UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
FACULTÉ DES SCIENCES
Département de Mathématiques
et Informatique

S4, 2021-2022

TD: Forme quadratique

Exercice 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $v_1 = (1, 3, 2)$, $v_2 = (3, 4, 2)$ et $v_3 = (4, 2, 3)$.
1- Montrer que ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$.
2- Trouver la base duale de cette base.
3- Déterminer une base de $E_1^{\perp}$ où $E_1 =< v_2 >$.

Exercice 2

Sur $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_0$, on définit la fbs f de forme quadratique

$$q(x) = 6x_1^2 + 6x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

1) Déterminer la matrice A_0 de f relativement à $\mathcal{B}_0$.
2) On considère les vecteurs $b_1 = (2, 1, 3)$, $b_2 = (-1, 0, -1)$ et $b_3 = (-3, -1 - 5)$.
  a) Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  b) Déterminer la matrice A de f relativement à $\mathcal{B}$. Que peut-on en déduire?
  c) Déterminer l'expression de q dans $\mathcal{B}$.
3) En utilisant la formule de changement de base, déduire la décomposition en carrés de $q(x)$ dans $\mathcal{B}_0$.

Exercice 3

1) Déterminer la forme polaire f de q définie sur $\mathbb{R}^3$ par

$$q(x) = x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

2) Réduire q. En déduire signature et rang de q.
3) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$.
4) Déterminer les éléments f-isotropes de $\mathbb{R}^3$, i.e, les éléments x tels que $q(x) = 0$.
5) Déterminer les éléments x de $\mathbb{R}^3$ tels que $q(x) = 1$.

Exercice 4

1) Déterminer la signature de chacune des fq suivantes, définies sur $\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} q_1(x) &= -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 \ (n = 3) \\ q_2(x) &= x_1x_2 + x_1x_3 + 2x_1x_4 + x_2x_3 + 2x_2x_4 \ (n = 4) \end{aligned}$$

2) Trouver une base f_i-orthogonale de $\mathbb{R}^n$, f_i étant la forme polaire de q_i $(i = 1, 2)$.
3) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f_i$ pour $i = 1, 2$.

Exercice 5

Sur $\mathbb{R}^4$ muni de la base canonique $\mathcal{B}_0$, on définit la fbs f de forme quadratique

$$q(x) = -4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_1x_4 + 2x_2x_3 - 64x_2x_4 + 50x_3x_4.$$

1) Montrer que $q(x) = (x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4)^2 - (x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4)^2 + (-4x_2 + 3x_3 + 4x_4)^2$.
2) On pose $\ell_1(x) = x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4$, $\ell_2(x) = x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 5x_4$ et $\ell_3(x) = -4x_2 + 3x_3 + 4x_4$.
Montrer que les fl ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 sont linéairement indépendantes.

3) Trouver une base f-orthogonale de $\mathbb{R}^4$.
4) Déterminer la matrice de f relativement à cette base.
5) Trouver une base de $\operatorname{Ker} f$.
6) Trouver une autre décomposition en carrés de $q(x)$ en utilisant la méthode matricielle.

Exercice 6
Soit q la fq sur $\mathbb{R}^3$ définie par: Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$

$$q(x) = 5x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

1) Montrer que $\mathbb{R}^3$ muni de la forme polaire f associée à q est un espace euclidien.
2) Trouver une base orthonormale $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ de $\mathbb{R}^3$.
3) Soit x un vecteur non nul de $\mathbb{R}^3$. Déterminer l'équation dans $\mathcal{B}$ du sev orthogonal à x.

Exercice 7
Sur $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $a_1 = (1, 1, -1)$, $a_2 = (-2, 1, 1)$ et $a_3 = (-1, -2, 1)$.
1) Montrer que $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Trouver un produit scalaire f pour que $\mathcal{B}$ soit une base f-orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 8
Soit q la fq sur $\mathbb{R}^4$ définie par: Pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$,

$$q(x) = x_1^2 + 2x_2^2 + 6x_3^2 + 3x_4^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_1x_4 - 2x_2x_3 - 4x_3x_4.$$

1) Réduire $q(x)$ en isolant tout d'abord tous les termes contenant x_1 puis ceux contenant x_2.
2) Trouver une base f-orthogonale $\mathcal{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ de $\mathbb{R}^4$ telle que la 4-ième composante de b_i $(i = 1, 2, 3)$ dans la base cano $\mathcal{B}_0 = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est nulle.
3) Soit E le sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par e_1, e_2 et e_4. Soit q_1 la restriction de q à E, i.e, pour tout $x \in E$, $q_1(x) = q(x)$.
   a) Exprimer $q_1(x)$ en fonction de x_1, x_2, x_3 où $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_4$.
   b) Montrer que E muni de la forme polaire f_1 de q_1 est un espace euclidien.

Exercice 9
Sur $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$, on considère les fbs f et g de fq respectives q et q' telles que
   $q(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3;$
   $q'(x) = x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3.$
1) Montrer que f est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2) Soit u l'endo symétrique de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall x, y,\ \ f(u(x), y) = g(x, y)$$

et A sa matrice dans $\mathcal{B}$.
   a) Déterminer A et trouver ses valeurs propres.
   b) Trouver une base f-orthonormale (b_1, b_2, b_3) de $\mathbb{R}^3$ telle que b_1, b_2, b_3 soit des vecteurs propres de u et (b_1, b_2, b_3) une base g-orthogonale.