sait que les limites uniformes de polynômes sur D sont des fonctions continues sur $\overline{D}$ et holomorphes à l'intérieur de $\overline{D}$, ce qui est loin de représenter toutes les fonctions continues sur $\overline{D}$.

Corollaire 6.1.6. *On note S^1 le cercle unité dans $\mathbb{C}$. Alors l'algèbre des polynômes trigonométrique* Vect $\left(e^{in\theta},\ n\in\mathbb{Z}\right)$ *est dense dans $\mathcal{C}^0(S^1;\mathbb{C})$.*

Preuve : On note $\overline{D}=\{z\in\mathbb{C},|z|\leq 1\}$ le disque unité dont S^1 est la frontière. Pour $f\in\mathcal{C}^0(S^1;\mathbb{C})$ on introduit la fonction $\tilde{f}$ définie sur $\overline{D}$ par $\tilde{f}(z)=|z|\,f\left(\frac{z}{|z|}\right)$ pour $z\in\overline{D}\setminus\{0\}$ et $\tilde{f}(0)=0$. Il est clair que $\tilde{f}\in\mathcal{C}^0(\overline{D},\mathbb{C})$ et on peut l'approcher uniformément sur $\overline{D}$ par une suite de polynômes de $(z,\overline{z})$ d'après le Corollaire 6.1.4 :$\tilde{f}=\lim_{m\to\infty}P_m(z,\overline{z})$. On a alors la convergence uniforme sur $S^1\subset\overline{D}$, $f(\theta)=\tilde{f}(\theta)=\lim_{m\to\infty}P_m\left(e^{i\theta},e^{-i\theta}\right)$. (On peut faire une autre démonstration en s'appuyant directement sur le Corollaire 6.1.3.) ■

REMARQUE 6.1.7. Le résultat ci-dessus dit tout simplement que toute fonction continue périodique sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ (ou $\mathbb{R}$) peut s'approcher de façon uniforme par une suite de polynômes trigonométriques. En effet les fonctions continues sur le cercle unité ne sont rien d'autre que les fonctions continues sur $\mathbb{R}$ périodiques de période 2π (cf. Exemple 1.8.6).

6.1.2 Démonstration du théorème

Nous allons démontrer le Théorème de Stone-Weierstrass dans le cas réel. Nous nous restreignons donc ici au cas des fonctions à valeurs réelles. La démonstration se fait essentiellement en trois étapes. Nous commençons par le cas d'une fonction continue bien particulière sur le compact $[-1,1]$.

Lemme 6.1.8. *Sur $[-1,1]$, on peut approcher uniformément la fonction $|\ |$ par une suite de polynômes $P_n\in\mathbb{R}[X]$ tels que $P_n(0)=0$ pour $n\in\mathbb{N}$.*

Preuve : Pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\varepsilon = \frac{1}{6(n+1)}$ et on a

$$\forall x \in [-1,1]\,,\; 0 \leq (x^2+\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - |x| = \frac{\varepsilon^2}{(x^2+\varepsilon^2)^{1/2}+|x|} \leq \varepsilon.$$

On pose ensuite $u = \frac{x^2-1}{1+\varepsilon^2}$ de telle sorte que $\sqrt{x^2+\varepsilon^2} = \sqrt{1+\varepsilon^2+(x^2-1)} = \sqrt{1+\varepsilon^2}\sqrt{1+u}$ avec $|u| \leq \frac{1}{1+\varepsilon^2}$. On sait que la fonction $u \to \sqrt{1+u}$ admet un développement en série entière $\sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k u^k$ qui a pour rayon de convergence 1. En particulier on a convergence uniforme dans le disque de rayon $\frac{1}{1+\varepsilon^2}$. Il existe donc $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $Q_{N_\varepsilon}(u) = \sum_{k=0}^{N_\varepsilon} \alpha_k u^k$ vérifie

$$\left|\sqrt{1+u} - Q_{N_\varepsilon}(u)\right| \leq \varepsilon, \qquad \text{pour } |u| \leq \frac{1}{1+\varepsilon^2}.$$

On a alors

$$\forall x \in [-1,1]\,, \left|\sqrt{x^2+\varepsilon^2} - \sqrt{1+\varepsilon^2}\,Q_{N_\varepsilon}\left(\frac{x^2-1}{1+\varepsilon^2}\right)\right| \leq \sqrt{1+\varepsilon^2}\,\varepsilon \leq 2\varepsilon.$$

En particulier pour $x=0$, on en déduit $\sqrt{1+\varepsilon^2}\left|Q_{N_\varepsilon}\left(\frac{-1}{1+\varepsilon^2}\right)\right| \leq 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon$. En rappelant que l'on a choisi $\varepsilon = \frac{1}{6(n+1)}$, on prend

$$P_n(x) = \sqrt{1+\varepsilon^2}\left[Q_{N_\varepsilon}\left(\frac{x^2-1}{1+\varepsilon^2}\right) - Q_{N_\varepsilon}\left(\frac{-1}{1+\varepsilon^2}\right)\right].$$

C'est un polynôme en x vérifiant $P_n(0) = 0$ et

$$\forall x \in [-1,1]\,, \left||x| - P_n(x)\right| \leq \varepsilon + 2\varepsilon + 3\varepsilon = \frac{1}{n+1}.$$

■

Proposition 6.1.9. *Toute sous-algèbre fermée $\overline{A}$ de $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ est réticulée, i.e. : Pour deux éléments quelconques f et g de $\overline{A}$, les fonctions* $\max\{f,g\}$ *et* $\min\{f,g\}$ *appartiennent à $\overline{A}$.*

Preuve : En remarquant que par hypothèse $\overline{A}$ est une algèbre et que $\max\{f,g\} = \frac{1}{2}\left(|f+g| + |f-g|\right)$ et $\min\{f,g\} = \frac{1}{2}\left(|f+g| - |f-g|\right)$, il suffit de vérifier que pour $f \in \overline{A}$ la fonction $|f|$ appartient aussi à $\overline{A}$. De plus, quitte à prendre $\frac{f}{\|f\|_\infty}$ on peut supposer $\|f\|_\infty \leq 1$.
Dans ce cas ($\|f\|_\infty \leq 1$), le Lemme 6.1.8 nous donne pour tout $n \in \mathbb{N}$ un polynôme $P_n(t) = \sum_{k=1}^{d_n} a_k t^k$, $a_0 = 0$, tel que

$$\sup_{x\in X} \left||f|(x) - P_n(f)(x)\right| = \sup_{x\in X} \left||f(x)| - P_n\left[f(x)\right]\right| \leq \sup_{t\in[-1,1]} \left||t| - P_n(t)\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

où $P_n(f) = a_1 f + a_2 f \times f + \cdots + a_{d_n} f \overset{d_n \text{ fois}}{\times \ldots \times} f$ est un élément de l'algèbre $\overline{A}$. Ainsi la fonction $|f| = \lim_{n\to\infty} P_n[f]$ s'écrit comme une limite uniforme d'une suite d'éléments de $\overline{A}$. Comme $\overline{A}$ est par hypothèse fermée, on en conclut que $|f|$ appartient à $\overline{A}$. ■

Le dernier résultat relie adhérence pour la topologie de la convergence uniforme et adhérence pour une variante de la topologie de la convergence simple (par bipoints), bien sûr avec une hypothèse supplémentaire qui consiste à se limiter aux parties réticulées. On utilise ici de façon cruciale la compacité de $(X, \mathcal{T})$.

Proposition 6.1.10. *Si R est une partie réticulée de $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$, on a l'équivalence*

$$\left(g \in \overline{R}^{\|\ \|_\infty}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x, y \in X, (g(x), g(y)) \in \overline{\{(f(x), f(y))\,,\ f \in R\}}^{\mathbb{R}^2}\right).$$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ La convergence uniforme implique la convergence simple.
$\boxed{\Leftarrow}$ C'est ici que la compacité sert. Soit g vérifiant la propriété de droite. Pour $(x, y) \in X \times X$, il existe $f_{xy} \in R$ telle que

$$|g(x) - f_{xy}(x)| < \varepsilon \quad \text{et} \quad |g(y) - f_{xy}(y)| < \varepsilon.$$

Posons $\omega_{xy} = \{z \in X, g(z) - \varepsilon < f_{xy}(z) < g(z) + \varepsilon\}$. Comme $f_{xy} - g$ est continue $\omega_{x,y}$ est un ouvert (qui contient x et y). Pour x fixé, l'union $\cup_{y\in X}\, \omega_{xy}$ est un recouvrement fini de X et on peut en extraire un sous-recouvrement fini $\cup_{i=1}^n \omega_{xy_i}$. Mais alors la fonction $f_x = \min_{i\in\{1,\ldots,n\}} f_{xy_i}$ appartient à R puisque R est réticulée. On a de plus

$$\begin{aligned} &\forall z \in X,\ f_x(z) = f_{xy_{i_z}}(z) < g(z) + \varepsilon \\ \text{et} \qquad &f_x(x) = f_{xy_{i_x}}(x) > g(x) - \varepsilon, \end{aligned}$$

où $i_z \in \{1, \ldots, n\}$ désigne un indice où le minimum définissant $f_x(z)$ est atteint. On pose $\omega_x = \{z \in X, f_x(z) = g(z) - \varepsilon\}$. C'est un ouvert qui contient x. Du recouvrement $\cup_{x\in X}\, \omega_x$, on peut extraire un sous-recouvrement fini $\cup_{i=1}^m \omega_{x_i}$. On prend alors l'élément de R, $f = \max_{i\in\{1,\ldots,m\}} f_{x_i}$, et on a

$$\forall z \in X,\ g(z) - \varepsilon < f_{x_{i_z}}(z) = f(z) < g(z) + \varepsilon.$$

On a trouvé $f \in R$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$. ■

Fin de la démonstration du Théorème 6.1.1 : Si A est une algèbre, $R = \overline{A}$ est une algèbre fermée donc réticulée. On a

$$\left(g \in \overline{R} = \overline{A}\right) \Leftrightarrow \left(\forall x, y \in X,\ (g(x), g(y)) \in \overline{\left\{(f(x), f(y))\,,\ f \in \overline{A}\right\}}^{\mathbb{R}^2}\right).$$

Soit $g \in \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$. On considère d'abord le cas de deux points $x, y \in X$ distincts, $x \neq y$. On sait qu'il existe $\varphi \in A$ telle que $\varphi(x) \neq \varphi(y)$, $\varphi(x) \neq 0$ et

$\varphi(y) \neq 0$ (on utilise ici les hypothèses 1) et 2) et il est facile de construire le même φ pour ces deux conditions par combinaison linéaire). On prend $f \in A$ sous la forme $f = \alpha\varphi + \beta\varphi^2$ et on résout

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\varphi(x) + \beta\varphi(x)^2 = g(x) \\ f(y) &= \alpha\varphi(y) + \beta\varphi(y)^2 = g(y). \end{aligned}$$

Le déterminant de ce système vaut $\varphi(x)\varphi(y)^2 - \varphi(x)^2\varphi(y) = \varphi(x)\varphi(y)\left(\varphi(x) - \varphi(y)\right)$ qui est non nul. Le système admet une solution unique $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et on peut trouver $f \in A$ telle que $f(x) = g(x)$ et $f(y) = g(y)$. Enfin dans le cas $y = x$ on prend tout simplement $f = \frac{g(x)}{\varphi(x)}\varphi \in A$.

Pour tout $(x, y) \in X \times X$, on sait trouver $f \in A \subset \overline{A}$ telle que $(g(x), g(y)) = (f(x), f(y))$. On en conclut que $g \in \overline{A}$ et ce pour tout $g \in \mathcal{C}^0(X; \mathbb{R})$. ■

6.2 Théorème d'Ascoli

Pour (X, d) espace métrique compact et (X', d') espace métrique, l'ensemble $\mathcal{C}^0(X; X')$ des fonctions continues muni de la distance d_∞ de la convergence uniforme est un espace métrique. Et si $(X', d') = (E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, c'est un espace vectoriel normé de dimension infinie (sauf cas très particulier ou X est fini ou $X' = \{0\}$).

La question que l'on se pose est l'identification des parties compactes de $(\mathcal{C}^0(X; X'); d_\infty)$. Avec le Théorème de Riesz 4.2.8 dans le cas où $(X', d') = (E, \| \ \|)$, on sait que les fermés bornés ne conviennent pas. Ainsi il ne suffit pas de majorer uniformément les fonctions.

6.2.1 Condition nécessaire à la compacité

Soit (X, d) un espace métrique compact et (X', d') un espace métrique. On considère une partie compacte K de $\mathcal{C}^0(X; X')$.
Pour tout $x \in X$, l'application $\mathcal{C}^0(X; X') \ni f \to f(x) \in X'$ est continue. On en déduit que l'ensemble $\{f(x),\ f \in K\}$ est compact (image d'un compact par une application continue).

Définition 6.2.1. *Soit (X, d) est un espace métrique compact et (X', d') un espace métrique. On dit qu'une partie E de $\mathcal{C}^0(X; X')$ est ponctuellement (relativement[1]) compacte si pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x),\ f \in E\}$ est (relativement) compact dans (X', d').*

[1]On rappelle qu'une partie est relativement compacte si son adhérence est compacte (cf. Définition 3.3.5).

De plus, comme K est un compact de l'espace métrique $(\mathcal{C}^0(X;X'), d_\infty)$, pour $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, on peut trouver N_ε boules de rayon $\varepsilon/3$, $B(f_i, \varepsilon/3)$, $i \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}$, telles que $K \subset \cup_{i=1}^{N_\varepsilon} B(f_i, \varepsilon/3)$ (conséquence de la compacité et du Lemme de la maille 3.2.3). De plus, chaque f_i est uniformément continue sur le compact X (Théorème de Heine 3.4.5) :

$$\exists \alpha_i > 0,\ \forall x, y \in X, (d(x,y) \leq \alpha_i) \Rightarrow (\ d'\left(f_i(x), f_i(y)\right) \leq \varepsilon/3)$$

d'où l'on tire pour tout $f \in B(f_i, \varepsilon/3)$

$$\begin{aligned}&\forall x, y \in X,\ d(x,y) \leq \alpha_i,\\ &\quad d'\left(f(x), f(y)\right) \leq d'\left(f(x), f(x_i)\right) + d'\left(f_i(x), f_i(y)\right) + d'\left(f_i(y), f(y)\right) \leq \varepsilon.\end{aligned}$$

En prenant $\alpha = \min_{i \in \{1, \ldots, N_\varepsilon\}} \alpha_i$, on obtient une uniforme continuité

$$\forall x, y \in X,\ (d(x,y) \leq \alpha) \Rightarrow (\forall f \in K,\ d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon),$$

qui est uniforme par rapport à $f \in K$ (le α ne dépend plus de f). Cela nous conduit à la définition suivante.

Définition 6.2.2. *Pour deux espaces métriques (X,d) et (X',d'), on dit qu'une partie E de $\mathcal{C}^0(X;X')$ est* <u>*équicontinue*</u> *sur X, (ou encore également uniformément continue sur X) si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x, y \in X,\ (d(x,y) \leq \alpha) \Rightarrow (\forall f \in E,\ d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon).$$

Le raisonnement précédent nous donne une condition nécessaire à la compacité dans $\mathcal{C}^0(X, X')$.

Proposition 6.2.3. *Soit (X,d) un espace métrique compact et (X',d') un espace métrique. Les parties compactes K de $(\mathcal{C}^0(X;X'), d_\infty)$ sont nécessairement équicontinues et ponctuellement compactes.*

Il est clair que la propriété d'équicontinuité est transmise à toute partie du compact K. On a donc aussi la variante suivante pour les parties relativement compactes.

Corollaire 6.2.4. *Soit (X,d) est un espace métrique compact et (X',d') un espace métrique. Les parties relativement compactes E de $(\mathcal{C}^0(X;X'), d_\infty)$ sont nécessairement équicontinues et ponctuellement relativement compactes.*

6.2.2 Condition nécessaire et suffisante

On va voir que les propriétés d'équicontinuité et de (relative) compacité ponctuelle sont suffisantes. La relative compacité est plus commode dans le sens où les parties d'une partie équicontinue sont équicontinues et où la relative compacité se transmet au sous-ensembles.

Théorème 6.2.5. *Soit (X,d) est un espace métrique compact et (X',d') est un espace métrique. Une partie E de $\mathcal{C}^0(X;X')$ est relativement compacte pour la topologie de la convergence uniforme si et seulement si elle est équicontinue et ponctuellement relativement compacte.*

REMARQUE 6.2.6. Une façon d'énoncer ce théorème est de dire qu'une famille de fonctions continues est relativement compacte si (et seulement) on sait contrôler uniformément leurs valeurs et leurs oscillations.

Preuve : Soit E une partie équicontinue, ponctuellement relativement compacte de $\mathcal{C}^0(X;X')$. On veut montrer que son adhérence $\overline{E}$ est un compact de l'espace métrique $(\mathcal{C}^0(X;X'),d_\infty)$. Autrement dit, on veut montrer que de toute suite $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E, on peut extraire une sous-suite qui converge uniformément sur X vers $f\in\mathcal{C}^0(X;X')$.
Soit $(f^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues de X dans X'. Comme (X,d) est un espace métrique compact, il est séparable (cf. Corollaire 3.2.5). Soit $D=\{x_k,\ k\in\mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense. Pour chaque $k\in\mathbb{N}$, la suite $(f^n(x_k))_{n\in\mathbb{N}}$ reste dans un compact K_k de (X',d'). Ainsi la suite des restrictions $\left(f^n\Big|_D\right)_{n\in\mathbb{N}}$ peut être vue comme une suite du compact métrisable $\prod_{k\in\mathbb{N}}K_k$. On peut donc en extraire une sous-suite $(f^{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ qui converge ponctuellement sur D (cf. Théorème de Tychonoff 3.3.8 dans le cas métrisable).
Etudions maintenant la convergence cette sous-suite en un point arbitraire $x\in X$. Par hypothèse l'adhérence dans (X',d') de $\{f(x),\ f\in E\}$ est compacte donc complète (cf. Proposition 5.2.5). Pour que la sous-suite $(f^{n_l}(x))_{l\in\mathbb{N}}$ ait une limite $f(x)\in X'$, il suffit donc de vérifier que cette sous-suite est de Cauchy. Soit $\varepsilon>0$. Comme la partie E est équicontinue on sait que pour $\alpha>0$ assez petit on a

$$\forall x,y\in X,\ d(x,y)\leq\alpha,\ \forall l\in\mathbb{N},\ d'\left(f^{n_l}(y),f^{n_l}(x)\right)\leq\varepsilon/3.$$

Puisque D est dense dans X, on prend $x_k\in D$ tel que $d(x,x_k)\leq\alpha$. Comme la suite $(f^{n_l}(x_k))_{l\in\mathbb{N}}$ converge dans X', elle est de Cauchy et on peut trouver $L_{\varepsilon,k}$ tel que

$$\forall l,l'\geq L_{\varepsilon,k},\ d'\left(f^{n_l}(x_k),f^{n_{l'}}(x_k)\right)\leq\varepsilon.$$

On majore $d'\left(f^{n_l}(x),f^{n_{l'}}(x)\right)$ par

$$\underbrace{d'\left(f^{n_l}(x),f^{n_l}(x_k)\right)}_{\leq\varepsilon/3}+\underbrace{d'\left(f^{n_l}(x_k),f^{n_{l'}}(x_k)\right)}_{\leq\varepsilon/3}+\underbrace{d'\left(f^{n_{l'}}(x_k),f^{n_{l'}}(x)\right)}_{\leq\varepsilon/3}$$

et on obtient

$$\forall l,l'\geq L_{\varepsilon,k},\ d'\left(f^{n_l}(x),f^{n_{l'}}(x)\right)\leq\varepsilon.$$

Ainsi la sous-suite $(f^{n_l}(x))_{l\in\mathbb{N}}$ converge dans (X',d') pour tout $x\in X$. On note $f(x)$ sa limite.
Il reste à vérifier que la convergence de $(f^{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ vers f a lieu uniformément

par rapport à $x \in X$. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, en utilisant les notations ci-dessus, on sait qu'il existe un entier N tel que $X \subset \cup_{k=0}^{N} B(x_k, \alpha)$ ($\cup_{k\in\mathbb{N}} B(x_k, \alpha)$ forme un recouvrement de X qui est supposé compact). On prend alors $L_\varepsilon = \max_{k\in\{0,\dots,N\}} L_{\varepsilon,k}$ et on a

$$\forall l, l' \geq L_\varepsilon,\ \forall x \in X,\ d'\left(f^{n_l}(x), f^{n_{l'}}(x)\right) \leq \varepsilon.$$

On passe à la limite $l' \to \infty$ et on obtient

$$\forall l \geq L_\varepsilon, d_\infty\left(f^{n_l}, f\right) \leq \varepsilon.$$

La sous-suite $(f^{n_l})_{l\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f \in \mathcal{C}^0(X; X')$. ■

Corollaire 6.2.7. *Si de plus (X,d) est connexe par arc et si (X', d') est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) alors il suffit que $E \in \mathcal{C}^0(X; X')$ soit équicontinue et que pour un $x_0 \in X$ l'ensemble $\{f(x_0),\ f \in E\}$ soit borné pour que E soit relativement compacte dans $(\mathcal{C}^0(X; X'), \|\ \|_\infty)$.*

Preuve : Dans un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie les parties relativement compactes sont les parties bornées. Il s'agit donc de vérifier que pour tout $x \in X$, l'ensemble $\{f(x),\ f \in E\}$ est borné. Comme X est supposé connexe par arc il existe pour tout $x \in X$ un chemin $\gamma \in \mathcal{C}^0([0,1]; X)$ reliant x_0 à x. Cette application $\gamma : [0,1] \to X$ est en particulier uniformément continue et pour tout $\alpha > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\forall t, t \in [0,1],\ \left(|t - t'| \leq \frac{1}{N}\right) \Rightarrow \left(d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq \alpha\right).$$

Avec l'équicontinuité de E, on sait trouver $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x, y \in X,\ \left(d(x,y) \leq \alpha\right) \Rightarrow \left(\forall f \in E,\ d'\left(f(x), f(y)\right) \leq 1\right).$$

On a alors en fixant une origine $A \in X'$

$$\begin{aligned}&\forall f \in E,\ d'\left(A, f(x)\right) \leq d'\left(A, f(x_0)\right) + d'\left(f(x_0), f(x)\right)\\ &\leq d'\left(A, f(x_0)\right) + \sum_{k=0}^{N-1} d'\left(f \circ \gamma\left(\frac{k}{N}\right), f \circ \gamma\left(\frac{k+1}{N}\right)\right) \leq d'\left(A, f(x_0)\right) + N.\end{aligned}$$

■

REMARQUE 6.2.8. Dans le Corollaire 6.2.7 ci-dessus on peut se contenter de supposer (X,d) connexe (Exercice).

Pour fixer les idées sur les applications possibles du Théorème d'Ascoli nous donnons le

Corollaire 6.2.9. *Si on munit* $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ *de la norme* $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ *alors les bornés de* $(\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}), \| \ \|_{C^1})$ *sont relativement compacts dans* $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$.

Preuve : Soit E un borné de $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$, $E \subset B_{f,C^1}(0,M)$. Comme la norme $\|f\|_\infty$ est majorée par la norme $\|f\|_{C^1}$, il est clair qu'un borné de $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ est ponctuellement relativement compact. L'équicontinuité vient de l'inégalité des accroissement finis

$$\forall f \in \forall x, y \in [0,1], \ |f(y) - f(x)| \leq M\,|y-x|\,.$$

■

REMARQUE 6.2.10. On peut étendre ce résultat à plusieurs dimensions et en considérant les bornés de $\mathcal{C}^{k+1}$ dans $\mathcal{C}^k$. D'une façon générale avec les espaces fonctionnels, un contrôle uniforme d'une régularité un peu plus élevée conduit à des propriétés de compacité.

Chapitre 7

Espaces de Hilbert

Les espaces hilbertiens généralisent de façon algébrique et topologique à la dimension infinie la notion d'espace euclidien (ou hermitien dans le cas complexe). Il s'agit donc d'espaces de Banach dont la norme est associée à un produit scalaire. On peut ainsi utiliser (avec quelques précautions) l'intuition géométrique de l'espace euclidien pour travailler sur ces espaces.

Dans tout ce chapitre, nous prendrons comme corps de base $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

7.1 Généralités

Nous allons définir en premier lieu l'extension purement algébrique de la notion d'espace euclidien ou hermitien à la dimension infinie, puis nous donnerons la bonne généralisation qui inclut une hypothèse topologique.

7.1.1 Espaces préhilbertiens

Définition 7.1.1. *Sur un $\mathbb{R}$- (resp. $\mathbb{C}$-) espace vectoriel H, on appelle produit scalaire toute forme i) bilinéaire (resp. sesquilinéaire) ii) symétrique (resp. hermitienne) iii) définie iv) positive. On le note usuellement $(\ ,\ )$ et les hypothèses ci-dessus s'écrivent précisément :*

i) *Pour tout $x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in H$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\begin{aligned} \textit{linéarité à droite} \qquad & (x, \lambda y_1 + y_2) = \lambda(x, y_1) + (x, y_2). \\ \textit{(anti)linéarité à gauche} \qquad & (\lambda x_1 + x_2, y) = \overline{\lambda}(x_1, y) + (x_2, y). \end{aligned}$$

ii) $\forall x, y \in H,\ (y, x) = \overline{(x, y)}.$

iii) $\forall x \in H, ((x, x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0).$

iv) $\forall x \in H,\ (x,x) \geq 0.$

REMARQUE 7.1.2. Les conditions i)…iv) ont été écrites ci-dessus pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ avec antilinéarité par rapport à gauche. Certains auteurs mettent l'antilinéarité à droite. C'est simplement une question de convention. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a $\overline{\lambda} = \lambda$ de telle sorte que la sesquilinéarité se réduit à la bilinéarité et de même le caractère hermitien ii) se ramène à la symétrie.

Définition 7.1.3. *On appelle espace préhilbertien un $\mathbb{K}$-espace vectoriel H muni d'un produit scalaire $(\ ,\ )$.*

Proposition 7.1.4. ***(Cauchy-Schwarz)*** *Dans un espace préhilbertien H, on a*

$$\forall x, y \in H,\ |(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\| ,$$

en posant $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ et $\|y\| = (y,y)^{1/2}$.

Preuve : Soit $x, y \in H$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$0 \leq (x + \lambda y, x + \lambda y) = (x,x) + 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}\left(\lambda(x,y)\right) + |\lambda|^2 (y,y).$$

On prend $\lambda = t\overline{(x,y)}$ et cela donne

$$t^2 \left|(x,y)\right|^2 (y,y) + 2\left|(x,y)\right|^2 t + (x,x) \geq 0, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Le discriminant du polynôme en t doit donc être négatif ou nul, ce qui donne $\left|(x,y)\right|^4 - (x,x)(y,y)\left|(x,y)\right|^2 \leq 0$ ou encore

$$\left|(x,y)\right|^2 \leq (x,x)(y,y).$$

■

Corollaire 7.1.5. *Sur un espace préhilbertien $(H, (\ ,\ ))$, la quantité $\|x\| = (x,x)^{1/2}$ définit une norme, pour laquelle le produit scalaire est continu : $|(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$.*

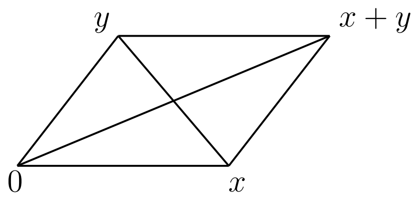
Preuve : Pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x, y \in H$ on a

- $|\lambda x| = (\lambda x, \lambda x)^{1/2} = |\lambda| \, (x,x)^{1/2} = |\lambda| \, \|x\|$.
- $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow ((x,x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$.
- $\|x+y\|^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + (y,y) + 2\,\mathbb{R}\mathrm{e}(x,y)$. En utilisant Cauchy-Schwarz, $\mathbb{R}\mathrm{e}(x,y) \leq |(x,y)| \leq \|x\| \, \|y\|$, on obtient $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$.

Ainsi $\|\ \|$ est bien une norme sur H. La continuité du produit scalaire est encore une conséquence de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. ■

Proposition 7.1.6. ***(Identité du parallélogramme)*** *Dans un espace de Hilbert $(H, (\ ,\ ))$, on a*

$$\forall x, y \in H,\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$



REMARQUE 7.1.7. Interprétation géométrique de l'identité ci-dessus pour le parallélogramme de sommets $(0, x, x+y, y)$: la somme des carrés des diagonales est égale à la somme des carrés des côtés. Une autre version appelée identité de la médiane dit que la somme des carrés des médianes des deux triangles $(0, x, y)$ et $(0, x, x+y)$ est égales à la médiane (moyenne) des carrés

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \left(\|x\|^2 + \|y^2\| \right).$$

Définition 7.1.8. *On dit qu'une famille de vecteurs $(x_i)_{i \in I}$ de H est orthogonale (resp. orthonormée) si*

$$\begin{aligned} & \forall i, j \in I, i \neq j, \ (x_i, x_j) = 0 \\ \textit{resp.} \quad & \forall i, j \in I, \ (x_i, x_j) = \delta_{i,j}. \end{aligned}$$

Proposition 7.1.9. *Si $(x_1, \ldots, x_N)$ est une famille* ***finie*** *orthogonale on a*

$$\|x_1 + \cdots + x_N\|^2 = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_N\|^2.$$

Preuve : On développe le carré scalaire

$$\|x_1 + \cdots + x_N\|^2 = \sum_{i=1}^N \|x_i\|^2 + 2\,\mathbb{R}\mathrm{e} \left(\sum_{1 \leq i < j \leq N} (x_i, x_j) \right) = \|x_1\|^2 + \cdots + \|x_N\|^2.$$

■

7.1.2 Espaces hilbertiens, Théorème de la projection

Définition 7.1.10. *Un espace de Hilbert (ou hilbertien) est un espace préhilbertien complet.*

Comme les parties complètes d'un espace complet sont les parties fermées, on a immédiatement la

Proposition 7.1.11. *Un sous-espace vectoriel F d'un espace de Hilbert $(H, (\ ,\ ))$, muni du produit scalaire restreint à F, est un espace de Hilbert si et seulement si il est fermé dans H.*

Ainsi les sous-espaces de Hilbert sont les sous-espaces vectoriels fermés.

REMARQUE 7.1.12. En dimension finie, tout espace préhilbertien est un espace de Hilbert et tout sous-espace vectoriel est fermé. Cela n'est plus vrai en dimension infinie.

Le théorème qui suit bien que très intuitif en dimension finie repose essentiellement sur la propriété de complétude. C'est le résultat fondamental associé à la structure hilbertienne. A partir de là on démontre tout le reste.

Théorème 7.1.13. ***(de la projection)*** *Si C est un convexe fermé d'un espace de Hilbert H, on a les résultats suivants :*

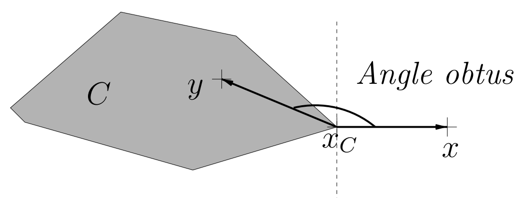
a) *Pour tout $x \in H$, il existe un unique $x_C \in C$ tel que*

$$\|x - x_C\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| .$$

On appelle x_C projection de x sur C et on note $x_C = P_C(x)$.

b) *Le point $x_C = P_C(x)$ est caractérisé par*

$$\forall y \in C,\ \mathbb{R}\mathrm{e}\,(x - x_C, y - x_C) \leq 0.$$



c) *Si C est un sous-espace vectoriel fermé de H, la caractérisation s'écrit*

$$\forall y \in C, (x - x_C, y) = 0 \qquad (x - x_C \text{ orthogonal à } C).$$

d) *La projection P_C est une contraction $H \to C$*

$$\forall x, y \in H, \|P_C(y) - P_C(x)\| \leq \|x - y\| .$$

Preuve : a)**Unicité :** Si $x_C^1 = x_C^2$ sont des minima pour la fonction $\|x - .\| \in \mathbb{R}$ définie sur C, alors comme C est convexe le milieu $\frac{x_C^1 + x_C^2}{2}$ appartient à C et on a

$$\left\|x_C^1 - x_C^2\right\|^2 = 2\left(\left\|x - x_C^1\right\|^2 + \left\|x - x_C^2\right\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{x_C^1 + x_C^2}{2}\right\|^2 \leq 0.$$

On a nécessairement $x_C^2 = x_C^1$.

Existence : Soit $x \in H$, la fonction $C \ni y \to \|x - y\| \in \mathbb{R}$ est minorée par 0 donc admet une borne inférieure ≥ 0. Soit $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de C minimisante, i.e. telle que

$$\lim_{n \to \infty} \|x - y_n\| = \inf_{y \in C} \|x - y\| .$$

Pour $m, n \in \mathbb{N}$, l'identité du parallélogramme 7.1.6 donne

$$\begin{aligned}
\|y_m - y_n\|^2 &= \|(x-y_m)-(x-y_n)\|^2 \\
&= 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{y_n+y_m}{2}\right\| \\
&\leq 2\left(\|x-y_n\|^2 + \|x-y_m\|^2\right) - 4\inf_{y\in C}\|x-y\|^2 \qquad \text{car } \frac{y_n+y_m}{2} \in C.
\end{aligned}$$

Donc pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\|y_n - y_m\| \leq \varepsilon$ pour $m, n \geq N_\varepsilon$. La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy et, comme C est un fermé de H qui est complet, elle admet une limite dans C. On note $x_C = \lim_{n\to\infty} y_n$ et on a

$$x_C \in C \quad \text{et} \quad \|x - x_C\| = \lim_{n\to\infty}\|x-y_n\| = \inf_{y\in C}\|x-y\|.$$

b) Pour $y \in C$, on considère la fonction $[0,1] \ni t \to y_t \in C$ donnée par $y_t = (1-t)x_C + ty$. La quantité $\|x-y_t\|^2$ est un polynôme en t,

$$\|x-y_t\|^2 = \|x-x_C\|^2 + 2t\,\mathrm{Re}\,(x-x_C, x_C-y) + t^2\|x_C-y\|^2. \qquad (7.1.1)$$

$\Rightarrow$ Si x_C minimise $\{\|x-y\|,\ y \in C\}$, alors on doit avoir

$$\forall t \in [0,1],\ \|x-y_t\|^2 \geq \|x-x_C\|^2$$

et en particulier la dérivée en $t = 0$, $\left.\frac{d\|x-y_t\|^2}{dt}\right|_{t=0}$, doit être positive ou nulle. Cela se traduit par

$$\mathrm{Re}\,(x-x_C, y-x_C) \leq 0.$$

$\Leftarrow$ Si l'inégalité ci-dessus est vérifiée alors l'expression (7.1.1) de $\|x-y\|^2 = \|x-y_1\|^2$ donne

$$\|x-x_C\|^2 \leq \|x-y\|^2.$$

c) Si C est un sous-espace vectoriel alors $x_C \pm y$ et $x_C \pm iy$ (cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) appartiennent à C quand $y \in C$. Le critère du b) donne alors

$$\forall y \in C,\ \pm\,\mathrm{Re}\,(x-x_C, y) \leq 0 \quad \text{et} \quad \pm\,\mathrm{Re}\,(x-x_C, iy) \leq 0.$$

Cela s'écrit tout simplement : $(x-x_C, y) = 0,\ \forall y \in C$.
d) Pour $x, y \in H$ on note $x_C = P_C(x)$, $y_C = P_C(y)$, $\Delta x = x - x_C$ et $\Delta y = y - y_C$. En écrivant $x = x_C + \Delta x$ et $y = y_C + \Delta y$ on obtient

$$\|y-x\|^2 = \|y_C - x_C\|^2 + \|\Delta y - \Delta x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(y_C - x_C, \Delta y - \Delta x).$$

Or le dernier terme vaut

$$2\,\mathrm{Re}\,(y_C-x_C, \Delta y - \Delta x) = 2\,\mathrm{Re}\,(y_C-x_C, y-y_C) - 2\,\mathrm{Re}\,(y_C-x_C, x-x_C).$$

C'est une somme de deux nombres positifs ou nuls. ∎

Pour terminer nous insistons encore sur le fait que la structure d'espace de Hilbert comme celle d'espace de Banach, combine des structures algébriques et topologiques. Par exemple, on a vu qu'un sous-espace de Hilbert est nécessairement fermé. Ainsi si on considère une famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ d'un espace de Hilbert H, le sous-espace de Hilbert engendré, i.e. le plus petit sous-espace de Hilbert contenant tous les x_i, doit contenir l'espace vectoriel engendré et être fermé. C'est en fait l'adhérence de l'espace vectoriel engendré. On rappelle que $\mathrm{Vect}(x_i,\ i\in I)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires finies des vecteurs x_i

$$\mathrm{Vect}(x_i,\ i\in I)=\Big\{\sum_{\substack{i\in I\\ \text{finie}}}\alpha_i x_i\Big\},$$

tandis que le sous-espace de Hilbert engendré peut contenir des séries (sommes ou combinaisons linéaires infinies) convergentes. Cela nous amène à distinguer ces deux notions par les notations.

Définition 7.1.14. *Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille de vecteur d'un espace de Hilbert H, on note $\mathrm{Vect}(x_i,\ i\in I)$ l'espace vectoriel engendré et $\mathrm{Hilb}\,(x_i,\ i\in I)$ le sous-espace de Hilbert engendré.*

7.2 Applications du Théorème de la projection

Dorénavant, on travaille avec un espace de Hilbert H sur $\mathbb{K}$ dont le produit scalaire est noté $(\ ,\ )$.

7.2.1 Sous-espace orthogonal

Définition 7.2.1. *Si A est une partie de H, on appelle orthogonal de A et on note $A^\perp$ l'ensemble*

$$A^\perp=\{x\in H,\ \forall a\in A,(a,x)=0\}\,.$$

Proposition 7.2.2. *Pour toute partie A de H, $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.*

Preuve : Pour $a\in A$, on a $a^\perp=\mathrm{Ker}\,[(a,.)]$. Or la forme linéaire $H\ni x\rightarrow(a,x)\in\mathbb{K}$ est continue. Donc $a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé. On en déduit que $A^\perp=\cap_{a\in A}a^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé de H. ■

Proposition 7.2.3. *Pour deux parties A et B de H on a*

1) $(A \subset B) \Rightarrow \left(B^\perp \subset A^\perp\right)$.

2) $A^\perp = \left(\overline{A}\right)^\perp = (\mathrm{Vect}\, A)^\perp = (\mathrm{Hilb}\, A)^\perp$.

Preuve : 1) Pour $A \subset B$, on a tout simplement

$$B^\perp = \underset{a\in B}{\cap} a^\perp \subset \underset{a\in A}{\cap} a^\perp = A^\perp.$$

2) Comme $\mathrm{Hilb}\, A = \overline{\mathrm{Vect}\, A}$, il suffit de montrer les deux premières égalités.

– $\overline{A}^\perp \subset A^\perp$: Cela vient du 1) et de $A \subset \overline{A}$.
  $A^\perp \subset \overline{A}^\perp$: Si $x \in A^\perp$ et $a \in \overline{A}$, on peut écrire $a = \lim_{n\in\mathbb{N}} a_n$ avec $a_n \in A$. On a alors $(a, x) = \lim_{n\to\infty}(a_n, x) = 0$. Cela pour tout $a \in \overline{A}$ et pour tout $x \in \overline{A}^\perp$.

– $(\mathrm{Vect}\, A)^\perp \subset A^\perp$: Cela vient du 1) et de $A \subset (\mathrm{Vect}\, A)$.
  $A^\perp \subset (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$: Soit $x \in A^\perp$ et soit $y = \sum_{i=1}^N \lambda_i a_i$ un élément de $\mathrm{Vect}\, A$, on a $(y, x) = \sum_{i=1}^N \lambda_i (a_i, x) = 0$. Comme cela est vrai pour tout $y \in \mathrm{Vect}\, A$ on en déduit $x \in (\mathrm{Vect}\, A)^\perp$.

■

Proposition 7.2.4. *Si F est un sous-espace vectoriel fermé de H, on a les propriétés suivantes :*

a) *$H = F \oplus F^\perp$ et P_F est la projection sur F parallèlement à $F^\perp$ (projection orthogonale sur F).*

b) *Si $F \neq \{0\}$ alors $\|P_F\| = 1$.*

c) $\left(F^\perp\right)^\perp = F$.

Preuve : a) Le Théorème de la projection (7.1.13) permet de définir la projection P_F sur le convexe fermé F. Pour tout $x \in H$, $P_F(x)$ est caractérisé par

$$\forall y \in F,\ (y, x - P_F(x)) = 0,$$

c'est à dire $x - P_F(x) \in F^\perp$. En écrivant $x = P_F(x) + (x - P_F(x))$ on vérifie que $H = F + F^\perp$. De plus si $x \in F \cap F^\perp$, alors on a $(\underset{\in F}{x}, \underset{\in F^\perp}{x}) = 0$ et donc $x = 0$. On a bien $H = F \oplus F^\perp$. Enfin l'unique décomposition $x = \underset{\in F}{P_F(x)} + \underset{\in F^\perp}{(x - P_F(x))}$ nous assure que $P_F(x)$ est bien la projection sur F parallèlement à $F^\perp$.

b) Si $F \neq \{0\}$, on prend $x \in F$ non nul et la norme de l'application linéaire P_F est supérieure à $\frac{\|P_F(x)\|}{\|x\|} = 1$. De plus comme on sait que P_F est une contraction (cf. Théorème de la projection (7.1.13) d)) sa norme doit être inférieur ou égale à 1. On a donc $\|P_F\| = 1$.

c) La définition de l'orthogonal 7.2.1 donne tout de suite $F \subset \left(F^\perp\right)^\perp$. Pour l'inclusion inverse on prend $x \in \left(F^\perp\right)^\perp$ et on écrit

$$\|x - P_F(x)\|^2 = \left(\underset{\in F^\perp}{x - P_F(x)}, \underset{\in \left(F^\perp\right)^\perp}{x}\right) - \left(\underset{\in F^\perp}{x - P_F(x)}, \underset{\in F}{P_F(x)}\right) = 0.$$

On en déduit $x = P_F(x) \in F$. ■

Corollaire 7.2.5. *Pour une partie A de H, on a $(A^\perp)^\perp = \mathrm{Hilb}\, A$.*

Preuve : On a vu dans la Proposition 7.2.3, l'égalité $A^\perp = (\mathrm{Hilb}\, A)^\perp$. Comme $\mathrm{Hilb}\, A$ est un sous-espace vectoriel fermé on a

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left((\mathrm{Hilb}\, A)^\perp\right)^\perp = \mathrm{Hilb}\, A.$$

■

Corollaire 7.2.6. *Un sous-espace vectoriel de H est dense si et seulement si son orthogonal est $\{0\}$.*

Preuve : L'adhérence d'un sous-espace vectoriel V de H n'est autre que $\overline{V} = \mathrm{Hilb}\, V$. Ainsi V est dense si et seulement si $\mathrm{Hilb}\, V = H$ c'est à dire si et seulement si $V^\perp = (\mathrm{Hilb}\, V)^\perp = \{0\}$. ■

7.2.2 Théorème de représentation de Riesz

Pour tout $f \in H$, la forme linéaire $H \ni x \to (f, x) \in \mathbb{K}$ est continue. Le résultat suivant donne la réciproque.

Théorème 7.2.7. ***(de représentation Riesz)*** *Pour toute forme linéaire continue l sur H, il existe un unique $f \in H$ tel que*

$$\forall x \in H,\ l(x) = (f, x).$$

Preuve : Soit l une forme linéaire continue sur H. On note $F = \mathrm{Ker}\, l$. C'est un sous-espace fermé puisque l est continue.
Existence : On distingue 2 cas : 1) Si $F^\perp = \{0\}$ alors on a $F = (F^\perp)^\perp = H$, $l = 0$ et on prend $f = 0$. 2) Si $F^\perp \neq \{0\}$ alors on prend $u \in F^\perp$ de norme 1. On a $l(u) \neq 0$ et pour $x \in H$ on a $x - \frac{l(x)}{l(u)}u \in \mathrm{Ker}\, l = F$. Le produit scalaire $(u, x - \frac{l(x)}{l(u)}u)$ est donc nul, ce qui donne

$$\forall x \in H, l(x) = l(x)(u, u) = l(u)(u, x) = (f, x)$$

en prenant $f = \overline{l(u)}u$.
Unicité : Soit f_1 et f_2 deux vecteurs de H qui vérifient : $\forall x \in H, (f_1, x) = l(x) = (f_2, x)$. On obtient en prenant $x = f_1 - f_2$,

$$(f_1 - f_2, f_1 - f_2) = l(f_1 - f_2) - l(f_1 - f_2) = 0$$

d'où l'on tire $f_1 = f_2$. ■

REMARQUE 7.2.8. Ce théorème nous dit entre autre que le dual topologique H' d'un espace de Hilbert H s'identifie à H. Attention : l'identification dépend du choix du produit scalaire.

7.2.3 Bases hilbertiennes

Définition 7.2.9. *Dans un espace de Hilbert H, on appelle base hilbertienne un système orthonormé $(e_i)_{i\in I}$ tel que* $\mathrm{Hilb}(e_i,\ i \in I) = H$.

REMARQUE 7.2.10. Attention : Une base hilbertienne n'est pas une base au sens algébrique. Pour récupérer tout l'espace on ne se contente pas de faire des combinaisons linéaires finies. On passe à la limite aussi.

Nous allons étudier l'existence d'une base hilbertienne uniquement dans le cas précis où H est séparable (cf. Définition 1.3.10) et nous commençons par un lemme portant sur la séparabilité.

Lemme 7.2.11. *Un espace de Hilbert H est séparable si et seulement si il existe une famille dénombrable $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $H = \mathrm{Hilb}\,(x_n, n \in \mathbb{N})$.*

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Si H est séparable une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dense dans H vérifie $H = \mathrm{Hilb}\,(x_n, n \in \mathbb{N})$
$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons $\mathrm{Hilb}\,(x_n,\ n \in \mathbb{N}) = H$ c'est à dire $\mathrm{Vect}\,(x_n,\ n \in \mathbb{N})$ dense dans H. On définit par récurrence la sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ et les sous-espaces vectoriels $V_k = \mathrm{Vect}\,(x_0, x_1, \dots, x_{n_k})$ tels que $\dim V_k = k+1$ et $x_{n_k} \in V_k \setminus V_{k-1}$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le sous-ensemble $+_{i=0}^{n_k} \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} x_i$ est dénombrable ($\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ [1] est dénombrable) et dense dans V_k. On prend alors $D = \cup_{k\in\mathbb{N}} (+_{i=0}^{n_k} \mathbb{Q}_{\mathbb{K}} x_i)$. Il est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles dénombrables et il reste à vérifier qu'il est dense. Soit $x \in H$ et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathrm{Vect}\,(x_n, n \in \mathbb{N}) = \cup_{k\in\mathbb{N}} V_k$ est dense dans H il existe g_ε appartenant à un certain V_{k_ε} telle que $\|f - g_\varepsilon\| \leq \varepsilon/2$. Maintenant comme $+_{i=0}^{n_{k_\varepsilon}} \mathbb{Q} x_i$ est dense dans V_{k_ε}, on peut trouver $h_\varepsilon \in +_{i=0}^{n_{k_\varepsilon}} \mathbb{Q} x_i$ tel que $\|g_\varepsilon - h_\varepsilon\| \leq \varepsilon/2$. On a trouvé $h_\varepsilon \in D$ tel que $\|f - h_\varepsilon\| \leq \varepsilon$. ■

EXEMPLE 7.2.12. **a)** L'espace de suites

$$l^2(\mathbb{N};\mathbb{K}) = \left\{ x = (x_k)_{k\in\mathbb{N}},\ \sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^2 < +\infty \right\}$$

muni du produit scalaire $(x, y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \overline{x_k} y_k$ est un espace de Hilbert séparable. (Il en est de même de $l^2(\mathbb{Z};\mathbb{K})$.) En effet on considère la famille $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$ donnée par $e_{n,k} = \delta_{nk}$. Alors l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}\,(e_n,\ n \in \mathbb{N})$ n'est autre que l'espace des suites nulles en dehors d'un nombre fini d'indices (ici ce n'est rien d'autre que $\mathbb{K}[X]$). Il est dense dans $l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$ et donc $\mathrm{Hilb}\,(e_n,\ n \in \mathbb{N}) = l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$ est séparable. En fait, comme le système $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormé, c'est même une base hilbertienne de $l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$.

[1] On désigne par $\mathbb{Q}_{\mathbb{K}}$ l'ensemble des rationnels pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et l'ensemble des complexes à partie réelle et imaginaire rationnelles pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

b) Si Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$, l'espace $L^2(\Omega, dx)$ ("fonctions" L^2 à valeurs dans $\mathbb{K}$) muni du produit scalaire $(f,g) = \int_\Omega \overline{f(x)} g(x)\ dx$ est séparable :
L'ouvert Ω peut s'écrire comme union d'une suite croissante de compacts $\Omega = \cup_{n\in\mathbb{N}} K_n$, $K_n \subset K_{n+1} \subset \Omega$. Si f est un élément quelconque de $L^2(\Omega,\ dx)$, la suite de terme $1_{K_n}(x)f(x)$ converge vers f dans $L^2(\Omega,\ dx)$. Pour $\varepsilon > 0$, on peut donc trouver n_ε tel que $\left\|f - 1_{K_{n_\varepsilon}}(x)f(x)\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon}{3}$.
De plus on sait (cf. Cours d'Intégration) que $\mathcal{C}^0\left(K_{n_\varepsilon}\right)$ est dense dans $L^2(K_{n_\varepsilon},\ dx)$ et on peut trouver une fonction $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{C}^0(K_{n_\varepsilon})$ telle que $\|f - \varphi_\varepsilon\|_{L^2(K_{n_\varepsilon})} \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Le Théorème de Stone-Weierstrass (voir respectivement les Corollaires 6.1.2 pour le cas réel et 6.1.4 pour le cas complexe) nous dit qu'on peut approcher φ_ε par des polynômes en norme de la convergence uniforme. Or comme la mesure $|K_{n_\varepsilon}| = \int_{K_{n_\varepsilon}} 1\ dx$ est finie, l'estimation

$$\forall \psi \in \mathcal{C}^0(K_{n_\varepsilon}),\ \|\psi\|_{L^2}^2 = \int_{K_{n_\varepsilon}} |\psi(x)|^2\ dx \leq |K_{n_\varepsilon}|\, \|\psi\|_\infty^2$$

nous dit que l'on peut trouver un polynôme $P \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ (voire $P \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_d, \overline{X_1}, \ldots, \overline{X_d}]$ dans le cas complexe) tel que

$$\|\varphi_\varepsilon - P\|_{L^2(K_{n_\varepsilon})} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On a alors $\left\|f - 1_{K_{n_\varepsilon}}(x)P(x)\right\| \leq \varepsilon$ et ce pour tout $\varepsilon > 0$.
Autrement dit, l'espace vectoriel engendré par l'ensemble dénombrable de fonctions

$(\mathbb{K} = \mathbb{R})$ $\quad \left\{1_{K_n}(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d},\ n, \alpha_1, \ldots, \alpha_d \in \mathbb{N}\right\}$
$(\mathbb{K} = \mathbb{C})$ $\quad \left\{1_{K_n}(x) x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d} \overline{x_1}^{\beta_1} \ldots \overline{x_d}^{\beta_d},\ n, \alpha_1, \ldots, \alpha_d, \beta_1, \ldots, \beta_d \in \mathbb{N}\right\}$

est dense dans $L^2(\Omega,\ dx)$.

Théorème 7.2.13. *Pour un espace de Hilbert H séparable on a les résultats suivants :*

1) *H admet une base hilbertienne dénombrable.*

2) *Si $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de H alors on a*

a) $H = \left\{\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n,\ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 < \infty\right\}$ *et pour $x \in H$ la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est unique et donnée par $x_n = (e_n, x)$.*

b) *Pour $x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \in H$ et $y = \sum_{n\in\mathbb{N}} y_n e_n \in H$, le Théorème de Pythagore se généralise en*

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$$

et on a l'identité de Parseval

$$(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \overline{x_n} y_n.$$

REMARQUE 7.2.14. La deuxième partie du théorème nous dit qu'en fait l'application $H \ni x \to (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^2(\mathbb{N};\mathbb{K})$ donnée par $x_n = (e_n, x)$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert. Ainsi il n'y a qu'un seul espace de Hilbert séparable à isomorphisme près.

Preuve : 1) Si H est séparable, on a $H = \mathrm{Hilb}(x_n, n \in \mathbb{N})$ et on considère comme dans la démonstration du Lemme 7.2.11 la suite de sous-espaces de dimension finie $V_k = \mathrm{Vect}\,(x_0, x_1, \ldots, x_{n_k})$. On utilise un procédé d'Orthogonalisation de Schmidt : Pour $k = 0$, on prend $e_0 = \frac{x_{n_0}}{\|x_{n_0}\|}$ le premier vecteur non nul normalisé à 1. Une fois $e_0, \ldots, e_k$ construits, on introduit le vecteur

$$\tilde{e}_{k+1} = x_{n_{k+1}} - \sum_{i=1}^{k}(e_i, x_{n_{k+1}})e_i$$

qui est non nul puisque $x_{n_{k+1}}$ n'appartient pas à

$$\mathrm{Vect}\left(x_0, \ldots, x_{n_{k+1}-1}\right) = \mathrm{Vect}\,(e_0, \ldots, e_k)$$

puis on le normalise à 1 en prenant

$$e_{k+1} = \frac{\tilde{e}_{k+1}}{\|\tilde{e}_{k+1}\|}.$$

On obtient ainsi une suite $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ qui vérifie $(e_k, e_{k'}) = \delta_{kk'}$ et $\mathrm{Hilb}\,(e_k, k \in \mathbb{N}) = \mathrm{Hilb}\,(x_n, n \in \mathbb{N}) = H$.

2) Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H et soit $x \in H$. On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n = (e_n, x)$ et pour $N \in \mathbb{N}$, $S_N = \sum_{n=0}^{N} x_n e_n$. On a alors

$$\begin{aligned}\|x - S_N\|^2 &= \left\|x - \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\right\|^2 = \|x\|^2 + \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(x, \sum_{n=0}^{N} x_n e_n\right)\\ &= |x|^2 - \sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 .\end{aligned}$$

On en déduit pour tout $N \in \mathbb{N}$ la majoration $\sum_{n=0}^{N} |x_n|^2 \leq \|x\|^2$ de telle sorte que $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 \leq \|x\|^2 < +\infty$. Maintenant pour $N > M$ on utilise le Théorème de Pythagore fini (Proposition 7.1.9) pour calculer

$$\|S_N - S_M\|^2 = \left\|\sum_{n=M+1}^{N} x_n e_n\right\|^2 = \sum_{n=M+1}^{N} |x_n|^2 .$$

Avec la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ N_ε, tel que $\|S_N - S_M\| \leq \varepsilon$ pour $N, M \geq N_\varepsilon$. Ainsi la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ est de

Cauchy dans H qui est complet. Elle admet une limite que l'on note pour l'instant $S = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. En utilisant la continuité du produit scalaire on obtient pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$(e_m, x - S) = (e_m, x) - \left(e_m, \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n\right) = x_m - x_m = 0.$$

Dons $x - S$ est orthogonal à $H = \mathrm{Hilb}(e_m, m \in \mathbb{N})$. Il est donc nul, $x = S = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n$. Enfin comme $\lim_{N\to\infty} S_N = x$ la première relation nous donne $\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2$ et l'identité de Parseval s'obtient facilement par passage à la limite. ∎

Chapitre 8

Exercices

8.1 Espaces métriques. Espaces topologiques

Exercice 1. Opérations ensemblistes : Pour un ensemble X, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble de ses parties, pour $A \subset X$ on note $\complement_X A$ son complémentaire dans X et pour un autre ensemble Y on note $\mathcal{F}(X, Y)$ l'ensemble des applications de X dans Y.

a) Soit $(A_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille quelconque (au sens ou aucune hypothèse n'est faite sur les cardinaux des ensembles I et J) de $\mathcal{P}(X)$, montrer les relations

$$\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{i,j}\right) \subset \bigcap_{j\in J}\left(\bigcup_{i\in I} A_{i,j}\right) = \bigcup_{f\in\mathcal{F}(J,I)}\left(\bigcap_{j\in J} A_{\mathbf{f(j),j}}\right).$$

Donner un exemple ou l'inclusion est stricte.

b) De l'égalité, déduire qu'une intersection finie d'unions peut s'écrire comme union d'intersections finies.

c) Pour une famille quelconque $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}(X)$, montrer les relations

$$\complement_X\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I}(\complement_X A_i) \qquad \text{et} \quad \complement_X\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I}(\complement_X A_I).$$

d) Ecrire $\bigcup_{i\in I}\left(\bigcap_{j\in J} A_{i,j}\right)$ comme une intersection d'unions. En déduire qu'une union finie d'intersections s'écrit comme une intersection d'unions finies.

e) Soit f une application de X dans Y. Montrer que pour des familles quelconques $(A_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}(X)$ et $(B_i)_{i\in I}$ de $\mathcal{P}(Y)$ on a :

$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f\left(A_i\right) \quad \text{et} \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f\left(A_i\right);$$
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}\left(B_i\right) \quad \text{et} \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}\left(B_i\right).$$

Donner un exemple d'inclusion stricte pour la deuxième relation. En déduire que le passage au complémentaire se comporte bien avec l'image réciproque $f^{-1}(B)$ mais pas toujours avec l'image $f(A)$.

f) Dans le cadre de la question précédente, donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que l'image ait les mêmes propriétés que l'image réciproque.

Exercice 2. Dans $\mathbb{R}^n$, calculer en fonction de la dimension n la longueur de la diagonale de l'hypercube de côté 1 pour les distances d_1, d_2 et d_∞.

Exercice 3. Lesquelles des fonctions suivantes donnent une métrique sur $\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{ll} d_1(x,y) = (x-y)^2 & \qquad d_2(x,y) = |x-y|^{1/2} \\ d_3(x,y) = |x-2y| & \qquad d_4(x,y) = |x^2-y^2|. \end{array}$$

Exercice 4. Soit (E,d) tel que E contient au moins deux points. Est-il possible que les seuls ouverts soient E et $\emptyset$?

Exercice 5. Soit (X,d) un espace métrique.

a) Soit $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction croissante s'annulant uniquement en 0 et sous-additive, i.e. vérifiant :

$$\forall u,v \in \mathbb{R}_+,\ \varphi(u+v) \le \varphi(u) + \varphi(v).$$

Montrer que $\varphi \circ d$ est une distance sur X. Vérifier que d et $\varphi \circ d$ sont métriquement équivalentes si il existe une constante $C > 0$ telle que $C^{-1}u \le \varphi(u) \le Cu$, et topologiquement équivalentes si φ est continue en 0.

b) Étudier les cas $\varphi(u) = \inf(1,u)$, $\varphi(u) = \frac{u}{1+u}$.

Exercice 6. Distance d_p sur $\mathbb{R}^n$ pour $1 \le p < \infty$: On va établir en plusieurs étapes que la quantité $\|x\|_p = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ définit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

a) Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}_+$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ on a

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q.$$

(Indication : On pourra utiliser la convexité de la fonction $x \to e^x$.)

b) Inégalité de Hölder : Pour $(a_1, \ldots, a_n),\ (b_1, \ldots b_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}} \qquad \text{avec } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

(Indication on pourra d'abord montrer l'inégalité dans le cas où $\sum_i^n |a_i|^p = \sum_{i=1}^n |b_i|^q = 1$.)

c) Inégalité de Minkowski : Pour $(a_1, \ldots, a_n),\ (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ montrer

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |a_i + b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |b_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

(Indication écrire $|a_i + b_i|^p \leq |a_i + b_i|^{p-1} (|a_i| + |b_i|)$.)

d) En déduire que $\| \ \|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$. Vérifier que toute ces normes sont équivalentes.

Exercice 7. Pour un corps $\mathbb{K}$ on note $\mathbb{K}[[X]]$ l'espace vectoriel des séries formelles c'est à dire l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{K}$ et on rappelle que l'ensemble $\mathbb{K}[X]$ des polynômes est le sous-espace vectoriel des suites s'annulant à partir d'un certain rang. Pour une série formelle $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on note $v(a)$ le plus petit entier k tel que $a_k \neq 0$ ($v(a)$ s'appelle la valuation de a).

a) Montrer que la quantité $d(a, b) = e^{-v(b-a)}$ (où l'on convient que $e^{-\infty} = 0$) définit une distance sur $\mathbb{K}[[X]]$. On vérifiera en fait l'inégalité ultramétrique

$$d(a, c) \leq \sup \{d(a, b); d(b, c)\}, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{K}[[X]]$$

qui entraîne l'inégalité triangulaire.

b) Montrer que $\mathbb{K}[X]$ est dense dans $\mathbb{K}[[X]]$ et justifier l'écriture $a = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$.

Exercice 8. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. Montrer l'équivalence entre les propositions suivantes :

a) Tout singleton est un fermé de X.

b) Pour tout couple de points de X, il existe un voisinage de l'un qui ne contient pas l'autre.

c) Pour tout point $x \in X$, $\{x\}$ est l'intersection de tous les voisinages de x.

Exercice 9. Montrer que si l'espace topologique $(X,\mathcal{T})$ est séparé alors tout singleton $\{x\}$ est fermé et peut s'écrire comme l'intersection de tous les voisinages de x.

Exercice 10. Sur $\mathbb{R}^n$, on considère la topologie $\mathcal{T}_f$ dont une base de fermés est formée des singletons de $\mathbb{R}^n$. Décrivez tous les fermés de $(\mathcal{T}_f)$, tous les ouverts, tous les voisinages. La topologie $\mathcal{T}_f$ est-elle séparée ?

Exercice 11. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont fermés ?

a) $\{(1/n,0);\ n=1,2,\dots\}$;
b) $\{(x,y);\ y=x^2\}$;
c) $\{(m,n);\ m,n\in\mathbb{Z}\}$.

Exercice 12. Décrivez l'intérieur, l'adhérence et la frontière des sous-ensembles suivants :

a) $(\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q})\times\mathbb{R}\subset\mathbb{R}^2$;
b) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[\frac{1}{2^{2n+1}},\frac{1}{2^{2n}}]\subset\mathbb{R}$;
c) $\{(x,y),\ x^2\leq y<x+1\}\subset\mathbb{R}^2$;
d) $\left\{(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)),\ x>0\right\}\subset\mathbb{R}^2$.

Exercice 13. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que $diam(\overline{A})=diam(A)$. Donner un exemple pour lequel $diam\,(B(x,1))<diam\,(B_f(x,1))$.

Exercice 14. Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence d'une boule ouverte $B(x_0,\rho)$, $\rho>0$, est $B_f(x_0,\rho)$.

Exercice 15. Montrer que toute boule ouverte d'un espace vectoriel normé E est homéomorphe à E (Indication : considérer l'application $x\to\frac{\rho x}{1+\|x\|}$.)

Exercice 16. Soit (X,d) un espace métrique et soir $A\subset X$, montrer l'équivalence $(x\in\overline{A})\Leftrightarrow(d(x,A)=0)$.

Exercice 17. Soit U un ouvert d'un espace métrique (X,d). Montrer l'inclusion $U\subset\overset{\circ}{\overline{U}}$ et donner un exemple d'inclusion stricte.

Exercice 18. Démontrer que $\mathbb{R}^n\setminus\{0\}$ est homéomorphe à $\mathbb{R}_+^*\times S^{n-1}$.

Exercice 19. Axiomes de Kuratowski : On a vu en cours que dans un espace topologique $(X,\mathcal{T})$, l'adhérence vérifie : (A1) $\overline{(\overline{A})}=\overline{A}$; (A2) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$;(A3) $A\subset\overline{A}$;(A4) $\overline{\emptyset}=\emptyset$. Montrer que inversement si on se donne une application $\overline{}:\mathcal{P}(X)\to\mathcal{P}(X)$ vérifiant (A1)(A2)(A3)(A4), cela définit une topologie. (Indication on pourra considérer comme ouverts les parties de X qui vérifient $\overline{\complement_X O} = \complement_X O$ et montrer que (A1)(A2)(A3)(A4) entraînent (O1)(O2)(O3).)

Exercice 20. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique séparé et soit f une application continue de X dans X. Montrer que si une suite récurrente définie par $x_{k+1} = f(x_k)$ converge vers $l \in X$ alors cette limite est solution de $l = f(l)$. Application : Vérifiez qu'une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $A_{k+1} = A_k^* A_k + \mathrm{Id}$ ne converge pas.

Exercice 21. Moyenne de Cesaro : Soit $(x_n)n \in \mathbb{N}$ une suite de réels telle que $\lim_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que la suite donnée par $y_n = \frac{x_1+\cdots+x_n}{n}$ converge vers l.

b) Plus généralement si $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs telle que $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = +\infty$, montrer que la suite donnée par $z_n = \frac{c_1x_1+\cdots+c_nx_n}{c_1+\cdots+c_n}$ converge vers l.

Exercice 22. Composition de limites : Soit $(X, \mathcal{T})$ $(X', \mathcal{T}')$ et $(X'', \mathcal{T}'')$ trois espaces topologiques séparés et soit f et g deux applications $f : X \to X'$ et $g : X' \to X''$. Donner une condition suffisante sur $A \subset X$ et $B \subset X'$ pour que

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = b \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{x'\to b\\ x'\in B}} g(x') = c$$

entraîne $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g \circ f(x) = c$. On considèrera l'exemple $X = X' = X'' = [0, 1]$, $f = 0$, $g(x) = x$ pour $0 < x \leq 1$, $g(0) = 1$, $A = [0, 1]$ et $B =]0, 1]$. Que peut-on dire si g est continue en b ?

Exercice 23.

a) Soit r un réel irrationnel. Montrer que l'ensemble $\mathbb{Z} + \mathbb{N}r$ est dense dans $\mathbb{R}$. Indication : On considèrera la suite des parties fractionnaires $(frac(nr))_{n\in\mathbb{N}}$. On rappelle (ce qui sera revu au Chapitre 3) que toute suite bornée de $\mathbb{R}$ admet une valeur d'adhérence.

b) En déduire que si a et b sont deux réels, $a \neq 0$, tels que $\frac{b}{a} \notin \mathbb{Q}$ alors l'ensemble $\mathbb{N}a + \mathbb{Z}b$ est dense dans $\mathbb{R}$.

c) En déduire que $\left\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans le cercle unité S^1 dès que $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$ (on utilisera la continuité et la surjectivité de $e^{i\cdot} : \mathbb{R} \to S^1$.)

d) En déduire que $\{\sin(n\theta),\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.

Exercice 24. Soit (X, d) un espace métrique et soient A et B deux parties de X. Montrer que l'application : $X \to \mathbb{R}$ qui à x associe $d(x, A)$ est Lipschitzienne. En déduire que $\{x \in X \ d(x,A) = d(x,B)\}$ est un fermé.

Exercice 25. On note S^{n-1} la sphère de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$, $S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1\}$. Montrer que la sphère moins 1 point est homéomorphe à $\mathbb{R}^{n-1}$. (On pourra considérer en premier lieu les cas $n = 2$ et $n = 3$).

Exercice 26. Soit f une application continue d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ dans un espace topologique $(Y, \mathcal{T}')$. Montrer que le graphe $\Gamma = \{(x, f(x)), \ x \in X\}$ est homéomorphe à X.

Exercice 27. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, montrer que l'ensemble des matrices inversibles $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert, que l'ensemble des matrices symétriques (auto-adjointes) est un fermé. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, montrer que $\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P(A) = 0\}$ est un fermé. Montrer que l'application $A \to A^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

Exercice 28. Soit $(X_i, \mathcal{T}_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces topologiques. Montrer que la topologie produit sur $\Pi_{i \in I} X_i$ est la topologie la moins fine qui rende les projections $p_j : \Pi_{i \in I} X_i \to X_j$ continues.

Exercice 29. Soit $(X_n, d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille dénombrable d'espaces métriques. Montrer que la topologie produit sur $\Pi_{n \in \mathbb{N}} X_n$ est métrisable (on étudiera la quantité $d(x,y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} 2^{-n} \frac{d_n(x_n,y_n)}{1+d_n(x_n,y_n)}$.)

Exercice 30. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique. On munit $X \times X$ de la topologie produit. Montrer que $(X, \mathcal{T})$ est séparé si et seulement si la diagonale $\Delta = \{(x,x), \ x \in X\}$ est un fermé de $X \times X$.

Exercice 31.

On munit $X = \{0, 1\}$ de la topologie discrète. Montrer que la topologie produit sur X^I est strictement moins fine que la topologie discrète dès que I est infini.

Exercice 32. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction strictement croissante et on définit $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$d(x,y) = |f(y) - f(x)|$$

Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}$. Etudier l'équivalence métrique et topologique avec la distance usuelle $|x-y|$ dans les cas $f(x) = x^3$ et $f(x) = \arctan(x)$.

Exercice 33. Soit A une partie d'un espace métrique E muni de la distance d.

a) Démontrer que $d(x,A) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{A}$;

b) Démontrer que si A et B sont deux parties de E telles que $\overline{A} \cap \overline{B} = \emptyset$ alors l'application
$$x \to \frac{d(x,A)}{d(x,A)+d(x,B)}$$
est continue sur E. Que vaut-elle sur A et sur B ? En déduire qu'il existe deux ouverts disjoints U et V tels que $\overline{A} \subset U$ et $\overline{B} \subset V$.

Exercice 34. Soit d et d_1 deux distances définies sur E. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+^*$ tel que
$$\forall (x,y) \in E^2 \quad d_1(x,y) \leq k d(x,y).$$
Montrer que toute boule ouverte de (E, d_1) est un ouvert de (E, d). En déduire que la topologie de (E, d_1) est moins fine que celle de (E, d).

Exercice 35. Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique.

a) Démontrer que si A est un ouvert de X on a pour tout $B \subset X$
$$A \cap \overline{B} \subset \overline{A \cap B}.$$

b) Donner des exemples dans $\mathbb{R}$, d'ouverts A et B tels que $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$, $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$ soient tous différents.

c) Donner un exemple de deux intervalles A et B dans $\mathbb{R}$ tels que $A \cap \overline{B}$ ne soit pas contenu dans $\overline{A \cap B}$.

Exercice 36. Soit U et V deux ouverts d'un espace métrique E tels que $U \cap V = \emptyset$. Prouver que $\overset{o}{\overline{U}} \cap \overset{o}{\overline{V}} = \emptyset$.

Exercice 37. Soit A une partie d'un espace métrique E. On note $u(A) = \overset{o}{\overline{A}}$ et $v(A) = \overline{\overset{o}{A}}$. Montrer que u et v sont des applications qui respectent l'inclusion, que $u^2 = u$ et $v^2 = v$. Comparer $\overset{o}{A}$, $u(A)$, $v(A)$, $\overline{A}$.

Exercice 38. On considère dans $\mathbb{R}$ l'ensemble $E = \{\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \,|\, p, q \in \mathbb{N}^*\}$. Déterminer $\overline{E}$.

Exercice 39. Soit $E = \{f;\ f \text{ bornée sur } [a,b]\}$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On considère un ensemble $A \subset [a,b]$ et $X = \{f;\ f\big|_A = 0\}$. Montrer que la frontière de X coïncide avec X.

Exercice 40.

a) Avec les métriques usuelles, vérifiez que la sphère de dimension $n-1$ S^{n-1} peut s'écrire comme quotient topologique de $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence $(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (\exists \lambda > 0, y = \lambda x)$.

b) En généralisant le cas du cercle, vérifiez que le tore de dimension n s'écrit comme quotient de $\mathbb{R}^n$.

c) Vérifiez que le quotient topologique de la sphère S^{n-1} de dimension $n-1$ par la relation antipodale $(x\mathcal{R}y) \Leftrightarrow (y=-x)$ est en fait un espace métrique. Quelle est son interprétation dans $\mathbb{R}^n$. (On appelle cet espace métrique, l'espace projectif réel de dimension $n-1$).

Exercice 41. En utilisant le résultat de l'Exercice 23, montrer que le quotient topologique de $\mathbb{R}$ par un de ses sous-groupes additifs est soit le cercle soit un ensemble muni de la topologie grossière.

Exercice 42. Sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{O}$ la famille des ouverts pour la topologie usuelle et $\mathcal{D}$ la famille des parties dénombrables de $\mathbb{R}$. On considère alors la famille $\mathcal{O}' = \{O' \subset \mathbb{R}, O' = O \setminus D, O \in \mathcal{O}, D \in \mathcal{D}\}$. Vérifier que cette famille définit bien une topologie $\mathcal{T}'$ sur $\mathbb{R}$. Cette topologie est-elle séparée ? Admet-elle en tout point une base de voisinages fermés ?

Exercice 43. Topologie de Zariski :[1] On rappelle que l'algèbre des fonctions polynômiales de n variables de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$, est isomorphe à l'algèbre $\mathbb{C}[X_1, ..., X_n]$ (L'injectivité du morphisme d'algèbre, qui à un polynôme associe la fonction polyômiale, se montre par récurrence sur n et vient du fait que $\mathbb{C}$ est infini). Pour un nombre fini de polynômes $P_1, \ldots, P_m \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$, on note $(P_1, \ldots, P_m)$ l'idéal engendré

$$(P_1, \ldots, P_m) = \{Q_1P_1 + \cdots + Q_mP_m,\ Q_1, \ldots, Q_m \in \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]\}.$$

Un théorème dû à Hilbert assure que tout idéal de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ est de cette forme (on dit que l'anneau $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien). On appelle ensemble algébrique de $\mathbb{C}^n$, un ensemble sur lequel s'annulent tous les polynômes d'un idéal de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$:

$$F_I = \{x \in \mathbb{C}^n, \forall P \in I, P(x) = 0\}.$$

En prenant $P_1 \ldots P_m$ tels que $I = (P_1, \ldots, P_m)$, l'ensemble F_I s'écrit aussi

$$F_I = \{x \in \mathbb{C}^n, P_1(x) = \cdots = P_m(x) = 0\}.$$

On considère la famille $\mathcal{F}_Z$ de tous les ensembles algébriques de $\mathbb{C}^n$.

a) Précisez $\mathcal{F}_Z$ dans le cas $n=1$ (on utilisera le fait que $\mathbb{C}[X]$ est principal).

b) Vérifier que $\emptyset$ et $\mathbb{C}^n$ sont dans $\mathcal{F}_Z$.

[1] Cet exercice fait appel à des notions d'algèbre qui ne sont pas exigibles dans le cadre de ce cours. Il est ici pour illustrer à nouveau l'intérêt des concepts généraux de topologie. La dernière question de l'exercice 112 sur le théorème de Cayley-Hamilton est un prolongement de cet exercice.

c) Montrer qu'une union finie d'éléments de $\mathcal{F}_Z$ est un élément de $\mathcal{F}_Z$ (on considèrera l'intersection des idéaux).

d) Montrer qu'une intersection quelconque d'éléments de $\mathcal{F}_Z$ est un élément de $\mathcal{F}_Z$ (on considèrera l'idéal engendré par la famille d'idéaux).

e) En déduire que $\mathcal{F}_Z$ définit une topologie sur $\mathbb{C}^n$ (Cette topologie est appelée topologie de Zariski). Cette topologie est-elle séparée ?

f) Montrer que si $\mathbb{C}^n$ et $\mathbb{C}^m$ sont tous deux munis de la topologie de Zariski, toute application algébrique (i.e. à composantes polynômiales) est continue.

g) Vérifiez que dans $\mathbb{C}^n$ muni de la topologie de Zariski, tous les ouverts sont denses. Indication on se placera sur le complémentaire qui est un fermé de la forme $\{x \in \mathbb{C}^n, P(x) = 0\}$, on prendra comme voisinage d'un point un ouvert $\{x \in \mathbb{C}^n, Q \neq 0\}$ puis on utilisera l'intégrité de $\mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$.

h) En admettant que pour tout corps commutatif $\mathbb{K}$ l'anneau $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est noethérien et s'identifie à l'ensemble des fonctions polynômiales pour $\mathbb{K}$ infini, définir une topologie sur $\mathbb{K}^n$ (avec $\mathbb{K}$ infini) et reprendre les questions précédentes.

8.2 Connexité

Exercice 44. Lesquels des sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants sont connexes :

a) $X = \{(0, y)\,; -1 \leq y \leq 1\} \cup \{(x, \sin(1/x))\,; x > 0\}$;

b) $Y = \{(x, y)$;x ou y rationnel$\}$;

c) $Z = \{(x, 0)\,; x \in \mathbb{R}\} \cup \{(x, 1/x)\,; x > 0\}$.

Exercice 45. Lesquelles des affirmations suivantes sont correctes ?

a) $\overline{A}$ connexe implique A connexe.

b) A connexe implique $\overline{A}$ connexe.

c) A connexe par arcs implique $\overline{A}$ connexe par arcs.

d) $\overline{A}$ connexe par arcs implique A connexe par arcs.

Exercice 46. Passage des douanes : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique connexe et A une partie de X. Montrer que tout chemin joignant l'intérieur de

A à l'extérieur de A rencontre la frontière de A. Donner une généralisation.

Exercice 47. Donner un exemple de partie connexe, dont l'intérieur n'est pas connexe.

Exercice 48. Étudier la connexité de $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})^2$ et de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$.

Exercice 49. Montrer que si A et B sont deux parties connexes d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$ telles que $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B$ est connexe. Est-ce encore vrai en supposant seulement $\overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset$?

Exercice 50. Dans un espace topologique $(X, \mathcal{T})$, montrer que la relation définie par $x \sim y$ s'il existe un chemin joignant x à y est une relation d'équivalence. On note $C_{arc}(x)$ la classe d'équivalence de $x \in X$. Montrer que $C_{arc}(x)$ est le plus grand ensemble connexe par arcs contenant x et qu'il est inclus dans la composante connexe $C(x)$. Donner un exemple d'inclusion stricte.

Exercice 51. Dans le plan euclidien $\mathbb{R}^2$, on fixe un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les cercles du plan sont alors les courbes d'équation $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ avec

$$(a, b, c) \in F = \left\{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3,\ \gamma \leq \alpha^2 + \beta^2\right\}.$$

On identifie l'ensemble $\mathcal{C}$ des cercles de $\mathbb{R}^2$ avec F on prend alors la topologie induite sur F par celle de $\mathbb{R}^3$.

a) Avec cette topologie $\mathcal{C}$ est-il connexe ?
b) L'ensemble des cercles passant par (x_0, y_0) est-il fermé ou ouvert ?
c) L'ensemble des cercles qui ne passent pas par (x_0, y_0) est-il connexe ? Interpréter géométriquement et donner le nombre de composantes connexes.

Exercice 52. Composantes connexes de $O(n)$: On note $O(n)$ l'ensemble des matrices orthogonales,

$$O(n) = \left\{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ {}^tAA = \mathrm{Id}\right\}.$$

On rappelle que qu'il se décompose en $O(n) = O_+(n) \cup O_-(n)$ ou $O_+(n)$ (resp. $O_-(n)$) est l'ensemble des transformations orthogonales directes (resp. indirectes).

a) En utilisant le déterminant, montrer que $O(n)$ a au moins deux composantes connexes.
b) A l'aide de la forme réduite des éléments de $O_+(n)$, montrer que $O_+(n)$ est connexe par arcs (Pour un élément quelconque A de $O_+(n)$ on donnera un chemin de A à Id.). En déduire que $O(n)$ a exactement deux composantes connexes.

Exercice 53. Composantes connexes de GL_n :

a) $GL_n(\mathbb{C})$: En utilisant la triangularisation, montrer que pour tout $A \in GL_n(\mathbb{C})$, il existe un chemin de A à Id dans $GL_n(\mathbb{C})$. En déduire que $GL_n(\mathbb{C})$ a une seule composante connexe.

b) $GL_n(\mathbb{R})$: Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ a deux composantes connexes. Indication : Avec le déterminant on montrera qu'il y a au moins deux composantes connexes. Ensuite pour $\det(A) > 0$, on donnera un chemin de A à Id en utilisant la décomposition polaire $A = O\,|A|$, $|A| = \sqrt{{}^tAA}$ et $O \in O(n)$, et l'exercice 52.

Exercice 54. On admettra que les valeurs propres d'une matrice symétrique $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ${}^tA = A$ dépendent continûment de A (voir le résultat de continuité des racines d'un polynôme dans l'exercice 114). Montrer que l'ensemble des matrices symétriques définies a $n+1$ composantes connexes (On fera intervenir la composante connexe par arcs de Id dans $GL_n(\mathbb{R})$.).

Exercice 55. Montrer qu'il ne peut y avoir d'homéomorphisme entre

a) le cercle et un intervalle de $\mathbb{R}$.

b) entre $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$.

(Indication on ôtera un point sur chaque ensemble et on étudiera les propriétés de connexité.)

Exercice 56. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Montrer que les composantes connexes de O sont tous des ouverts.

Exercice 57. On considère l'ensemble $\mathrm{Hom}([-1,1])$ des homéomorphismes de $[-1,1]$ que l'on munit de la topologie de la convergence uniforme.

a) Montrer que le sous-ensemble de $\mathrm{Hom}([-1,1])$ des homéomorphismes croissants est connexe par arcs.

b) En déduire que le sous-ensemble des homéomorphismes décroissants est connexe par arcs.

c) En déduire que $\mathrm{Hom}([-1,1])$ a deux composantes connexes.

8.3 Compacité

Exercice 58. Soit x_n une suite de $\mathbb{R}^n$. Montrer que

a) la suite x_n est bornée si et seulement s'il n'existe pas de sous-suite x_{n_k} telle que $\|x_{n_k}\| \to \infty$.

b) Unicité de la limite : la suite x_n converge vers a si et seulement si pour toute sous-suite x_{n_k} il existe une sous-suite $x_{n_{k_p}}$ qui converge vers a.

Exercice 59. Lesquels des sous-ensembles suivants sont compacts ?

a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$;
b) $[0,\infty[$;
c) $\mathbb{Q}$;
d) $\mathbb{Q} \cap [0,1]$;
e) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 = 1\}$;
f) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq 1 \text{ et } y = x^2\}$;
g) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 1 \text{ et } 0 \leq y \leq 1/x\}$.

Exercice 60. L'espace $[0,1]$ muni de la métrique triviale, est-il compact ?

Exercice 61. Soit $(E,\mathcal{T})$ un espace topologique séparé et soit $K \subset A \subset E$. Montrer que l'ensemble K est compact dans A si et seulement s'il est compact dans E.

Exercice 62. Soit A compact métrique. Montrer qu'il existe deux points x et y tels que $d(x,y) = diam(A)$.

Exercice 63. Soit $\mathbb{Q}$ avec la métrique usuelle et $S = \{r \in \mathbb{Q};\ 2 < r^2 < 3\}$. Montrer que S est fermé et borné dans $\mathbb{Q}$ mais pas compact.

Exercice 64. Soit l'espace vectoriel $C([0,1] : \mathbb{C})$ normé par $\|\cdot\|_\infty$. Trouver une suite de fonctions (f_n) de norme 1 qui réalise $\|f_n - f_m\|_\infty \geq 1,\ \forall\, m \neq n$. Que peut-on déduire ? (on pourra prendre $f_n(t) = e^{2in\pi t}$)

Exercice 65. Démontrer que dans ℓ^2 l'ensemble

$$A = \{x \in \ell^2;\ |x_n| \leq \frac{1}{n+1}\, \forall n\}$$

est compact.

Exercice 66. Soit A un compact d'un e.v.n., (x_n) une suite de A et L l'ensemble des valeurs d'adhérence de cette suite. Calculer $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, L)$.

Exercice 67. Soit A une partie compacte d'un e.v.n. E et $f : E \to E$ une fonction continue telle que $f(A) \subset A$. On suppose qu'il existe un point non isolé a de A tel que pour tout $x \in A$:

$$x \neq a \ \Rightarrow\ \|f(x) - a\| < \|x - a\|.$$

On définit la suite (x_n) de A par $x_0 \in A,\ x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que $x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$. En déduire que a est un point fixe de f.

Exercice 68. Soit K un compact métrique et $f : K \to K$ vérifiant

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \text{ si } x \neq y.$$

Montrer que f possède un unique point fixe. Peut-on toujours trouver $0 < k < 1$ tel que $d(f(x), f(y)) < kd(x, y)$?

Exercice 69.

a) Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, F)$ est atteinte.

b) On suppose que U est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall\, x \in U,\ \exists!\ y = P(x) \in F;\ d(x, F) = d(x, y).$$

Montrer que P est continue.

Exercice 70. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une bijection continue telle que $\lim\limits_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = \infty$. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 71. Montrer que si A et B sont deux compacts d'un e.v.n E, la réunion des segments joignant deux points arbitraires de A et B est aussi compacte.

Exercice 72. Soit $a \in \mathbb{R}$ et α_n une suite convergente vers 0. Étudier la suite $u_0 = a$, $u_{n+1} = 1/2(1 + \alpha_n)u_n + 1/2$. (montrer d'abord que la suite est bornée, puis montrer que si $x \neq 1$ est valeur d'adhérence, $2x - 1$ l'est aussi, et aboutir à une contradiction)

Exercice 73. Soit f une application de E dans F, espaces métriques. Montrer que si la restriction de f à tout sous-ensemble compact de E est continue alors f est continue.

Exercice 74. Soit E un espace métrique compact et $f : E \to E$ une fonction continue telle que $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 75. Trouver tous les compacts de $]0, \infty[$ muni de la distance $d(x, y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$.

Exercice 76. Expliquez pourquoi $d(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|$ définit une distance sur $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$. Les fermés bornés de $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ sont-ils compacts (on pourra considérer la suite de fonctions $f_n(x) = x^n$) ?

Exercice 77. Module de continuité : Soit (X, d) un espace métrique. Pour $f \in \mathcal{C}^0(X; \mathbb{R})$, on définit une l'application $\omega_f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ définie par $\omega_f(\varepsilon) = \sup \{|f(y) - f(x)|, d(x, y) \leq \varepsilon\}$. Montrer que si X est compact alors $\omega_f(\varepsilon)$ est fini pour tout $\varepsilon > 0$ et que la fonction ω_f est continue en 0.

Exercice 78. Soit $(X, \mathcal{T})$ et $(X', \mathcal{T}')$ deux espaces topologiques avec X compact et X' séparé. Montrer que pour une application continue et surjective $f : X \to X'$, l'image d'un ouvert est un ouvert. Que peut-on dire de l'image inverse d'un compact ? Montrer que si f est une bijection continue alors c'est un homéomorphisme.

Exercice 79. Un théorème de point fixe : Soit (X, d) un espace métrique compact et soit f une application continue de X dans X telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour $x \neq y$. Montrer que l'application f a un unique point fixe, i.e. il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = x$. (Indication : on étudiera la fonction $d(x, f(x))$.) En déduire que pour toute donnée initiale $x_0 \in X$ la suite récurrente donnée par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers x. Est-ce encore vrai si X n'est pas compact ? (Prendre la fonction $f(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 1})$ sur $\mathbb{R}$.)

Exercice 80. Utilité de la topologie produit : Montrer qu'il existe une unique suite $u \in l^\infty(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n = \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k-1} \frac{1 + 2|u_k|}{1 + |u_k|}.$$

Indications : On considèrera la fonction f sur $l^\infty(\mathbb{R})$ définie par $f(u)_n = \sum_{k=n}^{+\infty} 2^{-k-1} \frac{1+2|u_k|}{1+|u_k|}$. On vérifiera qu'un point fixe de f est nécessairement dans $[0, 2]^{\mathbb{N}}$ et que les hypothèses de l'exercice 79 sont vraies pour la distance $d(u, v) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} \frac{|u_n - v_n|}{1+|u_n - v_n|}$. On établira au passage les inégalités $\left|\frac{1+2x}{1+x} - \frac{1+2y}{1+y}\right| \leq \left|\frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y}\right| \leq \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$, pour $x, y \geq 0$.

Exercice 81. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts non vides d'un espace topologique $(X, \mathcal{T})$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est non vide et que pour tout ouvert O de X contenant $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ il existe n_0 tel que $K_{n_0} \subset O$. (Indication : Pour la deuxième partie, considérer $K_n \cap \complement_X O$.)

Exercice 82. Séparation des compacts :

a) Montrer que si K_1 et K_2 sont deux compacts d'un espace métrique (X, d), disjoints $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, alors il existe $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ tels que $d(K_1, K_2) = d(x_1, x_2) > 0$.

b) Montrer que dans $\mathbb{R}^n$ cela est encore vrai pour un compact K_1 et un fermé F_2.

c) Donner un exemple de fermés de $\mathbb{R}^2$ disjoints tels que $d(F_1, F_2) = 0 \neq d(x_1, x_2)$ pour tout $(x_1, x_2) \in F_1 \times F_2$

d) Montrer que en revanche pour deux fermés quelconques de $\mathbb{R}^n$, on peut trouver : 1) une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$ qui vaut 1 sur F_1 et 0 sur F_2 ; 2) deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$. (Indication : On utilisera la fonction $\frac{d(x,F_1)}{d(x,F_1)+d(x,F_2)}$.)

e) Dans un espace topologique séparé $(X, \mathcal{T})$, montrer que pour deux compacts disjoints $K_1 \cap K_2 = \emptyset$, il existe deux ouverts disjoints $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ tels que $K_1 \subset O_1$ et $K_2 \subset O_2$.

f) Montrer que ce dernier résultat est encore vrai pour des fermés disjoints si on suppose $(X, \mathcal{T})$ localement compact et dénombrable à l'infini (X peut s'écrire comme union dénombrable de compacts).

Exercice 83. Compactification par un point Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace localement compact. On considère l'espace topologique $(X', \mathcal{T}')$ donné par $X' = X \cup \{\infty\}$ par une base de voisinages de l'infini

$$\mathcal{BV}(\infty) = \left\{ \complement_X K \cup \{\infty\} ,\ K \text{compact de } (X, \mathcal{T}) \right\},$$

les bases de voisinages des points de X restant inchangées. Vérifier que $(X, \mathcal{T})$ est un sous-espace topologique de $(X', \mathcal{T}')$ et que $(X', \mathcal{T}')$ est compact. Que donne la compactification par un point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 84. Théorème de Dini : Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique compact.

a) Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ alors elle converge uniformément.

b) Donner un exemple ou la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ est décroissante, converge simplement mais pas uniformément (la limite ne sera pas continue).

c) Plus généralement pour un espace métrique (X', d'), montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathcal{C}^0(X;X')$ convergeant simplement vers $f \in \mathcal{C}^0(X;X')$ convergeant simplement vers f et telle que la suite $(d(f_n(.), f(.)))_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante alors elle converge uniformément.

Exercice 85. Théorème de d'Alembert : Il s'agit de montrer que tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≥ 1 admet une racine dans $\mathbb{C}$.

a) Par un argument de compacité, montrer qu'il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $|P(z_0)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$.

b) Expliquer pourquoi pour un tel z_0, l'ensemble $\left\{k \in \mathbb{N}^*, P^{(k)}(z_0) \neq 0\right\}$ est non vide. On notera k_0 son plus petit élément.

c) Vérifier que pour $\theta \in [0, 2\pi]$ et pour $\rho \to 0$ dans $\mathbb{R}^+$, on a

$$\left|P(z_0 + \rho e^{i\theta})\right|^2 = |P(z_0)|^2 + \frac{2}{k!}\operatorname{Re}\left(P(z_0)\overline{P^{k_0}(z_0)\rho^{k_0}e^{ik_0\theta}}\right) + O(\rho^{k_0+1}).$$

d) En déduire que l'on a nécessairement $P(z_0) = 0$.

Exercice 86. Théorème de Tychonoff et extraction de sous-suite :

a) On note $l^\infty(\mathbb{R}) = \mathcal{F}_b(\mathbb{N}; \mathbb{R})$, l'ensemble des suites réelles bornées. Une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l^∞ est bornée si il existe une constante C telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sup_{j\in\mathbb{N}} |f_n(j)| \leq C$. Montrer que de toute suite bornée $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de l^∞ on peut extraire une suite $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement.

b) Dans $\mathcal{F}_b([0, 1]; \mathbb{R})$, on considère la suite f_n des fonctions caractéristiques des ensembles $\bigcup_{p=1}^{2^{n-1}} \left]\frac{2p-1}{2^n}, \frac{2p}{2^n}\right[$. En utilisant l'écriture dyadique des réels (en base 2), montrer que l'on ne peut pas extraire de sous-suite simplement convergente. Que peut-on en déduire sur la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{F}_b([0, 1])$?

8.4 Espaces vectoriels normés

Exercice 87. Démontrer que dans tout espace normé on a si $x \neq 0$ et $y \neq 0$

$$\left\|\frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|}\right\| \leq 2\frac{\|x - y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 88. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\|P\| = \sup\{|P(x)| \mid x \in A\}$ soit une norme sur E.

b) La condition précédente étant vérifiée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définie par $\phi(P) = P(0)$ soit continue sur E.Indication : On considèrera des polynômes de la forme $\left(\frac{X^2-b^2}{b^2}\right)^n$ avec $b = \sup_{a\in A} |a|$.

Exercice 89. Sur $\mathbb{C}[X]$ on considère la norme définie par $\|P\| = \sup |a_i|$ si $P(X) = \sum_{i=0}^n a_i X^i$. Pour tout x_0 on considère l'application linéaire $\phi : \mathbb{C}[X] \to$

$\mathbb{C}$ définie par $\phi(P) = P(x_0)$. Déterminer les x_0 pour lesquels ϕ est continue et calculer alors sa norme.

Exercice 90. Montrer que l'application

$$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \to N(x, y) = \sup_{t \in [0,1]} |x + ty|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner la sphère unité.

Exercice 91. Pour quelles valeurs du réel λ définit-on une norme sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N_\lambda(x, y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}?$$

Comparer les deux normes N_λ et N_μ.

Exercice 92. Soit A une partie non vide d'un espace normé E et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction k-Lipschitzienne. Montrer que la fonction

$$g : E \to \mathbb{R},\ x \to g(x) = \sup_{t \in A} \{f(t) - k\|x - t\|\}$$

est bien définie. Vérifier que g prolonge f et que g est aussi k-Lipschitzienne.

Exercice 93. Soit A une partie non vide et bornée d'un espace normé E. Montrer que toute demi-droite d'origine a dans A rencontre la frontière de A. En déduire que A et $Fr(A)$ ont le même diamètre.

Exercice 94. Soit $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré n au plus. Montrer que

$$P \to \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| = \|P\|$$

est une norme ; on note, en particulier, $E_n \subset \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes normalisés (coefficient 1 pour le monôme maximal) de degré au plus n. Montrer qu'il existe $a(n) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall P \in E_n \quad \|P\| \geq a(n).$$

Exercice 95. Soit F l'ensemble des fonctions Lipschitzienne de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application

$$f \to N(f) = |f(0)| + \sup_{0 \leq x \leq y \leq 1} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|}.$$

Montrer que c'est une norme et comparer avec $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 96. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}.$$

Déterminer et dessiner la sphère unité.

Exercice 97. Dans l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on considère une famille $(f_1,\dots,f_p) \in E^p$ et on définit l'application $N : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ par

$$N(x_1,\dots,x_p) = \|\sum_{i=1}^{p} x_i f_i\|_{L^\infty}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Exercice 98. Soit C l'espace vectoriel des suites convergentes de nombres réels et C_0 le sous-espace des suites convergentes vers 0. On munit C et C_0 de la norme ℓ^∞.

a) Montrer que C_0 est fermé dans C.

b) On définit une application T de C dans C_0 en associant à la suite (x_n) la suite (y_n) définie par $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et $y_n = x_{n-1} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ pour $n \geq 1$.

   i) Montrer que T est linéaire continue et calculer $\|T\|$.

   ii) Montrer que T est bijective.

   iii) Montrer que pour tout $x \in C$, $\|T(x)\| \geq \frac{1}{2}\|x\|$.

   iv) Conclure que C et C_0 sont isomorphes.

Exercice 99. On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques. Calculer la norme de cette application dans les cas suivants :

a) $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont tous deux munis de la norme ℓ^∞.

b) $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme ℓ^1 et $\mathbb{R}^2$ de la norme ℓ^∞.

c) $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne et $\mathbb{R}^2$ de la norme ℓ^∞.

Exercice 100. Une base de $\mathbb{K}^n$ étant fixée, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on considère les normes

$$|X|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad |X|_\infty = \sup_{i\in\{1\dots n\}} |x_i|\,.$$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on leur associe les normes

$$\|A\|_p = \sup_{|X|_p=1} |AX|_p \quad p \in \{1, \infty\}.$$

Vérifiez que pour $A = (a_{ij})$ on a

$$\|A\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \sup_i \sum_j |a_{ij}|.$$

En déduire que $\sup_j \sum_i |a_{ij}|$ et $\sup_i \sum_j |a_{ij}|$ définissent des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 101. Calculer les normes des formes linéaires suivantes sur $\mathcal{C}([-1,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme.

a) $\int_0^1 f(x)\,dx$

b) $\int_{-1}^1 sign(x) f(x)\,dx$

c) $\int_{-1}^1 f(x)\,dx - f(0)$

d) $\frac{f(a)+f(-a)-2f(0)}{a^2}$, où $a \in]0,1]$ est une constante.

e) $\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2} f(\frac{1}{n})$.

Exercice 102.

a) Montrer que sur $\mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_n = \sum_{k=0}^n |P(k)|$ définit une norme.

b) Déterminer la norme de l'application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui au polynôme $P(X)$ associe le polynôme $XP(X)$, quand ces espaces sont munis respectivement des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_3$.

Exercice 103. Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On considère $T : E \to \mathbb{R}$ linéaire tel que $f \geq 0$ implique $Tf \geq 0$. Montrer que T est continue.

Exercice 104. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel normé alors $\overline{F}$ est un sous-espace vectoriel de E. Donner un exemple ou $\overline{F} \neq F$. Montrer l'équivalence $\left(\overset{\circ}{F} \neq \emptyset\right) \Leftrightarrow (F = E)$.

Exercice 105. Montrer que $|f|_2 = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2\,dt}$ définit une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.
Montrer que la forme linéaire $f \to f(0)$ n'est pas continue pour cette norme.
En déduire que $\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ f(0) = 0\}$ n'est pas fermé.
Montrer que les sous-espaces $F_1 = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \forall x \in [0,\frac{1}{2}],\ f(x) = 0\right\}$ et

$F_2 = \{f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \ \forall x \in [\frac{1}{2}, 1],\ f(x) = 0\big\}$ sont fermés dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ avec cette norme, que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ mais que $F_1 \oplus F_2$ n'est pas fermé.

Exercice 106. Sur $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ montrer que la quantité

$$N(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 + |f'(t)|^2 \ dt}$$

est une norme.
Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que : $\|f\|_\infty \leq CN(f), \forall f \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$. Les deux normes N et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?
Montrer que $F_0 = \{f \in \mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}),\ f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ pour la norme N et que la quantité $N'(f) = \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2 \ dt}$ est une norme sur F_0 équivalente à N.

Exercice 107. Pour A et B deux parties d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$, on note $A + B = \{x + y,\ x \in A,\ y \in B\}$.

a) Montrer que si A ou B est ouvert alors $A + B$ est ouvert.
b) Vérifier que si A et B sont convexes, $A + B$ est convexe.
c) Montrer que si A est compact et B est fermé, $A + B$ est fermé.
d) Donner un contre-exemple en dimension infinie où la somme de deux espaces vectoriels fermés n'est pas fermée. Dans le cas de $\mathbb{R}^2$ considérer l'exemple $A = \mathbb{R}_- \times \{0\}$ et $B = \left\{(x,y),\ y \geq \frac{1}{x},\ x > 0\right\}$.
e) Montrer que si A et B sont fermés et si de plus la somme $S : (x,y) \in A \times B \to S(x,y) = x + y \in E$ est propre (au sens où $S^{-1}(K)$ est compact si K est compact) alors $A + B$ est fermé.

Exercice 108. Soit $(E, \|\ \|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que s'il existe un convexe compact d'intérieur non vide dans E alors E est de dimension finie.

Exercice 109. On note $l^\infty_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles qui tendent vers 0 à l'infini. Vérifier que c'est un fermé de $l^\infty(\mathbb{R})$ pour la norme $\|\ \|_\infty$.
On note $E = \{x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}},\ ((n+1)x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{R})\}$. Montrer que E est un sous-espace vectoriel dense de $l^\infty_0(\mathbb{R})$.
Sur E on met la norme $\|x\|_E = \sup_{n\in\mathbb{N}} |(n+1)x_n|$. Montrer que les boules fermées de $(E, \|\ \|_E)$ sont des convexes compacts de $(l^\infty_0(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$. Que peut-on dire de leur intérieur pour la norme $\|\|_\infty$? Peut-on trouver une boule de $(E, \|\ \|_E)$ qui est dense dans la boule unité de $(l^\infty_0(\mathbb{R}), \|\ \|_\infty)$?

Exercice 110. Sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues $u : (E, \|\ \|_E) \to (F, \|\ \|_F)$, on sait que l'on peut mettre la norme

$$\|u\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Montrer que ce sup est en fait un maximum quand E est de dimension finie. Est-ce encore vrai en dimension infinie ?

Exercice 111. On note $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n. Pour $N \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on se donne une suite de points distincts $(z_k)_{k\in\{0,1,\dots,N\}}$ du disque unité ouvert $D(0,1)$.

a) Montrer que pour $N < \infty$, la quantité $\sup_{k\in\{0,\dots,N\}} |P(z_k)|$ définit une norme sur $\mathbb{C}_N[X]$ et que cette norme est équivalente à $\sup_{k\in\{0,\dots,N\}} \left|P^k(z_0)\right|$ et à $\sup_{z\in\overline{D(0,2)}} |P(z)|$.

b) Pour $N = +\infty$, montrer que la quantité $\sup_{k\in\mathbb{N}} |P(z_k)|$ définit une norme d'algèbre sur $\mathbb{C}[X]$. Est-elle équivalente à la norme $\sup_{z\in\overline{D(0,2)}} |P(z)|$?

Exercice 112. Théorème de Cayley-Hamilton : On travaille dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et pour une matrice A on note $P_A(X)$ son polynôme caractéristique : $P_A(X) = \det(X\,\mathrm{Id} - A)$.

a) Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (Indication, on travaillera sur la forme trigonalisée.)

b) En déduire que pour toute matrice dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $P_A(A) = 0$. Que peut-on dire pour les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

c) Reprendre l'exercice en utilisant la topologie de Zariski[2] (cf : Exercice 43). Indication : On vérifiera que l'ensemble des matrices dont toutes les valeurs propres sont distinctes est un ouvert de Zariski. Généraliser à un corps infini de caractéristique différente de 2 (pour que le déterminant ait les bonnes propriétés).

Exercice 113. Montrer que dans un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|_E)$, on ne peut avoir deux applications linéaires continues u et v telles que

$$u \circ v - v \circ u = \mathrm{Id}\,.$$

(On vérifiera $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}$).

Exercice 114. Continuité des racines d'un polynôme : On rappelle que pour une fonction entière ne s'annulant pas sur le cercle de centre $z_0 \in \mathbb{C}$ et de rayon $\rho > 0$, le nombre de zéros de f (comptés avec multiplicité) dans le disque $D(z_0, \rho)$ vaut (cf. cours sur les fonctions holomorphes) :

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\rho} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

[2]question subsidiaire qui demande d'avoir fair l'exercice 43

Pour $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$, on note $P(X,a) = a_n X^n + \cdots + a_0 \in \mathbb{C}[X]$. Un contour Γ étant choisi dans $\mathbb{C}$, montrer que les fonctions $P(z,a) \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ et $P'(z,a) \in \mathcal{C}^0(\Gamma)$ dépendent continûment de a (On met sur $\mathcal{C}^0(\Gamma)$, la norme du sup). En déduire en utilisant la formule donnée ci-dessus que les racines de $P(X,a)$ dépendent continûment de $a = (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Exercice 115. Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on note A^* la matrice adjointe de A, $A^* = \overline{{}^tA}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ la trace de A.

a) Montrer que la quantité $\sqrt{\mathrm{Tr}(A^*A)}$ définit une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. (On vérifiera que $\mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_{k,i=1}^n |a_{ki}|^2$).

b) Montrer que si A est une matrice hermitienne, on a $\mathrm{Tr}(A^*A) = \sum_{i=1}^n |\lambda_i|^2$ où les λ_i, $i = 1, \dots, n$ désignent les valeurs propres de A. (On rappelle que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$). En déduire que $d(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^n |\lambda_i(B-A)|^2}$ définit une distance sur l'ensemble des matrices hermitiennes. Est-ce encore vrai dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$?

Exercice 116. Soit $(E_n, \| \ \|_n)$ une suite d'espaces vectoriels normés de dimension finie. Rappeler pourquoi la topologie produit sur $\Pi_{n\in\mathbb{N}} E_n$ est métrisable. Est-ce que une distance donnant cette topologie est associée à une norme ?

Exercice 117. Normes et convexes : On considère un espace vectoriel réel E de dimension finie.

a) Montrer que si $\| \ \|$ est une norme sur E, la boule unité est un convexe symétrique ($x \in B(0,1)$ entraîne $-x \in B(0,1)$) borné.

b) Réciproquement, pour un convexe K de E on définit la jauge de K, p_K par
$$\forall x \in E, \quad p_K(x) = \inf \left\{ \alpha > 0,\ \frac{x}{\alpha} \in K \right\}.$$
Montrer que si K est un convexe ouvert borné symétrique de E, p_K est une norme sur E et que la boule unité pour cette norme est K.

c) En déduire que si K_1 et K_2 sont deux convexes d'intérieur non vide contenant 0, il existe $\alpha > 0$ et $\beta > 0$ tels que $\alpha K_1 \subset K_2 \subset \beta K_1$.

d) Que peut-on dire si E est de dimension infinie (on notera qu'alors la notion de borné dépend du choix d'une norme) ?

Exercice 118. Fonctions convexes : Sur un espace vectoriel réel E de dimension n, on dit qu'une fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est convexe si son épigraphe $epi(f) = \{(x,\lambda),\ f(x) \leq \lambda\}$ est un convexe de $E \times \mathbb{R}$. On supposera E de dimension n et on le munira d'une base $(e_1, \dots, e_n)$.

a) Montrer que si $x \in E$, il existe une fonction affine $a_x(y) = l(y-x) + f(x)$ sur E telle que $a_x(x) = f(x)$ et $a_x(y) \leq f(y), \forall y \in E$. (Indication :

On vérifiera que la fonction $\mathbb{R} \ni \theta \to f(x + \theta e_i)$ est convexe pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$

b) En déduire que $f = \sup_{a \text{affine, } a \leq f} a$ et que pour $\lambda \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E,\ f(x) \leq \lambda\}$ est fermé.

c) Pour $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, on note $|t| = \sum_{i=1}^n |t_i|$. Montrer que pour $x \in E$ et $|t| \leq 1$ on a

$$f(x + t_1 e_1 + \dots + t_n e_n) \leq (1 - |t|_1) f(x) + M_x \, |t|_1 \,,$$

avec $M_x = \max \{|f(x \pm e_i)|\,, \quad 1 \leq i \leq n\}$. En déduire que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in E,\ f(x) < \lambda\}$ est ouvert. En associant avec le résultat de b), en déduire que f est continue.

d) Montrer qu'une fonction f sur E est convexe si et seulement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ l'ensemble $\{x \in E,\ f(x) \leq \lambda\}$ est un fermé convexe.

e) Montrer que toute fonction convexe qui tend vers $+\infty$ quand $\|x\|_E$ tend vers l'infini admet un minimum.

8.5 Complétude

Exercice 119. Soit $E = \{a_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable, on définit $d : E \times E \to \mathbb{R}_+$ par

$$\forall i \in \mathbb{N} \quad d(a_i, a_i) = 0$$

$$\forall i \neq j \quad d(a_i, a_j) = \delta + \frac{1}{i+1} + \frac{1}{j+1}.$$

Montrer que c'est une distance si $\delta \geq 0$; (E, d) est-il complet ?

Exercice 120. On considère l'application $d : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$ telle que $d(0, z) = |z|$ et, pour z et z' non nuls, $d(z, z') = |z - z'|$ si z et z' ont le même argument, $d(z, z') = |z| + |z'|$ dans le cas contraire. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{C}$, reconnaître les boules pour cette distance ; comparer la convergence d'une suite pour cette distance et pour la distance usuelle. Montrer que $(\mathbb{C}, d)$ est complet.

Exercice 121. Sur l'espace $\mathbb{C}[X]$ des polynômes on pose, pour

$$P = \sum_0^n a_k X^k, \qquad \|P\|_\infty = \sup_k |a_k|,$$

$$\|P\|_1 = \sum_0^n |a_k|, \qquad \|P\|_2 = \sqrt{\sum_0^n |a_k|^2}.$$

Montrer que l'on définit ainsi trois normes non équivalentes et que l'espace $(\mathbb{C}[X], \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas complet.

Exercice 122. Soit E l'ensemble des fonctions de classe C^1 de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$. Démontrer que

$$\|f\| = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)| + \sup_{t\in[0,1]} |f'(t)| \text{ et } \|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} |f(t) + f'(t)|$$

définissent deux normes équivalentes sur E et que E est complet.

Exercice 123. Soit E l'ensemble des suites de nombres réels (x_n) telles que $x_n \in [0,1]$ $\forall n$. On pose $d(x,y) = \sup_n \frac{|x_n - y_n|}{n}$. Montrer que d est une distance et que E est un espace complet et compact. Ceci reste-t-il vrai si l'on prend sur E la distance $\sup_n |x_n - y_n|$?

Exercice 124. Montrer que l'espace $C([0,1];\mathbb{R})$ normé par $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\,dx$ n'est pas complet. (on pourra considérer la suite de fonctions $f_n(t) = \inf(n, \frac{1}{\sqrt{t}})$)

Exercice 125. $]0,1[$ et $[0,1]$ sont-ils homéomorphes ?

Exercice 126. On désigne par $E = C([0,1];\mathbb{R})$ l'e.v. des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ normé par la norme de la convergence uniforme. A tout $x \in E$ on associe la fonction

$$y(t) = 1/2\Big[1 + \int_0^1 te^{st}x(s)\,ds\Big].$$

Montrer que $y \in E$ et que l'application $f : E \to E$ définie par $f(x) = y$ est contractante de rapport $\frac{7}{8}$. En déduire qu'il existe un unique $a \in E$ tel que $a = f(a)$ et donner une majoration de $\|a - x_n\|_\infty$ si $x_0(t) = 1$ et $x_n = f(x_{n-1})$.

Exercice 127. Soit $\lambda \in]0,1[$, $a \in \mathbb{R}$ et g une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il existe une unique fonction f continue et bornée sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x réel $f(x) = \lambda f(x+a) + g(x)$. Calculer f si $g = \cos$.

Exercice 128. Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques complets, D une partie dense de X et (g_n) une suite d'applications 1-Lipschitzienne de X dans Y telle que pour chaque $x \in D$, la suite $g_n(x)$ converge dans Y. Montrer que g_n converge simplement sur X vers une application g de X dans Y et que g est continue.

Exercice 129. Peut-on appliquer le théorème des applications contractantes à la suite définie par $x_0 \in \mathbb{R}$ et $x_{n+1} = \sin(\cos^2 x_n)$?

Exercice 130. On considère E l'espace des fonctions f continues de $]0,1[$ dans $\mathbb{R}$ telles que la fonction $tf(t)$ soit bornée sur $]0,1[$. On munit E de la norme

$\|f\| = \sup |tf(t)|$. Montrer que E est complet et qu'il existe un unique $f \in E$ tel que, pour tout $t \in]0,1[$:

$$6f(t) = f(\frac{t}{3}) + f(\frac{t}{2}) + \frac{\cos t}{t}.$$

Exercice 131. Soit $E = [\frac{2}{3}, +\infty[$ sous-espace métrique de $\mathbb{R}$, et $f : E \to \mathbb{R}$ avec $f(x) = \frac{2x+6}{3x+2}$.

a) Montrer que E est complet et que $f(E) \subset E$.

b) Montrer que f est contractante.

c) Calculer l'unique point fixe a de f.

d) Si l'on prolonge f à $\widetilde{f} : \mathbb{R} \setminus \{-\frac{2}{3}\} \to \mathbb{R}$ par $\widetilde{f} = \frac{2x+6}{3x+2}$, alors $\widetilde{f}$ n'est pas contractante mais a 2 points fixes.

Exercice 132. Démontrer que si f est continue sur $[a, b]$, à valeurs réelles ou complexes et telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_a^b x^n f(x)\, dx = 0$ on a $f = 0$. (utiliser un raisonnement de densité).

Exercice 133. Sur $\mathbb{R}^2$ donner un exemple de fonction partiellement continue en tout point et qui est discontinue en tout point de $\mathbb{Q}^2$ (On utilisera la fonction $f_0(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ avec $f_0(0, 0) = 0$ et on numérotera les points de $\mathbb{Q}^2$).

Exercice 134. Soit $(E, \| \ \|)$ un espace de Banach. On note S_E la sphère unité de E et on dit que la norme $\| \ \|$ est uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in S_E, \quad (\|x - y\| > \varepsilon) \Rightarrow \left(\left\| \frac{x + y}{2} \right\| < 1 - \delta \right)$$

Montrer que si $\| \ \|$ est uniformément convexe et si C est une partie convexe fermée de E, alors pour tout $x \in E$ il existe un unique point de C noté $P_C(x)$ tel que

$$\|x - P_C(x)\| = \inf_{y \in C} \|x - y\|.$$

(On utilisera une suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de C minimisant la quantité $\inf_{y \in C} \|x - y\|$ et on montrera qu'elle est de Cauchy).

Donner une norme sur $\mathbb{R}^2$ (non uniformément convexe) pour laquelle la conclusion est fausse.

Exercice 135. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme euclidienne $\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$

a) Vérifier que l'on a

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \quad \left\| \frac{x + y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x - y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} \|x\|^2 + \frac{1}{2} \|y\|^2.$$

b) En déduire que pour tout convexe fermé C de $\mathbb{R}^n$, et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique $P_C(x) \in C$ tel que $\|x - P_C(x)\| = \inf_{y\in C} \|x - y\|$.

c) Montrer que le point $P_C(x)$ est caractérisé par

$$\forall y \in C, \quad (y - P_C(x), x - P_C(x)) \leq 0.$$

On interprétera géométriquement cette caractérisation.

d) En déduire que tout convexe fermé de $\mathbb{R}^n$ est égal à l'intersection de tous les demi-espaces fermés le contenant

e) **Séparation des convexes :** Montrer que si C_1 et C_2 sont deux convexes fermés disjoints de $\mathbb{R}^n$, l'un des deux étant compact, il existe un hyperplan affine les séparant.

Exercice 136. On note E' le dual topologique de E. En utilisant les résultats des exercices 117 et 135 montrer que si E est de dimension finie, on a

$$\|x\|_E = \max_{f\in E', f\neq 0} \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

Comparer à l'exercice 110.

Exercice 137. Vérifiez que $\mathbb{R}$ muni de la distance $d_a(x, y) = |\arctan(y) - \arctan(x)|$ n'est pas complet. Quel est son complété ?

Exercice 138. Sur $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ on met la norme $N_1(f) = \int_0^1 |f(t)|\ dt$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 \quad \text{si } \frac{1}{2} \leq x \\ (n+1)x - \frac{n+1}{2} + 1 \quad \text{si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 0 \quad \text{si } x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}. \end{cases}$$

Vérifiez que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour la norme N_1. En déduire que $\mathcal{C}^0([0, 1]; \mathbb{R})$ n'est pas complet pour la norme N_1.

Exercice 139. Montrer que le dual topologique E' d'un espace vectoriel normé $(E, \|\ \|)$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni de la norme

$$\|l\| = \sup_{\|x\|=1} |l(x)|$$

est un espace de Banach.

Plus généralement si $(E, \|\ \|_E)$ est un espace vectoriel normé et si $(F, \|\ \|_F)$ est un espace de Banach, alors $\mathcal{L}(E, F)$ muni de la norme

$$\|u\| = \sup_{\|x\|_E=1} |u(x)|_F$$

est un espace de Banach.

Exercice 140. Montrer que pour une norme quelconque sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $\mathrm{Id} + A$ est inversible et $\log(\mathrm{Id} + A)$ est bien défini dès que la norme de A est assez petite. (On vérifiera que c'est vrai en particulier pour $\|A\| < 1$ si $\| \ \|$ est une norme d'algèbre).

Exercice 141. On considère une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$. On met une norme d'algèbre $\| \ \|$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

a) Expliquez pourquoi $f(A)$ est une fonction continue (et même analytique) de A dans la boule ouverte de rayon R pour la norme $\| \ \|$. (On travaillera composante par composante et on justifiera proprement cette approche.)

b) On note $\overline{D}$ le disque unité fermé de $\mathbb{C}$ et Γ le cercle de rayon 1 orienté. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\|A\| < R$. Vérifier que la fonction $z \to f(zA)$ est holomorphe par rapport à z dans un voisinage de $\overline{D}$ et que l'on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$c_n A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f(zA)}{z^{n+1}} \, dz.$$

Exercice 142. On rappelle que les matrices diagonalisables forment une partie dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que l'on a pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$\det\left[\exp(A)\right] = \exp\left[\mathrm{Tr}(A)\right].$$

Exercice 143. On munit $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ d'une norme d'algèbre $\| \ \|$.

a) En utilisant l'exercice 140, montrer que l'application exponentielle $\exp : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définit un homéomorphisme local près de 0 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$. L'objectif des questions suivantes est de vérifier que l'application exponentielle est surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$.

b) En choisissant correctement une détermination du logarithme complexe, vérifier que toute matrice diagonalisable inversible peut s'écrire comme l'exponentielle d'une matrice.

c) En utilisant la série $\log(1 + x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$, montrer que $\mathrm{Id} + N$ peut s'écrire comme l'exponentielle d'une matrice si N est nilpotente.

d) En utilisant la décomposition de Jordan (toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ peut s'écrire comme la somme d'une matrice diagonalisable et d'une matrice nilpotente qui commutent), déduire de b) et c) que l'application exponentielle est surjective sur $GL_n(\mathbb{C})$.

e) L'application exponentielle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sur $GL_n(\mathbb{C})$ est-elle injective ?

f) L'application exponentielle est-elle surjective de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$?

Exercice 144. Rayon spectral et norme : Pour une matrice quelconque A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on appelle spectre de A et on note $\sigma(A)$ l'ensemble de ses valeurs propres. On définit alors le rayon spectral de A par $\rho(A) = \max\{|\lambda|,\ \lambda \in \sigma(A)\}$. Sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on prend dans un premier temps la norme d'algèbre associée à une norme $|\ |$ sur $\mathbb{C}^n$

$$\|A\|_0 = \sup_{|X|=1} |AX|\,.$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\rho(A)^n \leq \|A^n\|_0 \leq \|A\|_0^n$.

b) De la deuxième inégalité, déduire que l'on a pour z appartenant au disque ouvert de $\mathbb{C}$ de rayon $\frac{1}{\|A\|_0}$

$$(1 - zA)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (zA)^k.$$

c) Vérifier que la fonction $z \to (1 - zA)^{-1}$ est en fait holomorphe dans le disque ouvert de rayon $\frac{1}{\rho(A)}$. On pourra utiliser l'exercice 141 pour montrer que pour $\varepsilon > 0$, on peut trouver une constante positive C_ε telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|A^n\|_0 \leq C_\varepsilon \left(\frac{1}{\frac{1}{\rho} - \varepsilon}\right)^n.$$

d) A partir de a) et b), démontrer

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|_0^{\frac{1}{n}}\,.$$

e) Montrer que pour n'importe quelle norme $\|\ \|$ $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ on a la formule du rayon spectral :

$$\rho(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}\,.$$

Exercice 145. On rappelle qu'un espace métrique (X, d) est dit ultramétrique si la distance vérifie

$$\forall x, y, z \in \mathbb{N}, \quad d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}\,.$$

a) Montrer qu'une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'un espace ultramétrique est de Cauchy si et seulement si la distance $d(x_n, x_{n+1})$ tend vers 0 quand $n \to \infty$.

b) Pour un corps $\mathbb{K}$, on note $\mathbb{K}((X))$ l'ensemble des séries formelles "avec pôle en 0", i.e. l'ensemble des suites de $\mathbb{K}$ indexées par $n \in \mathbb{Z}$ nulles en dessous d'un certain rang.

$$\mathbb{K}((X)) = \{S = (s_n)_{n\in\mathbb{Z}},\ \exists n_0 \in \mathbb{Z}, \forall n \leq n_0,\ s_n = 0\}\,.$$

Comme pour $\mathbb{K}[[X]]$ (cf exercice 7), on écrit $S = \sum_{k=v(S)}^{+\infty} s_k X^k$ et on définit une distance ultramétrique sur $\mathbb{K}((X))$ à l'aide de la valuation en posant $d(S, T) = e^{-v(S-T)}$.

i) Montrer que $\mathbb{K}((X))$ muni de la distance ultramétrique est complet.

ii) Montrer que si $v(S) = 0$ alors $1 + XS$ est inversible dans $K[[X]] \subset \mathbb{K}((X))$.

iii) En déduire que $\mathbb{K}((X))$ est un corps dans lequel le corps des fractions rationnelles $\mathbb{K}(X)$ est dense.

c) Pour p premier, on écrit les entiers en base p : un entier $n \in \mathbb{N}$ s'écrit de manière unique $a_0 + a_1 p + a_2 p^2 \cdots + a_{d_n} p^{d_n}$ avec les coefficients a_k dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ On définit alors la valuation $v(n)$ d'un entier n comme le plus grand entier k tel que p^k divise n. En mimant l'étude de $\mathbb{K}((X))$, construire un corps qui contient $\mathbb{N}$ (et donc $\mathbb{Q}$) qui est complet pour la distance associée à la valuation v. C'est le corps des nombres p-adiques.

Exercice 146. Théorème de Cauchy-Lipschitz : On considère une fonction $f : \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}^d_y \to \mathbb{R}^d_y$ continue et localement Lipschitzienne par rapport à y : Pour tout $(t, y) \in \mathbb{R}^{1+d}$, il existe un voisinage V_{ty} de (t, y) et une constante C_{ty} qui dépend de (t, y) telle que

$$\begin{aligned} &\forall y_1, y_2 \in \mathbb{R}^d, \\ &\qquad ((t, y_1) \in V_{ty} \text{ et } (t, y_2) \in V_{ty}) \Rightarrow (\|f(t, y_2) - f(t, y_1)\| \leq C_{ty} \|y_2 - y_1\|) \,. \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses, on considère le problème de Cauchy (i.e. équation différentielle avec données initiales)

$$\left\{ \begin{array}{l} y'(t) = f(t, y(t)) \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^d. \end{array} \right. \tag{8.5.1}$$

a) Vérifier que $y \in \mathcal{C}^1([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R}^d)$ résout (8.5.1) si et seulement c'est un point fixe de l'application $\Phi : \mathcal{C}^0([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}([-\alpha, \alpha]; \mathbb{R}^d)$ définie par

$$[\Phi(y)]\,(t) = y_0 + \int_0^t f(s, y(s))\; ds.$$

b) Montrer que pour $\alpha > 0$ et R assez petits, Φ est une contraction de $\mathcal{C}^0([-\alpha, \alpha]; B_f(y_0, R))$ dans lui même. Conclure.

c) On note T la borne supérieure de l'ensemble des $t \in \mathbb{R}$ tels que (8.5.1) a une unique solution sur $[0, t]$. Montrer que si $T < +\infty$ alors on a $\lim_{t \to T} \|y(t)\| = +\infty$.

Exercice 147. Théorème des fonctions implicites : Soit f une fonction $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$ dans $\mathbb{R}^m$ et l'on rappelle que dans ce cas la différentielle de f par rapport à y en un point (x_0, y_0), notée $d_y f(x_0, y_0)$ est l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que $f(x_0, y) = f(x_0, y_0) + d_y f(x_0, y_0).(y - y_0) + o(\|y - y_0\|)$ quand $y \to y_0$.

On suppose que $f(0, 0) = 0$ et que $M = d_y f(0, 0)$ est dans $GL_m(\mathbb{R})$.

a) Montrer que pour $\alpha > 0$ et $r > 0$ assez petit l'application Φ définie sur $F_{\alpha r} = \mathcal{C}^0(B_f^n(0,\alpha); B_f^m(0,r))$ par

$$[\Phi(y)]\,(x) = y(x) - M^{-1}f(x,y(x)) = -M^{-1}\left[f(x,y(x)) - M.y(x)\right]$$

envoie F dans lui même et est une contraction de $F_{\alpha r}$.

b) En déduire que pour $\alpha > 0$ et $r > 0$ il existe une unique application continue y de $B_f^n(0,\alpha)$ dans $B_f^m(0,r)$ telle que $f(x,y(x)) = 0$ pour tout $x \in B_f(0,\alpha)$.

c) Vérifier que la solution $y(x)$ est en fait $\mathcal{C}^1$ et que sa différentielle vaut $d_x y(x) = -d_y f(x,y(x))^{-1} \circ d_x f(x,y(x))$.

Exercice 148. Théorème de Baire : Soit (X,d) un espace métrique complet :

a) Montrer qu'une suite décroissante de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, non vides, $F_n \neq \emptyset$, dont le diamètre tend vers 0 quand $n \to \infty$ a une intersection non vide.

b) Montrer qu'une intersection dénombrable d'ouverts denses est dense.
Indication : On prendra une suite $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'ouverts denses et pour $x \in X$, on construira pour tout voisinage V une suite décroissante de boules fermées $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $B_n \subset V \cap O_1 \cap \cdots \cap O_n$.

c) On appelle G_δ-dense une partie de X qui s'écrit comme intersection dénombrable d'ouverts denses. Montrer que la famille des G_δ-denses est stable par intersection dénombrable.

d) On appelle partie maigre de X une partie incluse dans un réunion dénombrable de fermés d'intérieur vide. Montrer que X n'est pas maigre et ne peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties maigres.

e) Montrer que si X est égal à une réunion dénombrable de fermés $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ alors la réunion des intérieurs $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F_n}$ est un ouvert dense de X. (On travaillera dans une boule fermée arbitraire de X).

f) Que peut-on dire pour un espace topologique $(X,\mathcal{T})$ si on remplace les mots "métrique complet" par localement compact (au sens ou tout point admet une base de voisinages compacts) ?

Exercice 149. Une application du théorème de Baire :

a) Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions réelles continues sur $[0,1]$ qui converge simplement vers f. Pour $n,p,q \in \mathbb{N}$ on note

$$F_{n,p} = \bigcap_{q\geq p} \left\{x \in [0,1]\,,\ |f_q(x) - f_p(x)| \leq \frac{1}{n+1}\right\}.$$

i) Montrer que pour n fixé, l'union $\bigcup_{p\in\mathbb{N}} F_{n,p}$ n'est autre que $[0,1]$.

ii) En appliquant le a), en déduire que $O_n = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} \overset{\circ}{F}_{n,p}$ est un ouvert dense de $[0,1]$. A l'aide du théorème de Baire à nouveau, en déduire que $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est un G_δ-dense de $[0,1]$.

iii) Expliciter ce que signifie $x \in G$ et en conclure que la limite simple f est continue en tout point de G.

b) Montrer que la fonction $1_\mathbb{Q}$ ne peut être limite simple d'une suite de fonctions continues.

c) Montrer que la dérivée de toute fonction dérivable sur $[0,1]$ est continue sur un G_δ-dense de $[0,1]$. (On écrira la dérivée comme une limite simple de fonctions continues).

8.6 Propriétés des espaces de fonctions continues

Exercice 150. Polynômes de Bernstein : L'objectif de cet exercice est de redémontrer de façon plus explicite la densité de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R})$. On commencera avec $a = 0$ et $b = 1$.

a) En dérivant la formule du binôme par rapport à X, montrer pour $n \in \mathbb{N}^*$ les identités de polynômes à 2 variables :

$$nX(X+Y)^{n-1} = \sum_{p=0}^{n} pC_n^p X^p Y^{n-p}$$

et

$$n(n-1)X^2(X+Y)^{n-2} = \sum_{p=0}^{n} p(p-1)C_n^p X^p Y^{n-p}.$$

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p x^p (1-x)^{n-p} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{p=0}^{n} (nx-p)^2 C_n^p x^p (1-x)^{n-p} = nx(1-x).$$

(Pour la deuxième identité, on utilisera les deux égalités du a)).

c) Pour $f \in \mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$, on note P_n le polynôme

$$P_n(X) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p f\left(\frac{p}{n}\right) X^p (1-X)^{n-p}.$$

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\left|x - \frac{p}{n}\right| \leq \alpha \Rightarrow \left|f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right)\right| \leq \varepsilon.$$

Vérifier que si $\left|x - \frac{p}{n}\right| \geq \alpha$ alors $\left(\frac{nx-p}{n\alpha}\right)^2 \geq 1$. En remarquant que

$$f(x) - P_n(x) = \sum_{p=0}^{n} C_n^p \left(f(x) - f\left(\frac{p}{n}\right)\right) x^p (1-x)^{n-p}$$

montrer que

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \varepsilon + \frac{2\,\|f\|_\infty}{n\alpha^2}.$$

Conclure que $\lim_{n\to\infty} P_n(x) = f(x)$ uniformément sur $[0,1]$.

d) Comment obtient-on en général le résultat pour $\mathcal{C}^0\left([a,b];\mathbb{R}\right)$?

Exercice 151. Soit (X,d) un espace métrique compact. Vérifier que $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ sépare les points : i) Pour tout $x \in X$ il existe $f \in \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ tel que $f(x) \neq 0$; ii) pour tout $x, y \in X$, $x \neq y$, il existe $f \in \mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ telle que $f(x) \neq f(y)$. (On utilisera la distance pour construire de telles fonctions).

Exercice 152. Soit (X,d) et (Y,d') deux espaces métriques compacts. On note $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{K}) \otimes \mathcal{C}^0(Y;\mathbb{K})$ le produit tensoriel (algébrique) de $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{K})$ avec $\mathcal{C}^0(Y;\mathbb{K})$, i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires finies $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \varphi_i(x)\psi_i(y)$ avec $\varphi_i \in \mathcal{C}^0(X;\mathbb{K})$, $\psi_i \in \mathcal{C}^0(Y;\mathbb{K})$ et $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Montrer d'abord pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ puis pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ que $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{K}) \otimes \mathcal{C}^0(Y;\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{C}^0(X \times Y;\mathbb{K})$.

Exercice 153. Calcul fonctionnel : On considère une algèbre normée $(\mathcal{A}, \|\ \|)$ complète avec unité et munie d'une involution antilinéaire (i.e. une application ${}^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ $\mathbb{R}$-linéaire telle que $(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*$ et $(A^*)^* = A$ pour $A \in \mathcal{A}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$) vérifiant pour tout $A \in \mathcal{A}$ $\|A^* A\| = \|A\|^2$. Une telle algèbre est appelée C^*-algèbre

a) **Un exemple :** Montrer que si on met un produit scalaire $(\ ,\ )$ sur $\mathbb{C}^n$ et que l'on considère sur $\mathbb{C}^n$ la norme hermitienne associée $\|x\|_2 = \sqrt{(x,x)}$, alors $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ muni de la norme $\|A\| = \sup_{\|x\|_2 = 1} \|Ax\|_2$ est une C^*-algèbre.

b) Pour $A \in \mathcal{A}$, on note $\rho(A)$ l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels que $(\lambda - A)$ admet un inverse dans A. Montrer que $\rho(A)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ (Pour $(\lambda_0 - A)$ inversible et λ proche de λ_0, on écrira $(\lambda - A) = (\lambda_0 - A)\left(1 + (\lambda - \lambda_0)(\lambda_0 - A)^{-1}\right)$ et on exprimera l'inverse du deuxième facteur à l'aide d'une série). Par un argument similaire (développement en série) montrer que $\rho(A)$ contient $\{\lambda \in \mathbb{C},\ |\lambda| > \|A\|\}$. En déduire que le complémentaire $\sigma(A)$ de $\rho(A)$, que l'on appellera spectre de A, est un compact de $\mathbb{C}$ inclus dans la boule de rayon $\|A\|$.

c) En utilisant l'holomorphie de la fonction $(1 - zA)^{-1}$ sur $\rho(A)$ comme dans l'exercice 144 (Complétude) montrer qu'en fait on a $\|A\| = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$ dès que $A^* = A$ (en fait le résultat est encore vrai dès que A et A^* commutent).

d) Montrer que pour $A \in \mathcal{A}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$ on a $\sigma(P(A)) = P(\sigma(A))$ et que $\|P(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)|$ (Pour ce dernier point on écrira $\|P(A)\|^2 = \|P(A)^*P(A)\| = \left\|\overline{P}P(A)\right\|$).

e) Montrer que pour $A \in \mathcal{A}$ le spectre de A^* se déduit de celui de A par conjugaison complexe, $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$. En déduire que si $A^* = A$ alors $\sigma(A)$ est un compact de $\mathbb{R}$.

f) Soit $A \in \mathcal{A}$ tel que $A^* = A$. En utilisant le théorème de Stone-Weierstrass (avec les polynômes sur $\sigma(A)$) montrer qu'il existe une unique application linéaire Φ_A de $\mathcal{C}^0(\sigma(A);\mathbb{C})$ dans $\mathcal{A}$ tel que

 i) Φ_A est un morphisme de C^*-algèbre : $\Phi_A(\lambda f+g) = \lambda\Phi_A(f)+\Phi_A(g)$, $\Phi_A(fg) = \Phi_A(f)\Phi_A(g)$, $\Phi_A(1) = 1$ et $\Phi_A(\overline{f}) = \Phi_A(f)^*$.

 ii) Si $f(x) = x$ alors $\Phi_A(f) = A$.

 iii) Φ_A est continue.

Ce résultat permet en fait de définir $f(A)$ pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $A^* = A$ et $f \in \mathcal{C}^0(\sigma(A))$ en posant $f(A) = \Phi_A(f)$.

Exercice 154. Lemme d'Urysohn : Cet exercice vise à démontrer un résultat qui généralise celui de l'exercice 151 et permet de généraliser celui de l'exercice 152.

a) Soit $(X, \mathcal{T})$ un espace topologique localement compact et dénombrable à l'infini [3] et soient F_1 et F_2 deux fermés disjoints de X

 i) Montrer qu'il existe deux ouverts O_1 et O_2 disjoints et tels que $F_1 \subset O_1$ et $F_2 \subset O_2$. Vérifier ensuite que l'on a $F_1 \subset O_1 \subset \overline{O_1} \subset \complement_X F_2$.

 ii) Montrer par récurrence sur n que l'on peut construire une une suite d'ouverts O_r indexée par $r = \frac{k}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{1, \dots 2^n\}$ telle que $F_1 \subset O_r \subset \overline{O_r} \subset O_{r'} \subset \overline{O_{r'}} \subset \complement_X F_2$ dès que $r < r'$. (Faire un dessin pour $n = 0$ puis $n = 1$.)

 iii) Pour $n \in \mathbb{N}$ on considère la fonction f_n définie sur X donnée par

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=1}^{2^n} 1_{\complement_X O_{\frac{k}{2^n}}}.$$

 Tracer le graphe de f_0, f_1 et f_2 en se plaçant sur $X = [0, 1]$. Vérifier que l'on a $f_n(x) < r = \frac{k}{2^n}$ si et seulement si $x \in O_r$. Montrer que la suite f_n est croissante bornée et donc converge simplement vers une fonction que l'on notera f.

 iv) Vérifier que si x et y appartiennent à $O_{\frac{k+1}{2^n}} \setminus \overline{O_{\frac{k}{2^n}}}$ alors on a pour tout $m \geq n$, $|f_m(y) - f_m(x)| \geq \frac{1}{2^n}$. En déduire que f est continue.

[3] On pourra se placer dans un premier temps dans le cas compact. Pour le cas général, on utilisera l'exercice 82 f).

v) En déduire le lemme d'Urysohn dans le cas compact : Si F_1 et F_2 sont deux fermés disjoints de $(X, \mathcal{T})$ compact, alors il existe une application continue qui vaut 0 sur un voisinage de F_1 et 1 sur un voisinage de F_2.

b) Montrer que $\mathcal{C}^0(X;\mathbb{R})$ sépare les points de X.

c) Reprendre l'exercice 152 pour $(X, \mathcal{T})$ et $(Y, \mathcal{T}')$ espaces topologiques compacts.

Exercice 155. Théorème de Cauchy-Arzelà : Soit f une application continue de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et soit $(t_0, x_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

a) Pour deux réels positifs $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, rappeler pourquoi la fonction f est bornée sur $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \times [x_0 - \beta, x_0 + \beta]$. On notera M la borne de f sur ce voisinage de (t_0, x_0) et on posera $\gamma = \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}$.

b) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on subdivise l'intervalle $[t_0, t_0 + \gamma]$ en posant $t_{N,i} = t_0 + \frac{i}{N}\gamma$, $i \in \{0, \dots, N\}$. On considère alors la fonction affine par morceaux x_N définie sur $[t_0, t_0 + \gamma]$ par

$$\begin{cases} x_N(t) = x_N(t_{N,i}) + (t - t_{N,i}) f\left(t_{N,i}, x_N(t_{N,i})\right) & \text{pour } t_{N,i} \leq t < t_{N,i+1}, \\ x_N(t_0) = x_0. \end{cases}$$

Vérifier que la suite $(x_N)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est équicontinue. En déduire qu'il existe une fonction x continue sur $[t_0, t_0 + \gamma]$ et une sous-suite $(x_{N_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers x sur $[t_0, t_0 + \gamma]$.

c) Vérifier que pour $N \in \mathbb{N}^*$ la fonction x_N vérifie

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \gamma], x_n(t) = x_0 + \int_0^t \sum_{t_{N,i} < t} 1_{[t_{N,i}, t_{N,i+1}]}(s) f\left(t_{N,i}, x_N(t_{N,i})\right) ds.$$

d) A l'aide de c), montrer que la limite x trouvée en b) vérifie

$$\forall t \in [t_0, t_0 + \gamma], x(t) = x_0 + \int_0^t f\left(s, x(s)\right) ds.$$

En déduire que x est $\mathcal{C}^1$ et résout sur $[t_0, t_0 + \gamma]$ le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = f\left(t, x(t)\right) \\ x(t_0) = x_0. \end{cases}$$

e) A-t-on unicité de la solution (On pourra considérer $f(x) = \sqrt{|x|}$, $x_0 = t_0 = 0$) ? Comparer au théorème de Cauchy-Lipschitz (Exercice 146).

8.7 Espaces de Hilbert

Exercice 156. Identités de polarisation : Soit $(E, (\ ,\ ))$ un espace préhilbertien sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $\|\ \|$ la norme associée.

a) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, montrer que l'on a pour tout $x, y \in E$

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[+\|+x+y\|^2 - \|-x+y\|^2\right]$$

b) Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, montrer que l'on a pour tout $x, y \in E$

$$(x, y) = \frac{1}{4}\left[+\|+x+y\|^2 - \|-x+y\|^2 + i\|ix+y\|^2 - i\|-ix+y\|^2\right].$$

c) En déduire que l'on peut toujours retrouver le produit scalaire à partir de la norme.

Exercice 157. On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$ muni d'une norme $\|\ \|$ vérifiant l'identité de la médiane :

$$\forall x, y \in E, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

L'objectif est de montrer que E muni de cette norme est nécessairement un espace préhilbertien. Il s'agit donc de construire un produit scalaire et compte tenu de l'exercice 156 on pose

$$\forall x, y \in E, (x, y) = \frac{1}{4}\left[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right].$$

Il reste à vérifier que l'on a bien défini ainsi un produit scalaire.

a) Montrer que pour tout $x, y \in E$ on a $(x, y) = (y, x)$ et $(x, x) = \|x\|^2$.

b) Montrer que pour $x_1, x_2, y \in E$ on a $(x_1 + x_2, y) - (x_1, y) - (x_2, y) = 0$ (On utilisera l'identité de la médiane avec les paires $(x_1 + y, x_2 + y)$ et $(x_1 - y, x_2 - y)$).

c) Montrer, en utilisant b), que si $x, y \in E$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a $(rx, y) = r(x, y)$ et, en utilisant un argument de continuité, que c'est encore vrai pour $r \in \mathbb{R}$.

d) En déduire que (x, y) définit bien un produit scalaire sur E qui donne la norme $\|\ \|$.

e) Traiter de même le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 158. Séries de Fourier : On identifie l'ensemble des fonctions continues complexes périodiques de période 2π avec l'ensemble des fonctions continues complexes sur le cercle unité $S^1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, |x|^2 + |y|^2 = 1\right\}$. On note $\mathcal{C}^0(S^1; \mathbb{C})$.

a) Expliquez pourquoi on peut identifier $L^2(S^1, \frac{d\theta}{2\pi})$ avec $L^2\left([0,2\pi], \frac{d\theta}{2\pi}\right)$, pourquoi $L^2(S^1, \frac{d\theta}{2\pi})$ muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} \overline{f(\theta)} g(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$$

est un espace de Hilbert et pourquoi $\mathcal{C}^0(S^1)$ est dense dans $L^2(S^1)$ (Cf cours d'intégration).

b) Vérifier que $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ est un système orthonormé de $L^2(S^1)$.

c) En appliquant un corollaire de Stone-Weierstrass, montrer que l'espace des polynômes trigonométriques que $Vect\left\{e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}\right\}$ est dense dans $L^2(S^1)$. En déduire que $(e^{in\theta})_{n\in\mathbb{Z}}$ est une base hilbertienne de $L^2(S^1)$.

d) En déduire que pour tout $f \in L^2(S^1)$, on a $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n e^{in\theta}$ dans $L^2(S^1)$ en posant $f_n = \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(\theta) \frac{d\theta}{2\pi}$. Montrer de plus l'identité de Parseval

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 \frac{d\theta}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |f_n|^2 .$$

Exercice 159. Polynômes de Legendre : Sur $\mathbb{R}[X]$ on définit la forme bilinéaire :

$$(P,Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\ dt.$$

a) Vérifier que muni de ce produit scalaire $\mathbb{R}[X]$ est un espace préhilbertien.

b) Est-ce un espace de Hilbert ? Quel est son complété ?

c) En appliquant à la base $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, montrer qu'il existe une et une seule famille orthonormée P_n dans laquelle P_n est exactement de degré n et vérifie $(P_n, X_n) > 0$. Vérifier que la famille $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base algébrique de $\mathbb{R}[X]$.

d) En déduire que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2([-1,1], dx)$.

e) On définit le polynôme Q_n par

$$Q_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n}(t^2-1)^n.$$

Montrer que Q_n est de degré n et a n racines simples dans $(-1,1)$. Montrer que Q_n est orthogonal à tout polynôme de degré inférieur à n et en déduire $Q_n = \lambda_n P_n$. Calculer (Q_n, Q_n) et en déduire λ_n. Calculer $Q(-1)$ et $Q(1)$.

f) Établir les relations

$$\forall n \geq 2,\ nQ_n = (2n-1)XQ_{n-1} - (n-1)Q_{n-2},$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, \quad \frac{d}{dt}[(1-t^2)P_n'(t)] + n(n+1)P_n(t) = 0.$$

Bibliographie

[1] G. Choquet. Cours d'Analyse. Tome II. Masson (1964).

[2] J.L. Kelley. General Topology Van Nostrand (1955).

[3] N. Bourbaki. Eléments de mathématique. Topologie Générale. Hermann.

[4] C. Tisseron. Notions de Topologie. Introduction aux espaces fonctionnels. Hermann (1985).

[5] H. Brezis. Analyse Fonctionnelle. Théorie et applications. Masson (1983).

[6] M. Reed. B. Simon. Methods of modern mathematical physics. Tome I. Functional Analysis. Academic Press (1975).

[7] W.S. Massey. Algebraic topology : an introduction. (deuxième édition) Graduate Texts in Mathematics, Vol. 56. Springer-Verlag (1977).

Index