UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
SCIENCES ET TECHNOLOGIES
Mention Mathématiques
et Informatique

L2-S4,2021-2022

Forme quadratique

Ankino amin'i Jehovah ny asanao,
dia ho lavorary izay kasainao.
Ohabolana 16:3

1 Dual d'un espace vectoriel

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$).

Définition 1.1 On appelle forme linéaire (fl) sur E toute application linéaire f de E vers $\mathbb{K}$, c-à-d, $f(\alpha x+y) = \alpha f(x)+f(y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$. Muni de l'addition des applications et de la multiplication par des scalaires, l'ensemble de toutes les fl sur E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, appelé dual de E noté E^*.
Le dual de E^* est appelé bidual de E noté E^{**}.

Exemple de fl: Soit E l'ensemble de toutes les fonctions réelles continues sur $[0, 1]$. E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et l'application φ définie sur E par $\varphi(f) = \int_0^1 f(x)dx$ est une fl sur E.

Proposition 1.2 *Si E est de dimension finie n et $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de E, alors pour tout i, l'application $b_i^* : E \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par:*

$$\forall x = \sum_{j=1}^{n} x_j b_j, \quad b_i^*(x) = x_i$$

est une fl sur E vérifiant $b_i^*(b_j) = \delta_{i,j}$ où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et 0 sinon.
De plus, $b_1^*, b_2^*, \ldots b_n^*$ forment une base de E^*.

Corollaire 1.3 *Si E est de dimension finie, alors* $\dim E^* = \dim E$.

Définition 1.4 La base $(b_1^*, b_2^*, \ldots, b_n^*)$ de E^* définie précédemment est appelée base duale de $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

Définition 1.5 Soit E_1 un sev de E. On appelle orthogonal de E_1 (au sens du dual) le sev $E_1^\perp$ de E^* défini par:

$$\forall f \in E^*, (f \in E_1^\perp \iff \forall x \in E_1, f(x) = 0).$$

Autrement dit, $E_1^\perp = \{f \in E^*;\ f/_{E_1} = 0\}$.

Exemple: Prenons $E = \mathbb{R}^3$ et $E_1 =< e_1 + e_2 >$ où (e_1, e_2, e_3) est la base canonique de E. Soit $f = x_1e_1^* + x_2e_2^* + x_3e_3^* \in E^*$. On a:
$f \in E_1^\perp \iff f(e_1 + e_2) = 0 \iff x_1 + x_2 = 0 \iff f = x_1(e_1^* - e_2^*) + x_3e_3^*$.
Donc $E_1^\perp =< e_1^* - e_2^*, e_3^* >$.

Proposition 1.6 *On a:*

a) $0^\perp = E^*$ *et* $E^\perp = 0$*;*

b) Pour tous sev E_1 et E_2 de E,

- *si $E_1 \subset E_2$, alors $E_2^\perp \subset E_1^\perp$;*
- *$E_1^\perp + E_2^\perp \subset (E_1 \cap E_2)^\perp$. On a l'égalité si E est de dimension finie.*
- *$(E_1 + E_2)^\perp = E_1^\perp \cap E_2^\perp$;*

Démonstration. : voir TD.

Proposition 1.7 *Si E est de dimension finie n et F un sev de E, alors*

$$\dim F^{\perp} = n - \dim F.$$

Démonstration. D'après la Prop 1.6 a), cette proposition est vraie si $F = 0$ ou $F = E$. Supposons que F soit propre et $\dim F = p$ ($0 < p < n$). Soit $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une base de E telle que $(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ soit une base de F. Soit $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)$ la base duale de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Pour prouver la proposition, il suffit de montrer que $(a_{p+1}^*, \ldots, a_n^*)$ est une base de $F^{\perp}$.
Pour tout $x = x_1 a_1 + \cdots + x_p a_p \in F$ et pour tout $j > p$, $a_j^*(x) = x_1 a_j^*(a_1) + \cdots + x_p a_j^*(a_p) = 0$. Ce qui prouve que pour tout $j > p$, $a_j^* \in F^{\perp}$.
D'autre part, soit $f \in F^{\perp}$. Comme $(a_1^*, a_2^*, \ldots, a_n^*)$ est une base de E^*, f peut s'écrire $f = \sum\limits_{1 \leq j \leq n} \alpha_j a_j^*$. On a, pour tout $i \leq p$, $f(a_i) = \alpha_i = 0$. Donc $f = \sum\limits_{j>p} \alpha_j a_j^*$.
Par suite, $(a_{p+1}^*, \ldots, a_n^*)$ est une base de $F^{\perp}$.

2 Forme bilinéaire symétrique

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application.
Pour tout $x \in E$ (resp. $y \in E$), on note $f_{x\cdot}$ (resp. $f_{\cdot y}$) l'application de E vers $\mathbb{R}$ définie par $f_{x\cdot}(y) = f(x, y)$ (resp. $f_{\cdot y}(x) = f(x, y)$).

Définition 2.1 f est dite une *forme bilinéaire* sur E si
(1) $\forall x \in E$, $f_{x\cdot}$ est une fl sur E;
(2) $\forall y \in E$, $f_{\cdot y}$ est une fl sur E.
On dit que f est symétrique si, pour tout $(x, y) \in E \times E$, $f(x, y) = f(y, x)$.

Notons que si f est symétrique, alors $f_{x\cdot} = f_{\cdot x}$. Dans ce cas, on écrit simplement f_x

Définition 2.2 (Noyau d'une fbs) Soit f une forme bilinéaire symétrique (fbs) sur E. On appelle *noyau de f* le sev $\operatorname{Ker} f = \{x \in E;\ f_x = 0\} = \{x \in E;\ \forall y \in E, f(x, y) = 0\}$.

Définition 2.3 Soit E de dimension finie n, $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ une base de E et f une fbs sur E. On appelle matrice de f relativement à la base $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ la matrice $A = (a_{i,j})$ où $a_{i,j} = f(b_i, b_j)$.
Comme f est symétrique, on a $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout (i, j).

Expression de $f(x, y)$ dans la base $(b_i)_i$.
Soit $A = (a_{i,j})$ la matrice de f relativement à la base $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.
Si $x = \sum_i x_i b_i$ et $y = \sum_j y_j b_j$, alors

$$f(x, y) = \sum_i x_i \sum_j f(b_i, b_j) y_j = \sum_{i,j} f(b_i, b_j) x_i y_j.$$

Ainsi,

$$f(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x_i y_j.$$

Sous forme matricielle, on a $f(x, y) = {}^t\!XAY$ où $X = {}^t(x_1\, x_2\, \cdots x_n)$, $Y = {}^t(y_1\, y_2\, \cdots y_n)$.

Définition 2.4 Le rang de la matrice A est appelé *rang* de f:

$$\mathrm{rang}(f) = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}\, f) = \dim E - \dim(\mathrm{Ker}\, A).$$

Proposition 2.5 *Soit* (b_i) *et* (b'_i) *deux bases de* E*,* f *une fbs sur* E*,* $A = \mathrm{Mat}(f,(b_i))$ *et* $A' = \mathrm{Mat}(f,(b'_i))$*. Si* P *est la matrice de passage de* (b_i) *vers* (b'_i)*, alors*

$$A' = {}^tPAP.$$

Définition 2.6 On dit qu'une fbs f est *non dégénérée* si $\mathrm{Ker}\, f$=0. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est *dégénérée*.

Proposition 2.7 *Si* E *est de dimension finie, alors* f *est non dégénérée ssi sa matrice est inversible.*

Définition 2.8 On dit que les vecteurs x, y sont orthogonaux relativement à f si $f(x, y) = 0$.

Définition 2.9 Soit X une partie non vide de E. On appelle orthogonal de X relativement à f le sev de E formé des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de X, noté $X^\perp$:

$$X^\perp = \{y \in E/\ \forall x \in X, f(x,y) = 0\}.$$

On note $v^\perp$ l'orthogonal de $\{v\}$ relativement à f.

Définition 2.10 Soit $\mathcal{B} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ une base de E et f une fbs sur E. On dit que $\mathcal{B}$ est une base orthogonale relativement à f ou tout simplement une base f-orthogonale si $f(a_i, a_j) = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$.
On dit qu'elle est f-orthonormale si elle est f-orhogonale et si $f(a_i, a_i) = 1$ pour tout i.

3 Forme quadratique

Définition 3.1 On appelle forme quadratique (fq) sur un $\mathbb{R}$ev E toute application $q : E \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les deux conditions suivantes:

(1) $\forall x \in E$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $q(\lambda x) = \lambda^2 q(x)$;

(2) L'application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par:

$$\forall (x,y) \in E \times E, f(x,y) = \frac{1}{2}[q(x+y) - q(x) - q(y)]$$

est une fbs sur E.
f est appelée la forme polaire associée à q, et q la fq associée à f:

$$\forall x \in E, q(x) = f(x,x).$$

Si $(a_{i,j}) = \mathrm{Mat}(f, (b_i))$, dans la base (b_i), $q(x)$ a pour expression:

$$q(x) = \sum_{1 \le i \le n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j.$$

NB: Si f est la forme polaire de q, $f(x,y)$ se déduit de $q(x)$ en remplaçant $a_i x_i^2$ par $a_i x_i y_i$ pour tout i, et $2a_{i,j} x_i x_j$ par $a_{i,j}(x_i y_j + x_j y_i)$ pour tout $i < j$.

Définition 3.2 Une fq q est positive si $q(x) \ge 0$ pour tout x.

Proposition 3.3 *Si q est une fq positive sur E de forme polaire f, alors*

$$\forall (x,y) \in E^2, (f(x,y))^2 \le q(x)q(y).$$

4 Réduction (ou décomposition en carrées) d'une forme quadratique

Soit E un $\mathbb{R}$ev de dimension n, $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Si $x \in E$, on note $(x_1, \dots, x_n)$ ses coordonnées dans cette base. Soit q une fq sur E non nulle et définie par

$$q(x) = \sum_{1 \le i \le n} a_i x_i^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{i,j} x_i x_j.$$

Théorème 4.1 *Il existe des fl $\ell_1, \dots, \ell_r$ linéairement indépendantes telles que*

$$q(x) = \alpha_1 \ell_1^2(x) + \cdots + \alpha_r \ell_r^2(x).$$

où $1 \le r \le n$ et les α_i sont tous non nuls.

Démonstration. Raisonnons par récurrence sur $n = \dim E$. C'est évident si $n = 1$. Supposons que le th est vrai pour toute fq q_1 sur un espace de dim $n-1$. Soit q une fq sur E de dim n. Nous allons distinguer deux cas et utiliser la méthode de Gauss.
<u>1° cas</u>: $(a_1, a_2, \dots, a_n) \ne 0$. Nous utilisons ici l'identité $a^2 + 2ab = (a+b)^2 - b^2$.
Supposons que $a_1 \ne 0$. Isolons tous les termes contenant x_1. Notons $R_1 := R_1(x_2, \dots, x_n)$ la somme de tous les termes ne contenant pas x_1 et posons $\Phi_1 := \Phi_1(x_2, \dots, x_n) = \sum_{j>1} a_{1,j} x_j$. On a:

$$\begin{aligned} q(x) &= (a_1 x_1^2 + 2\sum_{j>1} a_{1,j} x_1 x_j) + R_1 &&= \frac{1}{a_1}[(a_1 x_1)^2 + 2(a_1 x_1)\Phi_1] + R_1 \\ &= \frac{1}{a_1}(a_1 x_1 + \Phi_1)^2 - \frac{1}{a_1}\Phi_1^2 + R_1 &&= \frac{1}{a_1}\ell_1^2(x) + q_1(x) \end{aligned}$$

où $\ell_1(x) = a_1 x_1 + \Phi_1$ et $q_1(x) = -\frac{1}{a_1}\Phi_1^2 + R_1$.
Comme $q_1(x)$ ne contient pas x_1, appliquons à q_1 l'hypothèse de récurrence. Il existe p fl $\ell_2, \dots, \ell_{p+1}$ $(1 \le p \le n-1)$ linéairement indépendantes telles que

$$q_1(x) = \alpha_2 \ell_2^2(x) + \cdots + \alpha_{p+1} \ell_{p+1}^2(x).$$

Comme ℓ_1 contient x_1 et les autres ne la contiennent pas, alors $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_{p+1}$ sont linéairement indépendantes et $q(x) = \alpha_1 \ell_1^2(x) + \cdots + \alpha_{p+1} \ell_{p+1}^2(x)$.

où $\alpha_1 = (1/a_1)$ et $p+1 \leq n$.

<u>2° cas</u>: $(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 0$. Supposons que $a_{1,2} \neq 0$. On va isoler tous les termes contenant x_1 et x_2. On a:

$$\begin{aligned} q(x) &= (2a_{1,2}x_1x_2 + 2\sum_{j>2} a_{1,j}x_1x_j + 2\sum_{j>2} a_{2,j}x_2x_j) + R_2 \\ &= \frac{1}{2a_{1,2}}[(2a_{1,2}x_1)(2a_{1,2}x_2) + 2(2a_{1,2}x_1)\Phi_1 + 2(2a_{1,2}x_2)\Phi_2] + R_2 \end{aligned}$$

où $\Phi_i := \Phi_i(x_3, \ldots, x_n) = \sum_{j>2} a_{i,j}x_j$ $(i = 1, 2)$ et $R_2 := R_2(x_3, \ldots, x_n)$ désigne la somme de tous les termes dans $q(x)$ ne contenant pas x_1 et x_2.
Puis appliquons à l'expression entre crochet l'identité

$$ab + ac + bd = \frac{1}{4}[(a+b+c+d)^2 - (a-b-c+d)^2] - dc.$$

En prenant $a = 2a_{1,2}x_1$, $b = 2a_{1,2}x_2$, $c = 2\Phi_1$ et $d = 2\Phi_2$, on a:

$$q(x) = \alpha_1\ell_1^2(x) + \alpha_2\ell_2^2(x) + q_2(x)$$

où $\begin{cases} \alpha_1 &= -\alpha_2 \;=\; 1/2a_{1,2} \\ \ell_1(x) &= a_{1,2}x_1 + a_{1,2}x_2 + \Phi_1 + \Phi_2 \\ \ell_2(x) &= a_{1,2}x_1 - a_{1,2}x_2 - \Phi_1 + \Phi_2 \\ q_2(x) &= R_2 - (1/2a_{1,2})\Phi_1\Phi_2. \end{cases}$

$q_2(x)$ ne contenant pas x_1, x_2, il existe p fl $\ell_3, \ldots, \ell_{p+2}$ $(1 \leq p \leq n-2)$ linéairement indépendantes telles que

$$q_2(x) = \alpha_3\ell_3^2(x) + \cdots + \alpha_{p+2}\ell_{p+2}^2(x).$$

Comme ℓ_1 et ℓ_2 contiennent x_1, x_2 et sont linéairement indépendantes et que les autres ne contiennent pas x_1, x_2, alors $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_{p+2}$ sont linéairement indépendantes et

$$q(x) = \alpha_1\ell_1^2(x) + \cdots + \alpha_{p+2}\ell_{p+2}^2(x).$$

Définition 4.2 Réduire une fq q, c'est transformer $q(x)$ sous la forme

$$q(x) = \alpha_1\ell_1^2(x) + \cdots + \alpha_r\ell_r^2(x)$$

appelée forme réduite de q, les α_i étant tous non nuls et les ℓ_i lin. indépendantes.

Proposition 4.3 *Soit $q(x) = \alpha_1\ell_1^2(x) + \cdots + \alpha_r\ell_r^2(x)$ une forme réduite de q. Alors*

$$\operatorname{Ker} f = \{x \in E;\ \ell_1(x) = \cdots = \ell_r(x) = 0\}.$$

Démonstration. La forme polaire associée à q est définie par $f(x, y) = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\ell_i(x)\ell_i(y)$.
On a

$$x \in \operatorname{Ker} f \iff \forall y \in E, f_x(y) = 0 \iff f_x = 0 \iff \sum_{i=1}^{r} \alpha_i\ell_i(x)\ell_i = 0$$

Comme les ℓ_i sont lin. indép et $\alpha_i \neq 0$ pour tout i, alors

$$x \in \operatorname{Ker} f \iff \forall i, \ell_i(x) = 0.$$

Proposition 4.4 *Soit $q(x) = \alpha_1 \ell_1^2(x) + \cdots + \alpha_r \ell_p^2(x)$ une forme réduite de q. Alors* $\operatorname{rang}(q) = p$.

Proposition 4.5 *Soit f une fbs non nulle sur E de dim finie. Alors E admet une base f-orthogonale.*

Proposition 4.6 *Soit f une fbs non nulle sur E de dimension n, de fq q et de rang p. Alors il existe une base f-orthogonale et un unique couple d'entiers (r, s) tels que $r + s = p$ et dans cette base, $q(x) = \sum_{i=1}^{r} x_i^2 - \sum_{i=r+1}^{p} x_i^2$.*
(r, s) est appelé signature de f ou de q.

Proposition 4.7 *Si f est une fbs non dégénérée et positive, alors E admet une base f-orthonormale.*

Proposition 4.8 *E admet une base f-orthonormale ssi f a pour signature $(n, 0)$, n étant la dimension de E.*

5 Recherche d'une base f-orthogonale

Soit f une fbs non nulle sur E de dimension n, q la fq associée dont la forme réduite est $q(x) = \alpha_1 \ell_1^2(x) + \cdots + \alpha_p \ell_p^2(x)$.

On résout le système d'équations linéaires $(S) \begin{cases} \ell_1(x) & = & t_1 \\ \vdots & & \\ \ell_p(x) & = & t_p \end{cases}$

où $t_1, \ldots, t_p$ sont des variables.
Sous forme matricielle, on a $AX = T$ où A est une matrice d'ordre $p \times n$, $X = {}^t(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $T = {}^t(t_1, t_2, \ldots, t_p)$.
On résout (S) par la méthode de pivot de Gauss:
- On échelonne la matrice augmentée $(A|I_p)$ sous forme réduite. On obtient $(B|Q)$.
- Comme $\ell_1, \ldots, \ell_p$ sont linéairement indépendantes, alors A est de rang p. On peut donc exprimer p variables, supposons $x_1, x_2, \ldots, x_p$, en fonction des $n - p$ autres et des variables $t_1, t_2, \ldots, t_p$. Alors

$$(S) \iff X = x_{p+1} b_1 + x_{p+2} b_2 + \cdots + x_n b_{n-p} + t_1 b_{n-p+1} + \cdots + t_p b_n.$$

$(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ est une base f-orthogonale.