UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
FACULTÉ DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique

S4, 2021-2022

Espace euclidien et Espace hermitien

Matokia an'i Jehovah amin'ny fonao rehetra
Fa aza miankina amin'ny fahalalanao.
Ohabolana 3:5

1 Espace euclidien

Dans cette section, E désigne un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1.1 Produit scalaire et norme

Définition 1.1 Soit f une fbs sur E. On dit que f est un produit scalaire sur E si elle est non dégénérée et positive, c'est-à-dire, si $\mathrm{Ker}\, f$=0 et $f(x,x) \geq 0$ pour tout $x \in E$.
Dans le cas où E est de dimension fini n, f est un produit scalaire si elle a pour signature $(n, 0)$.

Proposition 1.2 *Soit f une fbs positive sur E de fq associée q. Alors*
- $\forall x \in E$, $(q(x) = 0 \Rightarrow x \in \mathrm{Ker}\, f)$.
- $\forall x, y \in E$, $|f(x,y)| \leq \sqrt{q(x)q(y)}$.

Démonstration. Soit $x, y \in E$. On a, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$f(\lambda x + y, \lambda x + y) = \lambda^2 q(x) + 2\lambda f(x,y) + q(y) \geq 0.$$
– Si $q(x) = 0$, nécessairement $f(x,y) = 0$. En effet, supposons que $f(x,y) \neq 0$ et choisissons $\lambda = (-q(y) - 1)/(2f(x,y))$. Dans ce cas, $f(\lambda x + y, \lambda x + y) = -1$. Ce qui contredit l'hypothèse "f positive".
– Si $q(x) \neq 0$, $\lambda^2 q(x) + 2\lambda f(x,y) + q(y)$ est un trinôme du second degré en λ qui est toujours ≥ 0. Donc son discriminant réduit Δ' est toujours négatif ou nul. Or $\Delta' = f^2(x,y) - q(x)q(y)$.

Définition 1.3 On appelle norme sur E toute application $N : E \to \mathbb{R}_+$ telle que
(i) Si $N(x) = 0$, alors $x = 0$
(ii) $\forall x, y \in E$, $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$
(ii) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$

Proposition 1.4 *Soit f un produit scalaire sur E et q la fq associée. L'application $x \to \sqrt{q(x)}$ est une norme sur E.*

Définition 1.5 Un espace euclidien est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension finie et muni d'un produit scalaire.

Notation: Si E est un espace euclidien, son produit scalaire sera noté $<,>$.
Remarque: Tout espace euclidien admet une base orthonormale.

1.2 Adjoint d'un endomorphisme

Définition 1.6 Soit E un espace euclidien et u un endo (ou opérateur) sur E. On appelle adjoint de u l'endo u^* défini par

$$\forall x, y \in E, < u^*(x), y >=< x, u(y) > .$$

Proposition 1.7 *Soit E un espace euclidien et $(a_1, \ldots, a_n)$ une base orthonormale de E. Si $M = \mathrm{Mat}(u, (a_i))$ et $M^* = \mathrm{Mat}(u^*, (a_i))$, alors $M^* = {}^tM$*

Proposition 1.8 *Soit u, v des opérateurs sur E et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a:*
(i) $(u^*)^* = u$;
(ii) $(u + v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \lambda u^*$;
(iii) $(uv)^* = v^* u^*$.

Définition 1.9 Soit E un espace euclidien et u un opérateur sur E. On dit que u est:
- symétrique (ou auto-adjoint) si $u^* = u$;
- orthogonal si u est inversible et $u^* = u^{-1}$;

1.3 Diagonalisation d'un endo symétrique

Proposition 1.10 *Soit u un endo symétrique sur E, espace euclidien de dimension n. Alors*
(1) *u admet n valeurs propres réelles*
(2) *Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de u, alors* $\mathrm{Ker}(u - \lambda e)$ *et* $\mathrm{Ker}(u - \mu e)$ *sont orthogonaux*

Démonstration. Soit $(a_1, \ldots, a_n)$ une base orthonormale de E.
On a: $E = \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n;\ x_i \in \mathbb{R}\}$.
(1) Soit $E' = \{x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n;\ x_i \in \mathbb{C}\}$. E' est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$ contenant E. Notons u' l'endo de E' défini par $u'(\alpha a_i) = \alpha u(a_i)$ pour tout i et pour tout complexe α. u' est une extension de u sur E' et a les mêmes valeurs propres que u dans $\mathbb{C}$. Soit λ une valeur propre de u' et $a = \alpha_1 a_1 + \cdots + \alpha_n a_n$ un vecteur propre associé.
Posons $\bar{x} = \bar{x}_1 a_1 + \cdots + \bar{x}_n a_n$ pour tout vecteur $x = x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$ de E'. On a

$$u'(\bar{a}) = u'(\sum_i \bar{\alpha}_i a_i) = \sum_i \bar{\alpha}_i u(a_i) = \overline{\sum_i \alpha_i u(a_i)} = \overline{u'(a)} = \overline{\lambda a} = \overline{\lambda}\bar{a}.$$

Donc $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de u' associée à $\bar{a}$.
Notons, d'autre part, par f la fbs définie sur E' par

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, \forall i, j, f(\alpha a_i, a_j) = \alpha < a_i, a_j > .$$

Par un calcul simple, on a $f(u'(x), y) = f(x, u'(y))$ pour tous x et y. Par suite, $f(u'(a), \bar{a}) = f(a, u'(\bar{a}))$ ou encore $\lambda f(a, \bar{a}) = \overline{\lambda} f(a, \bar{a})$.
Or $f(a, \bar{a}) = \sum_i \alpha_i \bar{\alpha}_i \neq 0$. Donc $\lambda = \overline{\lambda}$.
(2) Soit $x \in \mathrm{Ker}(u - \lambda e)$ et $y \in \mathrm{Ker}(u - \mu e)$. On a
$(\lambda - \mu) < x, y >=< \lambda x, y > - < x, \mu y >=< u(x), y > - < x, u(y) >= 0$.
Ainsi $< x, y >= 0$.

Proposition 1.11 *Soit u un endo symétrique d'un espace euclidien E de dimension n. Alors il existe une base $(b_1, \dots, b_n)$ de E telle que les b_i soient des vecteurs propres de u.*

Corollaire 1.12 *Tout endo symétrique d'un espace euclidien E est diagonalisable.*

Proposition 1.13 *Soit u un endo symétrique d'un espace euclidien E. La forme g définie par*

$$\forall x, y \in E, g(x, y) =< u(x), y >$$

est une fbs sur E.

Proposition 1.14 *Soit g une fbs sur E. Alors il existe un unique endo symétrique u de E tel que*

$(*)$ $$\forall x, y \in E, g(x, y) =< u(x), y >$$

Démonstration. Soit (a_i) une base orthonormale de E, B la matrice de g dans cette base. Soit u un endo de E de matrice M dans cette base.
Alors u vérifie $(*)$ si $M = B$. Dans ce cas, d'après la Prop **??**, $M^* = {}^tB = B = M$. Donc u est symétrique.

2 Espace hermitien

2.1 Forme sémi-linéaire et forme sesqui-linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{C}$.

Définition 2.1 Une forme sémi-linéaire sur E est une application $h : E \to \mathbb{C}$ ayant les propriétés suivantes:
 (i) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $h(x + y) = h(x) + h(y)$;
 (ii) Pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, $h(\lambda x) = \overline{\lambda} h(x)$;

Définition 2.2 Une forme sesqui-linéaire sur $E \times F$ est une application $f : E \times F \to \mathbb{C}$ telle que :
 (1) Pour tout $y \in F$, $f_{\cdot y}$ est une forme linéaire sur E
 (2) Pour tout $x \in E$, $f_{x\cdot}$ est une forme sémi-linéaire sur F

2.2 Forme hermitienne

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.

Définition 2.3 Une forme hermitienne sur E est une forme sesqui-linéaire f sur $E \times E$ vérifiant la propriété suivante:

$$\forall x, y \in E, \ f(y, x) = \overline{f(x, y)}.$$

Définition 2.4 Soit f une forme hermitienne sur E. On appelle forme quadratique associée à f l'application $q : E \to \mathbb{R}, x \to q(x) = f(x, x)$.

NB: f et q sont liées par la relation

$$f(x,y) = \frac{1}{4}\{[q(x+y) - q(x-y)] + i[q(x+iy) - q(x-iy)]\}.$$

Définition 2.5 On appelle noyau d'une fh f le noyau de l'application sémi-linéaire $\varphi : E \to E^*, y \to \varphi(y) = f_{\cdot y}$. Autrement dit,

$$\operatorname{Ker} f = \{y;\ f(x,y) = 0\ \forall x \in E\}.$$

Remarque. On a également $\operatorname{Ker} f = \{x;\ f(x,y) = 0\ \forall y \in E\}$.

Définition 2.6 On dit qu'une fh f est non dégénérée si $\operatorname{Ker} f = 0$.

Expression d'une fh. Soit E un $\mathbb{C}$ev de dimension n, $\mathcal{B} = (e_j)$ une base de E, $x = \sum_i x_i e_i$ et $y = \sum_j y_j e_j$ deux vecteurs de E. On a :

$$f(x,y) = \sum_{i,j} f(x_i e_i, y_j e_j) = \sum_{i,j} f(e_i, e_j) x_i \bar{y}_j.$$

En posant $a_{i,j} = f(e_i, e_j)$, on a $a_{j,i} = \bar{a}_{i,j}$. La matrice $(a_{i,j})$ est appelée *matrice* de f dans la base $\mathcal{B}$. Notons que $a_{i,i}$ est réel pour tout i.

Toute fh a donc pour expression de la forme

$$\sum_i a_i x_i \bar{y}_i + \sum_{i \neq j} a_{i,j} x_i \bar{y}_j$$

et la fq associée a pour expression

$$q(x) = \sum_i a_i |x_i|^2 + \sum_{i \neq j} a_{i,j} x_i \bar{x}_j$$

où les a_i sont des réels et $a_{j,i} = \bar{a}_{i,j}$ pour tout couple (i,j) tel que $i \neq j$.

Proposition 2.7 *Une fh d'un $\mathbb{C}$ev de dimension n est non dégénérée ssi sa matrice est de rang n.*

Proposition 2.8 *Soit F un sev d'un $\mathbb{C}$ev E et f une fh sur E. Alors $E = F \oplus F^{\perp}$ si et seulement si la restriction de f à F est non dégénérée .*

Proposition 2.9 *Si $\dim E = n$ et f une fh de rang r, alors E admet une base f-orthogonale (a_i) telle que $f(a_i, a_i)) \neq 0$ pour $i \leq r$ et 0 sinon.*

Proposition 2.10 *Si $\dim E = n$ et f une fh de rang r, alors il existe un couple unique (p, p') tel que $p + p' = r$ et une base f-orthogonale dans laquelle la fq associée a pour expression*

$$q(x) = \sum_{i=1}^{p} |x_i|^2 - \sum_{i=p+1}^{r} |x_i|^2.$$

Le couple (p, p') est appelé signature de f (ou de q).

Définition 2.11 On dit qu'une fh f (ou la fqh associée q) est positive si $q(x) \geq 0$ pour tout x.

Proposition 2.12 (Inégalité de Schwarz) *Si f est une fh positive, on a*

$$\forall x, y,\ |f(x,y)|^2 \leq f(x,x)f(y,y).$$

Proposition 2.13 *Si f est une fh non dégénérée positive et q la fqh associée, alors l'application $x \to \sqrt{q(x)}$ est une norme sur E.*

Définition 2.14 Un espace hermitien est un $\mathbb{C}$ev de dimension finie muni d'un produit scalaire, c-à-d, muni d'une fh non dégénérée positive.

Proposition 2.15 *Tout espace hermitien admet une base orthonormale.*

2.3 Adjoint d'un endo

Définition 2.16 Soit E un espace hermitien dont le produit scalaire est noté $(|)$ et soit u un opérateur sur E. On définit l'adjoint u^* de u comme dans le cas réel par

$$\forall x, y \in E,\ (u^*(x)|y) = (x|u(y)).$$

Proposition 2.17 *Soit E un espace hermitien, u et v deux opérateurs sur E et $\lambda \in \mathbb{C}$.*
a) Si A est la matrice de u dans une base orthonormale, alors $\overline{{}^tA}$ est la matrice de u^* dans cette base orthonormale;
b) On a $(u^*)^* = u$, $(u+v)^* = u^* + v^*$, $(\lambda u)^* = \bar{\lambda}u^*$ et $(uv)^* = v^*u^*$.

Définition 2.18 Un opérateur d'un espace hermitien est dit hermitien s'il est égal à son adjoint.

Proposition 2.19 *Soit u un opérateur. Alors*

$$u \text{ hermitien} \iff \forall x,\ (u(x)|x) \text{ réel}$$

Proposition 2.20 *Tout opérateur hermitien u d'un espace hermitien E de dimension n admet n valeurs propres réelles et est diagonalisable.*

Démonstration. (1) Comme E est un $\mathbb{C}$ev, u admet n valeurs propres.
Soit λ une valeur propre et x un vecteur propre associé. Comme u est hermitien, $(u(x)|x)$ est réel. Or $(u(x)|x) = \lambda(x|x) = \lambda||x||^2$ et $||x|| > 0$. Donc λ est réel.