UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Mention Mathématiques
et Informatique

L2-S4,2021-2022

Examen : Espace euclidien
Document non autorisé
Durée: 3h

Exercice 1

Soit f la fbs définie sur $\mathbb{R}^4$ de matrice $M = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

1) Réduire q (utiliser la méthode matricielle). En déduire le rang et la signature de f.
2) Déterminer une base f-orthogonale $\mathcal{B}$ de E.
3) Déterminer une base de Ker f.
4) Trouver la base duale $\mathcal{B}^*$ de $\mathcal{B}$.

Exercice 2

Soit g la fbs sur $E = \mathbb{R}^3$ de matrice $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.

1) Montrer que E muni de g est un espace euclidien.
2) Trouver une base g-orthonormale $\mathcal{B}$ de E.
3) Soit u l'endomorphisme de E défini par sa matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $\mathcal{B}_0$.
   $a)$ Montrer que u est symétrique.
   $b)$ Déterminer le réel a tel que $\chi_u(t) = -t(t-a)^2$.
4) Déterminer une base (b_1, b_2, b_3) de E où b_1, b_2 et b_3 sont des vecteurs propres de u.
5) Soit h la fbs définie par $h(x,y) = g(u(x), y)$ pour tout $(x,y) \in E^2$.
Montrer que le rang de h est égal au rang de A.