Université d'Antananarivo

Domaine Sciences et Technologie

Département de Mathématiques & Informatique

Mention Mathématiques et Informatique

NOTE DE COURS D'ANALYSE

DEUXIÈME ANNÉE DE LICENCE

Semestre 4

Fanilo R. Randriamahaleo

Maître de conférence

Année Universitaire : 2017 - 2018

Table des matières

INTRODUCTION

Cette note de cours, destinée aux étudiants de la deuxième année de licence en Mathématiques et Informatique, est consacrée à l'Analyse. Elle traite les séries numériques, les suites et séries de fonctions, les séries entières, les intégrales (de Riemann et généralisées) dépendant d'un paramètre.

Le cours est présenté dans sa version la plus utile pour la résolution des exercices et problèmes figurant à la fin de chaque chapitre, sans tomber dans l'accumulation de recettes propres à quelques manuels.

Certains résultats énoncés dans cette note ne sont pas démontrés afin de ne pas alourdir le cours. On donne des démonstrations qui présentent des intérêts techniques pour résoudre les exercices. Les étudiants curieux qui veulent des démonstrations sont invités à consulter les ouvrages dédiés. Pourtant, il est vivement conseillé de lire et de comprendre les démonstrations car elles présentent des intérêts techniques pour résoudre les exercices.

Les exercices sont souvent des applications directes du cours et sont faciles à résoudre. Les solutions, qui suivent directement les énoncés des exercices, sont rédigées de façon détaillée et peuvent servir dans de nombreux cas comme modèle de corrigé-type.

Je remercie par avance les étudiants qui me signaleront, au couriel `jafetra@gmail.com`, les erreurs éventuelles malgré le soin que j'ai porté à cette note.

Fanilo R. RANDRIAMAHALEO
Maître de Conférences

Chapitre 1

THÉORIE DES SÉRIES

Tout au long de ce chapitre, $\left(E\,,\|\cdot\|\right)$ désignera un $\mathbb{K}-$espace vectoriel normé .

1.1 Généralités

Etudier une série, de terme général noté u_n, c'est étudier la suite formée par $u_0,\ u_0+u_1,\ u_0+u_1+u_2,\ \cdots$

Définition 1.1.1. On appelle **série** à termes dans E tout couple $\left(\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ formé d'une suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes dans E et de la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (à termes dans E) définie par $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k=u_0+u_1+u_2+\cdots+u_n,\ (n\in\mathbb{N})$.

- Une **série numérique** (réelle ou complexe) est une série à termes dans $\mathbb{K}$.
- L'élément u_n est appelé le $n-$ième terme (ou terme général) de la série.
- La suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ s'appelle la **suite des sommes partielles** de la série et l'élément S_n est appelé la $n-$ième somme partielle.

La série est notée $\sum_{n\geq 0}u_n$.

Définition 1.1.2. Soient $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}u_n$ deux séries à termes dans E.

(1). On appelle **série somme** des séries $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$, la série de terme général (u_n+v_n).

(2). On appelle **série produit** des séries $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$, la série de terme général $w_n=\sum_{k=0}^{n}u_kv_{n-k}$.

Définition 1.1.3. Soit $\sum_{n\geq 0}u_n$ une série à termes dans E. On dit que

- la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ est convergente si la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles converge dans E et dans ce cas, la limite S de la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est appelée la somme de la série et on note $S=\lim_{n\to+\infty}S_n=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n$.
- la série $\sum_{n\geq 0}u_n$ est divergente si la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles ne converge pas.
- deux séries $\sum_{n\geq 0}u_n$ et $\sum_{n\geq 0}v_n$ sont de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Exemple 1.1.4. La série géométrique

Soit q un nombre réel. La série $\sum q^n$ est appelée **série géométrique de raison q**. On a

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} \ (\text{ pour } \ q \neq 1) \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} S_n = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{si} \quad |q| < 1 \\ +\infty & \text{si} \quad |q| \geq 1 \end{cases}$$

Donc la série $\sum q^n$ converge si $|q| < 1$ et divergente dans le cas contraire.

Définition 1.1.5. On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est **commutativement convergente** si pour toute permutation σ de $\mathbb{N}$, la série $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ est convergente et a la même somme que $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Noter qu'une série commutativement convergente est nécessairement convergente, en prenant pour σ la permutation identité.

Définition 1.1.6. On dit qu'une série de terme général $\sum_{n\geq 0} v_n$ est une série de paquet de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ s'il existe une application $\varphi \colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ **strictement** croissante telle que $v_n = \displaystyle\sum_{k=\varphi(n-1)+1}^{\varphi(n)} u_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1.1.7. *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, toute série de paquet de $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et a la même somme.*

Mais en général, la convergence d'une série de paquet n'entraîne pas la convergence de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Proposition 1.1.8. *Soient $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes dans E et $n_0 \in \mathbb{N}$. Alors les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq n_0}$ sont de même nature et si elles convergent, on a : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{n_0-1} u_n + \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.*

Preuve. Supposons que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. Puisque pour tout $n \geq n_0$, $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$, la série $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ converge et on a $\displaystyle\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k$.

Réciproquement, si $\sum_{n\geq n_0} u_n$ converge, pour tout $n \geq n_0$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$ et la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge. □

Définition 1.1.9. On dit que la série $\sum u_n$, à termes dans E vérifie le critère de Cauchy si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N \ \text{ et } \ \forall p \geq N, \ \text{ on a } \left\| \sum_{k=1}^{n} u_{n+k} \right\| \leq \varepsilon.$$

Autrement dit, la série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy si la suite de ses sommes partielles est une suite de Cauchy.

La proposition suivante donne une condition nécessaire pour qu'une série soit convergente.

Proposition 1.1.10. *Si la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, on a $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Preuve. Notons $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ et $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = S_n - S_{n-1}$. Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} u_n = S - S = 0$. □

- La proposition ci-dessus dit que si $\lim_{n\to+\infty} u_n \neq 0$, la série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est divergente. On dit que la série est grossièrement divergente.
- La réciproque de la proposition ci-dessus est fausse : il se peut que $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ alors que la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est divergente.

Exemple 1.1.11. Considérons la série harmonique : $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$. Pour $n \geq 1$, on a $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ et

$$S_{2n} - S_n = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}.$$

Mais pour tout $1 \leq p \leq n$, on a $n+1 \leq n+p \leq 2n$ c'est-à-dire $\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+p} \leq \frac{1}{n+1}$. Ainsi,

$$\begin{array}{ccc} \frac{1}{2n} & \leq & \frac{1}{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{2n} & \leq & \frac{1}{n+n}. \end{array}$$

Par conséquent, $S_{2n} - S_n \geq n\left(\frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{2}$ et la suite $\left(S_n\right)_{n\geq 1}$ n'est pas de Cauchy. Donc elle diverge. De plus, $\left(S_n\right)_{n\geq 1}$ est strictement croissante et on déduit que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

Proposition 1.1.12. *Soit $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à termes dans E. La suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si, et seulement si la série $\sum_{n\geq 0}\left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge.*

Preuve. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1} - u_k\right) = \left(u_{n+1} - u_n\right) + \left(u_n - u_{n-1}\right)\left(u_1 - u_0\right) = u_{n+1} - u_0$.

- Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \in E$, on a $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n}\left(u_{k+1} - u_k\right) = \ell - u_0$. Donc la série $\sum_{n\geq 0}\left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge.
- Réciproquement, si $\sum_{n\geq 0}\left(u_{n+1} - u_n\right)$ converge, il existe $S \in E$ tel que $S = \sum_{n\geq 0}\left(u_{n+1} - u_n\right)$ et on a $\lim_{n\to+\infty}\left(u_{n+1} - u_0\right) = S$, $\lim_{n\to+\infty} u_{n+1} = u_0 + S$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = u_0 + S$. Donc la suite $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

□

Définition 1.1.13. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série **convergente**. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, $R_n = \sum_{k\geq n+1} u_k = S - \sum_{k=0}^{n} u_k = S - S_n$ est appelée le **reste d'ordre** n de la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Proposition 1.1.14. *Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, R_n le reste d'ordre n de la série. Alors $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$.*

Preuve. En notant $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$, on a $R_n = S - S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} S - S = 0$. □

1.2 Propriétés algébriques des séries convergentes

Proposition 1.2.1. *Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *convergent, pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*, la série* $\sum_{n\geq 0}\big(u_n+\lambda v_n\big)$ *converge et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\big(u_n+\lambda v_n\big)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n+\lambda\sum_{n=0}^{+\infty}v_n.$$

Preuve. Pour chaque $n\in\mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n}\big(u_k+\lambda v_k\big)=\sum_{k=0}^{n}u_k+\lambda\sum_{k=0}^{n}v_k$. En passant à la limite, on a le résultat. □

Corollaire 1.2.2. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries à termes dans* E.

(1). Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}\setminus\{0\}$*, les séries* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0}\lambda u_n$ *sont de même nature.*

(2). Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *sont de natures différentes, la série* $\sum_{n\geq 0}\big(u_n+v_n\big)$ *est divergente.*

Remarque 1.2.3. Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} v_n$ sont divergentes, on ne peut pas déduire la nature de $\sum_{n\geq 0}\big(u_n+v_n\big)$.

Proposition 1.2.4. *Soient* E *un* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel normé de dimension finie,* $\mathscr{B}=\{e_1,\ e_2,\cdots,e_m\}$ *une base de* E *et* $\big(u_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* E*. Notons, pour chaque* $n\in\mathbb{N}$*,* $\big(u_{n,i}\big)_{1\leq i\leq m}$ *les composantes de* u_n *dans la base* $\mathscr{B}$ *c'est-à-dire* $u_n=u_{n,1}e_1+u_{n,2}e_2+\cdots u_{n,m}e_m$ *pour chaque* $n\in\mathbb{N}$*. Alors la série* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *converge dans* E *si, et seulement si pour chaque* $i\in[\![1\,,\,m]\!]$*, la série* $\sum_{n\geq 0}u_{n,i}$ *converge dans* $\mathbb{K}$ *et dans ce cas, on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}u_n=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_{n,i}\right)e_i.$$

Corollaire 1.2.5. *Soit* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *une série à termes dans* $\mathbb{C}$*. Alors les assertions suivantes sont équivalentes*

(1). La série $\sum_{n\geq 0}u_n$ *converge,*

(2). Les séries $\sum_{n\geq 0}\mathfrak{Re}(u_n)$ *et* $\sum_{n\geq 0}\mathfrak{Im}(u_n)$ *convergent,*

(3). La série $\sum_{n\geq 0}\overline{u_n}$ *converge.*

On a plus généralement le résultat suivant

Proposition 1.2.6. *Soient* E*,* F *deux* $\mathbb{K}-$*espace vectoriel normé ,* $f:\,E\longrightarrow F$ *une application linéaire* ***continue*** *et* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *une série à terme dans* E*. Si* $\sum_{n\geq 0}u_n$ *converge dans* E*, la série* $\sum_{n\geq 0}f\big(u_n\big)$ *converge dans* F *et on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}f\big(u_n\big)=f\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)$$

Preuve. Puisque f est linéaire, on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $f\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)=\sum_{k=0}^{n}f\big(u_k\big)$.

Comme $\sum_{k=0}^{n}u_k\xrightarrow[n\to+\infty]{}\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ et f est continue, $f\left(\sum_{k=0}^{n}u_k\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f\left(\sum_{k=0}^{+\infty}u_k\right)$. Ainsi, $\sum_{n=0}^{+\infty}f\big(u_n\big)\xrightarrow[n\to+\infty]{}f\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)$ □

Proposition 1.2.7. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries* ***convergentes****, à termes dans* $\mathbb{R}$ *et telles que* $u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$. *Alors* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Preuve. Puisque $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{n} v_k$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a le résultat en passant à la limite quand n tend vers $+\infty$. □

1.3 Séries à termes positifs

Les critères donnés dans cette section pour les séries à termes réels positifs ou nuls donnent évidemment des critères de convergence pour les séries à termes réels négatifs ou nuls (en effet, il suffit de changer u_n en $-u_n$). Notons aussi qu'on ne change pas la nature d'une série en modifiant un nombre fini de termes. On peut donc appliquer ces critères dans le cas des séries réels à termes positifs ou nuls à partir d'un certain rang.

Lemme 1.3.1. *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes positifs. Alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente si, et seulement s'il existe* $M > 0$ *tel que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq M$.

Preuve. Puisque $u_n \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est croissante. Donc, la suite $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si, et seulement si elle est bornée. □

D'après ce lemme, il n' y a que deux possibilités pour les séries à termes positifs :

- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$,
- Si $\sum_{n\geq 0} u_n$ diverge, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} u_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

Théorème 1.3.2 (Test de comparaison)**.** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes réels positifs ou nuls. S'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que pour* $n \geq n_0$, *on a* $u_n \leq v_n$, *alors :*

(1). la convergence de $\sum v_n$ *entraîne celle de* $\sum u_n$,

(2). la divergence de $\sum u_n$ *entraîne celle de* $\sum v_n$.

Preuve. En posant pour tout $n \geq n_0$: $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_n$ et $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_n$, on a $S_n \leq T_n$.
Donc si la suite $\left(T_n\right)_n$ est majorée, il en de même de $\left(S_n\right)_n$ et si $\left(S_n\right)_n$ n'est pas majorée, $\left(T_n\right)_n$ non plus n'est pas majorée. □

Corollaire 1.3.3 (Théorème d'équivalence)**.** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes positifs. On suppose qu'il existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tel que si* $n \geq n_0$, $v_n \neq 0$.

(1). Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$, *la convergence de la série* $\sum v_n$ *entraîne celle de la série* $\sum u_n$.

(2). Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$, *la convergence de* $\sum u_n$ *entraîne celle de* $\sum v_n$.

(3). Si $\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, *les série* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Preuve. Rappelons que :

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = x \text{ si } \forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \text{ entraîne } |x_n - x| \leq \varepsilon. \tag{1.3.1}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = +\infty \text{ si } \forall A \in \mathbb{R},\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que } n \geq N \text{ entraîne } x_n > A. \tag{1.3.2}$$

(1). En prenant $\varepsilon = 1$ dans (1.3.1), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq N$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \leq 1$ c'est-à-dire $u_n \leq v_n$. On utilise alors le Théorème 1.3.2.

(2). En prenant $A = 1$ dans (1.3.2), il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N$ entraîne $\left|\dfrac{u_n}{v_n}\right| \geq 1$ c'est-à-dire $u_n \geq v_n$ et on utilise le Théorème 1.3.2.

(3). On a $\ell > 0$. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\ell - \varepsilon > 0$. Il existe alors $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$, $\left|\dfrac{u_n}{v_n} - \ell\right| \leq \varepsilon$ c'est-à-dire $(\ell - \varepsilon) \leq \dfrac{u_n}{v_n} \leq (\ell + \varepsilon)$ ou encore $u_n \leq (\ell + \varepsilon) v_n$ et $v_n \leq \dfrac{1}{\ell - \varepsilon} u_n$.
Si la série $\sum v_n$ converge, il en est de même pour $\sum (\ell + \varepsilon) u_n$ donc de $\sum u_n$.
Si la série $\sum v_n$ diverge, il en est de même pour $\sum \dfrac{1}{\ell - \varepsilon} u_n$ donc de $\sum u_n$.

□

Corollaire 1.3.4 (Comparaison logarithmique)**.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes* ***strictement positifs*** *telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Alors*

(1). Si $\sum v_n$ est convergente, il en est de même de $\sum u_n$.

(2). Si $\sum u_n$ est divergente, il en est de même de $\sum v_n$

Preuve. Puisque u_n et v_n sont strictement positifs, on a $\dfrac{u_{n+1}}{v_{n+1}} \leq \dfrac{u_n}{v_n}$ et par récurrence $\dfrac{u_n}{v_n} \leq \dfrac{u_0}{v_0}$.
En posant $\lambda = \dfrac{u_0}{v_0}$, on a $u_n \leq \lambda v_n$ et il suffit d'appliquer le Théorème 1.3.2. □

Théorème 1.3.5 (Comparaison avec une intégrale)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. On suppose que pour $n \geq n_0$, on a $u_n = f(n)$ où f est une fonction définie, continue, positive et décroissante sur $[\, n_0\,, +\infty[$ et $\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$. Alors $\sum u_n$ est convergente si, et seulement si la suite $\left(T_n\right)_n$ définie par*

$$T_n = \int_{n_0}^{n} f(t)dt$$

est majorée.

Preuve. Remarquons que la suite $\left(T_n\right)_n$ est bien définie car f est continue. Les hypothèses sur f nous permettent d'avoir pour tout $k \geq n_0$ et tout $k \leq t \leq k+1$:

$$f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \quad \text{c'est-à-dire} \quad u_{k+1} \leq f(t) \leq u_k.$$

En intégrant cette dernière inégalité entre k et $k+1$, on a :

$$u_{k+1} \leq \int_k^{k+1} f(t)dt \leq u_k.$$

En faisant la somme pour k allant de n_0 à n, on obtient

$$\sum_{k=n_0}^{n} u_{k+1} \leq \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leq \sum_{n_0}^{n} u_k$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=n_0}^{n+1} u_k \leq \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leq \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

c'est-à-dire encore

$$S_n - a_{n_0} \leq \int_{n_0}^{n} f(t)dt \leq S_n.$$

D'après cette dernière inégalité,

- Si $\sum u_n$ converge, la suite $\left(S_n\right)_n$ est majorée et d'après l'inégalité à droite, la suite $\left(T_n\right)_n$ est majorée.
- Si la suite $\left(T_n\right)_n$ est majorée, l'inégalité à gauche implique que $\left(S_n\right)_n$ est aussi majorée et donc la série $\sum u_n$ est convergente.

□

Corollaire 1.3.6 (La série de Riemann)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$, pour $n \geq 1$, est appelée* ***série de Riemann****. Elle est convergente si, et seulement si $\alpha > 1$ et divergente si, et seulement si $\alpha \leq 1$.*

Preuve. Nous allons étudier la série suivant les valeurs de α.

(1). Pour $\alpha < 0$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

(2). Pour $\alpha = 0$, on a $u_n = 1$.

Donc dans ces deux cas, la série est divergente car $u_n \not\longrightarrow 0$ quand $n \to +\infty$.

(3). Si $\alpha > 0$, posons $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ pour $x \geq 1$.

La fonction f est dérivable et $f'(x) = -\frac{\alpha}{x^{\alpha+1}} < 0$, donc f est décroissante sur $[\,1\,,+\infty[$ et on a $u_n = f(n)$ pour $n \geq n_0 = 1$. Considérons la suite $\left(T_n\right)_n$ définie par $T_n = \int_1^n f(t)dt = \int_1^n \frac{1}{t^\alpha}dt = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{n^{\alpha-1}} - 1\right)$.

- Si $0 \leq \alpha < 1$, $\alpha - 1 < 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$. Donc la suite $\left(T_n\right)_n$ n'est pas majorée et donc la série $\sum u_n$ est divergente.
- Si $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = \frac{1}{1-\alpha}$. Donc la suite $\left(T_n\right)_n$ est majorée (car convergente) et la série $\sum u_n$ converge.

□

Théorème 1.3.7 (Critère de Riemann)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs ou nuls.*

(1). S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que la suite $\left(n^\alpha u_n\right)_n$ soit majorée, la série $\sum u_n$ est convergente.

(2). S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que la suite $\left(n^\alpha u_n\right)_n$ soit minorée, la série $\sum u_n$ est divergente.

(3). En particulier, s'il existe un réel α tel que $\lim\limits_{n \to +\infty} n^\alpha u_n = \ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a :

- *si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge*
- *si $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Preuve. La démonstration utilise le théorème de comparaison avec la série de Riemann.

(1). Soit M tel que $u_n \leq \frac{M}{n^\alpha}$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\alpha > 1$, la série $\sum \frac{M}{n^\alpha}$ converge et il en est de même pour la série $\sum u_n$.

(2). Soit m tel que $0 < \frac{m}{n^\alpha} \leq u_n$ pour tout $n \geq 1$. Comme $\alpha \leq 1$, la série $\sum \frac{m}{n^\alpha}$ diverge et il en est de même pour la série $\sum u_n$.

(3). Si la suite $\left(n^{\alpha}u_n\right)_n$ admet une limite finie ℓ alors elle est bornée c'est-à-dire il existe deux nombres réels m et M tels que $m \leq n^{\alpha}u_n \leq M$.

□

Dans la pratique, on utilise le corollaire suivant

Corollaire 1.3.8. *Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.*

(1). S'il existe un réel $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = 0$ alors la série converge.

(2). S'il existe un réel $\alpha \leq 1$ tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = +\infty$ alors la série diverge.

(3). En particulier, s'il existe un réel α tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\alpha}u_n = \ell \in \mathbb{R}\setminus\left\{0\right\}$, on a :

- *si $\alpha > 1$ alors la série $\sum u_n$ converge*
- *si $\alpha \leq 1$ alors la série $\sum u_n$ diverge.*

Corollaire 1.3.9 (La série de Bertrand)**.** *Soient α, $\beta \in \mathbb{R}$. La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha}\left(\ln n\right)^{\beta}}$ est appelée **la série de Bertrand**. La série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ est*

- *convergente si : $\boldsymbol{\alpha > 1}$ ou ($\boldsymbol{\alpha = 1}$ **et** $\boldsymbol{\beta > 1}$),*
- *divergente si : $\boldsymbol{\alpha \leq 1}$ ou ($\boldsymbol{\alpha = 1}$ **et** $\boldsymbol{\beta \leq 1}$).*

Preuve. On va étudier la série suivant les valeurs de α.

(1). Pour $\alpha = 1$, la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{1}{t\left(\ln t\right)^{\beta}}$ est définie, continue, positive et décroissante sur $[\,n_0\,,+\infty[$ pour un certain n_0 assez grand dans $\mathbb{N}$ et $u_n = f(n)$. On peut donc étudier la série $\sum u_n$ par une comparaison avec la suite $\left(T_n\right)_n$ définie par $T_n = \displaystyle\int_{n_0}^{n} f(t)dt = \int_{n_0}^{n} \frac{1}{\left(t\ln t\right)^{\beta}}dt$ (pour n_0 assez grand fixé).

(a). Si $\beta \neq 1$, on a $T_n = \dfrac{1}{1-\beta}\left[\dfrac{1}{\left(\ln n\right)^{1-\beta}} - \dfrac{1}{\left(\ln n_0\right)^{1-\beta}}\right]$.

- Si $\beta > 1$, la suite $\left(T_n\right)_n$ est convergente donc la série $\sum u_n$ est aussi convergente.
- Si $\beta < 1$, la suite $\left(T_n\right)_n$ est divergente donc la série $\sum u_n$ est aussi divergente.

(b). Si $\beta = 1$, on a $T_n = \ln(\ln n) - \ln(\ln n_0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$ donc la série $\sum u_n$ est divergente.

(2). Pour $\alpha < 1$, on choisit $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha < \gamma < 1$. On a $n^{\gamma}u_n = \dfrac{n^{\gamma-\alpha}}{\left(\ln n\right)^{\beta}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\gamma}u_n = +\infty$.

Donc la série est divergente.

(3). Pour $\alpha > 1$, soit $\gamma = \dfrac{1+\alpha}{2}$. On a $n^{\gamma}u_n = \dfrac{n^{\frac{1-\alpha}{2}}}{\left(\ln n\right)^{\beta}}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\gamma}u_n = 0$.

Donc la série est convergente.

□

Théorème 1.3.10 (Règle de d'Alembert)**.** *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.*

(1). S'il existe un nombre réel $q < 1$ tel que pour tout $n \geq 1$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$, la série $\sum u_n$ est convergente.

(2). S'il existe un nombre réel $q \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$: $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq q$, la série $\sum u_n$ est divergente.

(3). En particulier, si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$ alors

- *si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente,*
- *si $\ell > 1$ la série est divergente,*
- *si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Preuve. Nous allons utiliser la comparaison logarithmique (Corollaire 1.3.4).

(1). Si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ avec $q < 1$, posons $v_n = q^n$. On a $\dfrac{v_{n+1}}{v_n} = q$ c'est-à-dire $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$. Puisque la série $\sum q^n$ est convergente, il en est de même pour la série $\sum u_n$ (d'après le Corollaire 1.3.4).

(2). En faisant le même raisonnement mais cette fois-ci avec $q \geq 1$, on obtient la conclusion du théorème.

(3).
- Si $\ell < 1$, choisissons q tel que $\ell < q < 1$. Pour $n \geq n_0$, on a $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq q$ d'où le résultat d'après (1).
- Si $\ell > 1$, choisissons un réel q tel que $1 < q < \ell$. On est sur la situation de (2). D'où le résultat.

□

Théorème 1.3.11 (Règle de Cauchy). *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.*

(1). S'il existe un nombre réel $q < 1$ tel que pour tout $n \geq 1$: $\sqrt[n]{u_n} \leq q$, la série $\sum u_n$ est convergente.

(2). S'il existe un nombre réel $q \geq 1$ tel que pour tout $n \geq 1$: $\sqrt[n]{u_n} \geq q$, la série $\sum u_n$ est divergente.

(3). En particulier, si $\sqrt[n]{u_n}$ admet une limite finie ℓ en $+\infty$ alors

- *si $\ell < 1$, la série $\sum u_n$ est convergente,*
- *si $\ell > 1$ la série est divergente,*
- *si $\ell = 1$, on ne peut rien conclure.*

Preuve. Reproduire la preuve du Théorème 1.3.10 en remarquant que $\sqrt[n]{u_n} \leq q$ équivaut à $u_n \leq q^n$. □

Dans le cas où on a trouvé $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1$ dans la règle de Cauchy ou la règle de d'Alembert ci-dessus, on peut utiliser la règle de Raabe Duhamel suivante :

Théorème 1.3.12 (Règle de Raabe Duhamel). *Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. S'il existe un couple $(\alpha, \beta) \in]0, +\infty[\times]1, +\infty[$ tel que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \dfrac{\alpha}{n} + o\left(\dfrac{1}{n^\beta}\right)$,*

- *Si $\alpha \leq 1$, la série $\sum u_n$ est divergente,*
- *Si $\alpha > 1$, la série $\sum u_n$ est convergente.*

1.4 Séries à termes dans un espace vectoriel normé

Les résultats énoncés dans cette section concernent les séries à termes dans un espace vectoriel normé quelconque. Puisque, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont des e.v.n , les théorèmes sont vrais pour les séries à termes dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Théorème 1.4.1. *Si E est **complet** alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ est convergente si, et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.*

Preuve. Dans un espace complet, toute suite de Cauchy est convergente. □

Définition 1.4.2. La série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes dans E est dite **absolument convergente** si la série à termes positifs $\sum \|u_n\|$ est convergente.

Théorème 1.4.3. *Soit E un e.v.n* ***complet*** *et* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes dans E. Si* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est absolument convergente alors* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente et on a*

$$\left\|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right\| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \|u_n\|.$$

Preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum \|a_n\|$ est convergente et $\mathbb{R}$ est complet, $\sum \|a_n\|$ vérifie le critère de Cauchy. Donc, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$ et $\forall p \geq N$, on ait $\sum_{k=1}^{p} \|u_{n+k}\| \leq \varepsilon$.
Comme $\left\|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right\| \leq \sum_{k=1}^{p} \|u_{n+k}\|$, on a $\forall n \geq N$ et $\forall p \geq N$ on a $\left\|\sum_{k=1}^{p} u_{n+k}\right\| \leq \varepsilon$ c'est-à-dire la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ vérifie le critère de Cauchy. Puisque E est complet, $\sum_{n\geq 0} u_n$ est convergente.

L'inégalité de la somme s'obtient par passage à la limite à partir de $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left\|\sum_{k=0}^{n} u_{n+k}\right\| \leq \sum_{k=0}^{n} \|u_{n+k}\|$. □

D'après le Théorème 1.4.3, la première chose à faire quand on étudie une série à terme dans un e.v.n est d'essayer d'appliquer les critères de convergence des séries à termes positifs à la série $\sum \|u_n\|$.
Attention, le théorème dit que si $\sum \|u_n\|$ est convergente alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ est aussi convergente **MAIS** si $\sum \|u_n\|$ est divergente, on ne peut rien conclure pour la série $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Proposition 1.4.4. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *deux séries absolument convergentes de sommes respectives* α *et* β. *Alors*

(1). la série somme $\sum \big(u_n + v_n\big)$ *est absolument convergente de somme* $\alpha + \beta$ *et*

(2). la série $\sum \lambda a_n$ *est absolument convergente pour tout scalaire* $\lambda \in \mathbb{K}$, *de somme* $\lambda\alpha$.

Proposition 1.4.5. *Soient* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série absolument convergente de somme* α *et* $\sum_{n\geq 0} v_n$ *une série convergente de somme* β. *Alors la série produit est* ***convergente*** *de somme* $\gamma = \alpha\beta$.

Si de plus la série $\sum_{n\geq 0} v_n$ *absolument convergente, la série produit* $\sum c_n$ *est aussi absolument convergente.*

Définition 1.4.6. On dit qu'une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ à termes dans un e.v.n E est **semi-convergente** si elle converge mais $\sum \|a_n\|$ est divergente.

Exemple 1.4.7. On verra plus loin que $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente tandis que la série $\sum_{n\geq 0} \|u_n\| = \sum_{n\geq 0} |u_n| = \sum \frac{1}{n}$ est divergente.

Voici quelques théorèmes permettant d'étudier des séries non absolument convergentes.

Théorème 1.4.8 (Règle d'Abel)**.** *Soit* $\sum_{n\geq 0} u_n$ *une série à termes dans un e.v.n complet* E *telle que pour tout* $n \in \mathbb{N}$, u_n *est de la forme* $u_n = \lambda_n v_n$ *où* $\left(\lambda_n\right)_n \subset \mathbb{K}$ *et* $\left(v_n\right)_n \subset E$. *On suppose que :*

(1). Il existe $M > 0$ *tel que pour tout* $p,\ q \in \mathbb{N}$ *tel que* $p \geq q$, *on a* $\left|\sum_{k=q}^{p} v_k\right| = |v_q + v_{q+1} + \cdots + v_p| \leq M$

(2). la série $\sum_{n\geq 1} |\lambda_{n+1} - \lambda_n|$ *converge et*

(3). $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$.

Alors la série $\sum_{n\geq 0} u_n$ *est convergente.*

Définition 1.4.9. Une série $\sum_{n\geq 0} u_n$ est dite **alternée** si son terme général u_n s'écrit $u_n = (-1)^n \beta_n$ avec $\beta_n > 0$ pour tout n.

Théorème 1.4.10 (Critère des séries alternées)**.** *Si* $\left(\beta_n\right)_n$ *est une suite réelle positive, décroissante et tendant vers* 0, *la série série altérnée* $\sum \left(-1\right)^n \beta_n$ *est convergente.*

Exemple 1.4.11. Considérons la série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$. En posant $\beta_n = \frac{1}{n}$, on voit que la suite $\left(\beta_n\right)_n$ est décroissante et $\lim_{n\to+\infty} \beta_n = 0$. Donc la série $\sum (-1)^n \beta_n = \sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente d'après le critère des séries alternées.

1.5 Séries doubles

Dans cette section, nous allons étudier les séries associées à une suite double $\left(u_{p,q}\right)_{\left(p,q\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ c'est-à-dire les séries associées à une suite indexée par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$.

Cas des séries doubles à termes positifs

Théorème 1.5.1 (Interversion des sommations)**.** *Soit* $\left(u_{p,q}\right)_{\left(p,q\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une suite double à termes positifs. On suppose que :*

(1). Pour tout $p \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum_{q\geq 0} u_{p,q}$ *converge et*

(2). La série $\sum_{p\geq 0} \left[\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right]$ *converge.*

Alors

(1). Pour tout $q \in \mathbb{N}$, *la série* $\sum_{p\geq 0} u_{p,q}$ *converge,*

(2). La série $\sum_{q\geq 0} \left[\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right]$ *converge et*

(3). $\sum_{p=0}^{+\infty} \left[\sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}\right] = \sum_{q=0}^{+\infty} \left[\sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q}\right]$.

Cas des séries doubles à termes dans $\mathbb{K}$

Théorème 1.5.2 (Théorème de Fubini)**.** *Soit $\left(u_{p,q}\right)_{\left(p,q\right)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double à termes dans $\mathbb{K}$. On suppose que :*

(1). Pour tout $p\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{q\geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente

(2). La série $\sum\limits_{p\geq 0}\left[\sum\limits_{q=0}^{+\infty}\left|u_{p,q}\right|\right]$ converge.

Alors

(1). Pour tout $q\in\mathbb{N}$, la série $\sum\limits_{p\geq 0} u_{p,q}$ est absolument convergente,

(2). La série $\sum\limits_{q\geq 0}\left[\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\left|u_{p,q}\right|\right]$ converge.

(3). Les séries $\sum\limits_{p\geq 0}\left[\sum\limits_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right]$ et $\sum\limits_{q\geq 0}\left[\sum\limits_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right]$ sont absoluments convergentes et

(4). $\sum\limits_{p=0}^{+\infty}\left[\sum\limits_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}\right]=\sum\limits_{q=0}^{+\infty}\left[\sum\limits_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}\right]$.

1.6 Exercices

Exercice 1.6.1. Etudier la nature de la série de terme général u_n dans chacune des cas suivants et calcuer sa somme éventuelle :

$$u_n=\frac{1}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)},\quad u_n=\frac{\sin\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}},\quad u_n=\frac{1}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)\cdots\left(n+p\right)}\quad \text{où}\quad p\in\mathbb{N}\setminus\left\{0\right\}$$

Exercice 1.6.2. On considère la série de terme général $u_n=\left(-1\right)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

(1). Montrer que la série $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ est convergente. On note $S=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$.

(2). Montrer que pour tout $n\geq 1$, la somme partielle S_{2n} de la série peut s'écrire $S_{2n}=\dfrac{\ln(2n+1)\left[(2n)!\right]^2}{2^{4n}\left[n!\right]^4}$.

(3). En utilisant la formule de Stirling : $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n\sqrt{2n\pi}$, trouver $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}$. En déduire S.

Exercice 1.6.3. Soit $\sum\limits_{n\geq 0}a_n$ une série numérique à termes strictement positifs convergente. Déterminer la nature de chacune des séries : $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{a_n}{1+a_n}$, $\quad\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\cosh a_n-1}{a_n}$, $\quad$ et $\quad\sum\limits_{n\geq 0}a_n^2$.

Exercice 1.6.4. Etudier la nature des séries : $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\left(-1\right)^n n}{n^3+n+1}$ et $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\left(-1\right)^n}{n+\left(-1\right)^n}$.

Exercice 1.6.5. Soit $\left(u_n\right)_{n\geq 1}$ une suite à termes positifs. Pour $n\geq 1$, on pose $v_n=\dfrac{u_n}{\left(1+u_1\right)\left(1+u_2\right)\cdots\left(1+u_n\right)}$.

(1). Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} v_k = 1 - \frac{1}{\left(1+u_1\right)\left(1+u_2\right)\cdots\left(1+u_n\right)}$.

(2). En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} v_n$.

Exercice 1.6.6. On considère la suite réelle $\left(u_n\right)_n$ définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$ pour $n \geq 1$.

(1). Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(2). Montrer que $\left(u_n\right)_n$ est croissante à partir d'un certain rang.

(3). Trouver un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.

(4). Pour $\alpha \in \left]0\,,\,+\infty\right[$, quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{u_n^{\alpha}}$?

(5). Pour $\beta \in \left]0\,,\,+\infty\right[$, quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{\left(-1\right)^n}{u_n^{\beta}}$?

1.7 Corrigés des exercices

Exercice 1.6.1. Nature et somme éventuelle des séries :

(1). $u_n = \dfrac{1}{n\left(n+1\right)\left(n+2\right)}$. Après décomposition en éléments simples de u_n, on a $u_n = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2\left(n+2\right)}$.

Pour $n \geq 1$, soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$ la $n-$ième somme partielle de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$. On a alors

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2}.$$

En effectuant le changement d'indice : $k \mapsto k+1$ dans la première somme et $k \mapsto k-1$ dans la troisième, on obtient :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\left[1 + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right] - \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{n+1} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \sum_{k=2}^{n-1}\frac{1}{k+1}\right] \end{aligned}$$

Après simplification, on a $S_n = \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+1}\right]$. Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} S_n = \frac{1}{4}$.

Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

(2). $u_n = \dfrac{\sin\dfrac{1}{n\left(n+1\right)}}{\cos\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1}}$. Puisque $\dfrac{1}{n\left(n+1\right)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$ et $\sin\left(\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}\right) = \sin\dfrac{1}{n}\cos\dfrac{1}{n+1} - \cos\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n+1}$,

on a $u_n = \tan\dfrac{1}{n} - \tan\dfrac{1}{n+1}$. Donc, pour $n \geq 1$, la $n-$ième somme partielle de la série est donnée par $S_n = \tan 1 - \tan\dfrac{1}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \tan 1$. Donc, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente et $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \tan 1$.

(3). $\dfrac{1}{n\big(n+1\big)\big(n+2\big)\cdots\big(n+p\big)}$ où $p\in\mathbb{N}\setminus\big\{0\big\}$. On a

$$pu_n=\frac{\big(n+p\big)-n}{n\big(n+1\big)\big(n+2\big)\cdots\big(n+p\big)}=\frac{1}{n\big(n+1\big)\big(n+2\big)\cdots\big(n+p-1\big)}-\frac{1}{\big(n+1\big)\big(n+2\big)\cdots\big(n+p\big)}.$$

Posons $v_n=\dfrac{1}{n\big(n+1\big)\big(n+2\big)\cdots\big(n+p-1\big)}$. On a $pu_n=v_n-v_{n+1}$ et pour $n\geq 1$, on a

$$pS_n=\sum_{k=1}^{n}\big(v_k-v_{k+1}\big)=v_1-v_{n+1}\quad\text{c'est-à-dire}\quad S_n=\frac{1}{p}\big(v_1-v_{n+1}\big).$$

D'autre part, $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$; ce qui entraîne $S_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{1}{p}v_1$.

Donc, la série $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n=\dfrac{1}{p}v_1=\dfrac{1}{p\cdot p!}$.

Exercice 1.6.2 On considère la série de terme général $u_n=\big(-1\big)^n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$.

(1). Pour $n\geq 1$, posons $a_n=\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$. Il est facile de vérifier que $\big(a_n\big)_n$ est une suite décroissante tendant vers 0. Alors $\sum\limits_{n\geq 1}u_n$ est une série alternée qui converge.

(2). Soit $n\geq 1$. En regroupant deux par deux les termes dans S_{2n}, on a

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\big(u_{2k}-u_{2k-1}\big)=\sum_{k=1}^{n}\left[\ln\frac{2k+1}{2k}-\ln\frac{2k}{2k-1}\right]=\ln\left[\prod_{k=1}^{n}\frac{\big(2k-1\big)\big(2k+1\big)}{2k}\right]$$

D'autre part, par un simple calcul, on a

$$\prod_{k=1}^{n}\big(2k-1\big)=\frac{\big(2n\big)!}{2^n n!}\quad\text{et}\quad\prod_{k=1}^{n}\big(2k+1\big)=\frac{\big(2n+1\big)\big(2n\big)!}{2^n n!}$$

Il s'ensuit que

$$S_{2n}=\ln\frac{(2n+1)\big[(2n)!\big]^2}{2^{4n}\big[n!\big]^4}.$$

(3). En utilisant la formule de Stirling : $n!\underset{n\to+\infty}{\sim}\left(\dfrac{e}{n}\right)^n\sqrt{2n\pi}$, on a

$$\frac{(2n+1)\big[(2n)!\big]^2}{2^{4n}\big[n!\big]^4}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2n\times\left(\dfrac{2n}{e}\right)^{4n}\times 4n\pi}{2^{4n}\times\left(\dfrac{n}{e}\right)^{4n}\times\big(2n\pi\big)^2}=\frac{2}{\pi}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}=\ln\dfrac{2}{\pi}$.

Exercice 1.6.3. Soit $\sum\limits_{n\geq 0}a_n$ une série numérique à termes strictement positifs convergente. Nature de chacune des séries : $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{a_n}{1+a_n}$, $\quad\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{\cosh a_n-1}{a_n}$, $\quad$ et $\quad\sum\limits_{n\geq 0}a_n^2$.

(1). $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{a_n}{1+a_n}$. On a, pour tout $n\geq 0$, $0\leq\dfrac{a_n}{1+a_n}\leq a_n$. Comme $\sum\limits_{n\geq 0}a_n$ converge, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs (Théorème 1.3.2), on conclut que $\sum\limits_{n\geq 0}\dfrac{a_n}{1+a_n}$ est convergente.

(2) . $\sum_{n\geq 0}\frac{\cosh a_n - 1}{a_n}$. Comme $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, $a_n \xrightarrow[n\to+infty]{} 0$. Ainsi, $\frac{\cosh a_n - 1}{a_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\frac{1}{2}a_n^2}{a_n} = \frac{1}{2}a_n \geq 0$. Comme $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, par le théorème d'équivalence des série à terme positifs (Corollaire 1.3.3), on conclut que la série $\sum_{n\geq 0}\frac{\cosh a_n - 1}{a_n}$ converge.

(3) . $\sum_{n\geq 0} a_n^2$. Puisque $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ c'est-à-dire pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que si $n \geq n_0$, on ait $0 \leq a_n \leq \varepsilon$. En particulier, pour $\varepsilon = 1$, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que à partir du rang n_0, on ait $0 \leq a_n \leq 1$; d'où $0 \leq a_n^2 \leq a_n$. Comme $\sum_{n\geq 0} a_n$ converge, par le théorème de comparaison des séries à termes positifs (Théorème 1.3.2), on conclut que $\sum_{n\geq 0} a_n^2$ est convergente.

Exercice 1.6.4. Nature des séries : $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n n}{n^3+n+1}$ et $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$.

(1) . $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n n}{n^3+n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|u_n| = \frac{n}{n^3+n+1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. D'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge et d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs (Théorème 1.3.2), la série $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n n}{n^3+n+1}$ converge absolument donc converge.

(2) . $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$. En effectuant le développement asymptotique de u_n, on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n}\left(1+o\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

- Par le critère des séries alternées, $\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge,
- Puisque $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge, par le théorème de comparaison, la série $\sum_{n\geq 1} o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ converge absolument donc converge.

Par addition de deux séries convergentes, on conclut que $\sum_{n\geq 1} u_n$ est onvergente.

Exercice 1.6.5. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite à termes positifs. Pour $n \geq 1$, on pose $v_n = \frac{u_n}{(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)}$.

(1) . Il suffit de raisonner par récurrence sur n.

- Pour $n = 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} v_k = \frac{u_1}{1+u_1} = 1 - \frac{1}{1+u_1}$. Donc, la propriété est vraie pour $n = 1$.
- Supposons que la propriété soit vraie pour un $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} v_k &= \sum_{k=1}^{n} v_k + v_{n+1}\\ &= \left(1 - \frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_n)}\right) + \frac{u_{n+1}}{(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_{n+1})}\\ &= 1 + \frac{-(1+u_{n+1})+u_{n+1}}{(1+u_1)(1+u_2)\cdot(1+u_{n+1})} = 1 - \frac{1}{(1+u_1)(1+u_2)\cdots(1+u_{n+1})}.\end{aligned}$$

Ce qui établit fa formule pour $n+1$. Donc, pour tout $n \geq 1$, on a $\sum_{k=1}^{n} v_k = 1 - \dfrac{1}{\left(1+u_1\right)\left(1+u_2\right)\cdots\left(1+u_n\right)}$.

(2). D'après (1)., on a, pour tout $n \geq 1$: $0 \leq \sum_{k=1}^{n} v_k \leq 1$. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ est à termes positifs et la suite de ses sommes partielles est majorée ; donc elle converge.

Exercice 1.6.6. On considère la suite réelle $\left(u_n\right)_n$ définie par $u_0 \geq 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n}$ pour $n \geq 1$.

(1). Il est facile de voir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et $u_n \geq 0$.
On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} \geq \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. D'où $u_{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, puis par décalage d'indice, $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

(2). Montrer que $\left(u_n\right)_n$ est croissante à partir d'un certain rang.
Puisque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ n'est pas décroissante. Il existe donc $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0+1} \geq u_{n_0}$. Nous allons maintenant montrer par récurrence que pour tout $n \geq n_0$, on a $u_{n+1} \geq u_n$.

- La propriété est vraie pour $n = n_0$.
- Si la propriété est vraie pour un $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_0$, on a

$$u_{n+2} = \sqrt{\left(n+1\right)+u_{n+1}} \geq \sqrt{n+u_n} = u_{n+1}.$$

Ce qui montre que la propriété est vraie pour le rang $n+1$. Nous avons donc montré que la suite $\left(u_n\right)_{n\geq 0}$ est croissante à partir du rang n_0.

(3). Trouver un équivalent simple de u_n quand n tend vers $+\infty$.
Considérons le polynôme $P_n(X) = X^2 - X - n$.
Les racines de P_n sont $X_1 = \dfrac{1-\sqrt{1+4n}}{2} \geq 0$ et $X_1 = \dfrac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$. D'autre part, pour $n \geq n_0$, on a $P_n(u_{n+1}) = u_{n+1}^2 - u_{n+1} - n = (n+u_n) - u_{n+1} - n = -(u_{n+1}-u_n) \leq 0$. Il en résulte que

$$\frac{1-\sqrt{1+4n}}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{1+\sqrt{1+4n}}{2}.$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$, on a $0 \leq u_{n+1} \leq \dfrac{1+\sqrt{1+4n}}{2}$. Donc, $u_{n+1} \underset{+\infty}{=} \square\left(\sqrt{n}\right) = o\left(n\right)$ et par décalage d'indice, $u_n \underset{+\infty}{=} o\left(n-1\right) = o\left(n\right)$. On conclut que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.

(4). Soit $\alpha \in \left]0, +\infty\right[$ fixé. On a $a_n = \dfrac{1}{u_n^\alpha} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n^{\frac{\alpha}{2}}}$. D'après le critère de Riemann et le théorème d'équivalence pour les séries à termes positifs, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{1}{u_n^\alpha}$ converge si, et seulement si $\dfrac{\alpha}{2} > 1$ c'est-à-dire $\alpha > 2$.

(5). Soit $\beta \in \left]0, +\infty\right[$ fixé. On a $u_n^\beta > 0$, $u_n^\beta \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ (car $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\beta > 0$) et la suite $\left(u_n^\beta\right)_{n\geq n_0}$ est décroissante(car $\left(u_n\right)_{n\geq n_0}$ est croissante).

Donc, d'après le critère des séries altnernées, la série $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\left(-1\right)^n}{u_n^\alpha}$ est convergente.

Chapitre 2

SUITES ET SÉRIES DE FONCTIONS

En passant des suites et séries numériques aux suites et séries de fonctions, on ne manipule plus des nombres mais des fonctions. L'étude des suites et séries numériques faites dans le chapitre précédent sert de façon permanente.
Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Suites de fonctions

2.1.1 Convergence simple et convergence uniforme

Soient X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{K}$. Une suite de fonctions de X dans $\mathbb{K}$ est la donnée, pour tout n d'une application $f_n : X \longrightarrow \mathbb{K}$. On notera $\left(f_n\right)_n$ ou $\left(f_n\right)$ la suite de fonctions.

La question qui se pose maintenant est la suivante :

Question. *Peut-on parler de la convergence de la suite $\left(f_n\right)_n$ de la même façon qu'on parle de convergence d'une suite numérique ?*

Nous allons voir que l'on peut donner au terme "convergence" plusieurs sens ; on dit qu'il y a plusieurs "mode de convergence" de la suite $\left(f_n\right)_n$.

Définition 2.1.1. On dit que la suite $\left(f_n\right)_n$ converge simplement si, pour tout $x \in X$, la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_n$ est convergente. Dans ce cas, pour tout $x \in X$, on peut poser $f(x) := \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, ce qui définit une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ appelée **limite simple** de la suite $\left(f_n\right)_n$ et on dit que la suite $\left(f_n\right)_n$ **converge simplement** vers f.
Le fait que $\left(f_n\right)_n$ converge simplement vers f se traduit ainsi :

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N(x,\varepsilon),\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{2.1.1}$$

Exemple 2.1.2. Soit $f_n :]-1\,,1\,] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} x^n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$
Donc, la suite $\left(f_n(x)\right)_n$ converge simplement sur $]-1\,,1\,]$ vers la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad |x| < 1 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1. \end{cases}$$

Remarquer que dans l'exemple ci-dessus, chaque f_n est une fonction continue tandis que la fonction f ne l'est pas. Autrement dit, cet exemple nous montre que la limite simple d'une suite de fonctions continues n'est

pas nécessairement continue c'est-à-dire encore que la convergence simple d'une suite de fonctions continues n'entraîne pas naturellement la continuité de la limite.
Ce problème nous conduit à introduire une notion plus forte, c'est la **convergence uniforme**.

Définition 2.1.3. On dit que la suite $\left(f_n\right)_n$ **converge uniformément (c.u.)** vers $f : X \longrightarrow E$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N(\varepsilon),\ \forall x \in X,\ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \tag{2.1.2}$$

ce qui équivaut à

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N(\varepsilon),\ \sup_{x \in X} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon. \tag{2.1.3}$$

Noter bien le changement de place de "$\forall x \in X$" dans les relations (2.1.1) et (2.1.2).

La condition (2.1.3) veut dire aussi la suite $\left(\gamma_n\right)_n$ de nombres réels définie par $\gamma_n = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 2.1.4. Soit $f_n : [-a\,,\,a] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = x^n$ avec $0 < a < 1$. D'après Exemple 2.1.2, la suite $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur $[-a\,,\,a]$ vers la fonction $f(x) = 0$ car $0 < a < 1$.
Etudions maintenant la convergence uniforme. On cherche le maximum de $|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)|$ sur $[-a\,,\,a]$. On a $\sup\limits_{x \in [-a\,,a]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x \in [-a\,,a]} |x^n| = a^n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} a^n = 0$, ce qui montre que la suite $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers 0 sur $[-a\,,\,a]$ avec $0 < a < 1$.

Théorème 2.1.5. *Si la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément sur X vers une fonction f, elle converge simplement sur X vers f.*

Preuve. Soit $\alpha \in X$. Alors, pour tout n, on a $0 \leq |f_n(\alpha) - f(\alpha)| \leq \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$.
Le théorème des gendarmes montre alors que la suite numérique $\left(|f_n(\alpha) - f(\alpha)|\right)_n$ converge vers 0 donc $\left(f_n(\alpha)\right)_n$ converge vers $f(\alpha)$. □

Dans la pratique, l'étude d'une suite de fonction se fait en deux étapes :

(1). On fixe $x \in X$ et étudier la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_n$, ce qui détermine la limite simple f.

(2). On étudie la suite $\left(\alpha_n\right)_n$ définie par $\alpha_n = \sup\limits_{x \in X} |f_n(x) - f(x)|$.

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$, la suite $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément sur X vers f.

Il existe un critère de Cauchy pour la convergence uniforme d'une suite de fonctions. Comme dans le cas d'une suite numérique, l'utilité de ce critère est qu'il permet de montrer la convergence uniforme sans connaître explicitement la limite simple.

Théorème 2.1.6 (Critère de Cauchy uniforme)**.** *La suite $\left(f_n\right)_n$ de fonctions de X dans $\mathbb{K}$ converge uniformément si, et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \textit{ tel que } \ \forall p \geq N(\varepsilon) \ \textit{ et } \ \forall q \geq N(\varepsilon),\ \forall x \in X,\ \textit{ on a } \ \left|f_p(x) - f_q(x)\right| \leq \varepsilon. \tag{2.1.4}$$

Preuve. Supposons que $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers une fonction $f : X \longrightarrow E$. Montrons qu'elle vérifie la condition (2.1.4).
Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ et tout $x \in X$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Soient p et q deux entiers tels que $p \geq N(\varepsilon)$ et $q \geq N(\varepsilon)$. Pour tout $x \in X$, on a

$$\left|f_p(x) - f_q(x)\right| = \left|f_p(x) - f(x) + f(x) - f_q(x)\right| \leq \left|f_p(x) - f(x)\right| + \left|f(x) - f_q(x)\right| \leq 2\varepsilon.$$

Donc $\left(f_n\right)_n$ vérifie la condition (2.1.4).

Réciproquement, supposons que la suite $\left(f_n\right)_n$ vérifie la condition (2.1.4). Soit $x \in X$ fixé. La suite numérique $\left(f_n(x)\right)_n$ est donc une suite de Cauchy et comme $\mathbb{K}$ est complet, elle converge. Notons $f(x)$ sa limite. Nous définissons ainsi une fonction $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$, qui est limite simple de la suite $\left(f_n\right)_n$. Il nous reste à montrer que la suite $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers f. Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse, il existe $N(\varepsilon)$ tel que si $p \geq N(\varepsilon)$ et $q \geq N(\varepsilon)$, on a $|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon$. Fixons $p \geq N$ et $x \in X$. Faisons tendre q vers $+\infty$ dans (2.1.4), de sorte que $\lim\limits_{q\to+\infty} f_q(x) = f(x)$. Puisque l'application $t \mapsto |t|$ est continue, il vient : $|f_p(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ et cette inégalité est vraie pour tout $p \geq N$ et tout $x \in X$. Ce qui établit la convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)_n$ vers f. □

Proposition 2.1.7. *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies sur X et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction. La suite $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers f sur X si, et seulement si*

- *il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $f_n - f$ soit bornée sur X et*
- $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Corollaire 2.1.8. *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies sur X. On suppose que*

(1). pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est bornée sur X et

(2). la suite $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers f sur X.

Alors la fonction f est bornée sur X.

Proposition 2.1.9. *Soient $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies et bornées sur X et $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ une fonction bornée. Alors $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers f sur X si, et seulement si $\sup\limits_{x\in X} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$*

2.1.2 Convergence compacte

Une suite $\left(f_n\right)_n$ de fonctions définies sur X, peut converger simplement vers f sur X et uniformément vers f sur une ou toute partie Y strictement contenue dans X.
On peut introduire une notion de convergence uniforme sur les fermés de X, par exemple.

Définition 2.1.10. On dit qu'une suite $\left(f_n\right)_n$ de fonctions définies sur X converge compactement vers f si elle converge uniformément vers f sur toute partie compacte K de X ; cela se traduit par

$$\forall K \text{ (compact)} \subset X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \text{ tel que } \ \forall n \geq N(\varepsilon),\ \text{et } \forall x \in K,\ \text{on ait } |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$$

Le théorème suivant donne la relation entre la convergence simple, la convergence compacte et la convergence uniforme.

Théorème 2.1.11. *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies sur X. Alors*

(1). Si $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément sur X, elle y converge compactement,

(2). Si $\left(f_n\right)_n$ converge compactement sur X, elle y converge simplement.

En résumé, on a : Convergence uniforme $\Longrightarrow$ Convergence compacte $\Longrightarrow$ Convergence simple.

2.1.3 Limite d'une suite de fonctions continues

Le premier intérêt de la convergence compcte et donc la convergence uniforme est qu'elle conserve la continuité.

Théorème 2.1.12. *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies et continues sur une partie X de $\mathbb{K}$. Si la suite $\left(f_n\right)_n$ converge compactement vers f sur X, la limite f est continue.*

Preuve. Soit $\alpha \in X$. Montrons que f est continue en α c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \text{ tel que si } \ |x-\alpha| \leq \eta,\ \text{ on a } \ |f(x)-f(\alpha)| \leq \varepsilon.$$

Soient alors $\varepsilon > 0$ et K un voisinage compact de α.

- Puisque $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément vers f sur K, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ et pour tout $x \in K$, on ait $|f_n(x)-f(x)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.
- Pour $n \geq N(\varepsilon)$ fixé, puisque chaque f_n est continue en α (car chaque f_n est continue sur X), il existe $\eta > 0$ tel que si $|x-\alpha| \leq \eta$, on ait $|f_n(x)-f_n(\alpha)| \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$.

D'où

$$\begin{aligned} |f(x)-f(\alpha)| &= |f(x)-f_n(x)+f_n(x)-f_n(\alpha)+f_n(\alpha)-f(\alpha)| \\ &\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(\alpha)|+|f_n(\alpha)-f(\alpha)| \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

pour tout $n \geq N(\varepsilon)$ et $x \in K \cap [\alpha-\eta\,,\,\alpha+\eta]$. Donc, f est continue en α. □

Puisque la convergence uniforme entraîne la convergence compacte, le Théorème 2.1.12 reste vrai si on remplace l'hypothèse "*converge compactement vers f*" par "*converge uniformément vers f*".'

Corollaire 2.1.13. *Soient A une partie de $\mathbb{R}$, $\alpha \in \overline{A}$ et $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions de A dans $\mathbb{K}$ telle que*

(1). $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément sur A vers une fonction f,

(2). pour tout n, $\lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x) = \ell_n < +\infty$ et

(3). $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell_n = \ell$ (finie ou non).

Alors $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \ell$. Autrement dit, $\lim\limits_{x\to\alpha}\Big(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\Big) = \lim\limits_{n\to+\infty}\Big(\lim\limits_{x\to\alpha} f_n(x)\Big)$.

Ce résultat peut servir pour montrer que la convergence n'est pas uniforme, en utilisant la contraposée c'est-à-dire si chaque f_n est continue mais la limite simple f ne l'est pas alors la convergence n'est pas uniforme.

2.1.4 Convergence uniforme et intégrabilité sur un segment de la limite

Les théorèmes suivants montrent que la propriété d'intégrabilité est transmise par la convergence uniforme.

Théorème 2.1.14. *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions continues sur $[a\,,b]$ qui converge uniformément sur $[a\,,b]$ vers une fonction f. Pour tout n et tout $x \in [a\,,b]$, on pose*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad \text{et} \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors la suite $\left(F_n\right)_n$ converge uniformément vers f sur $[a\,,b]$.

Preuve. Remarquons que f est continue sur $[a\,,b]$ donc intégrable. Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Alors, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $t \in [a\,,b]$ et tout $n \geq N(\varepsilon)$, on ait $|f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon$.
Alors pour tout $x \in [a\,,b]$ et tout $n \geq N(\varepsilon)$, on a

$$|F_n(x) - F(x)| = \left|\int_a^x \big(f_n(t) - f(t)\big)dt\right| \leq \int_a^x |f_n(t) - f(t)|\,dt \leq \varepsilon(b-a).$$

Ce qui montre que $\big(F_n\big)_n$ converge uniformément vers F sur $[a\,,b]$. □

En fait, le Théorème 2.1.14 reste vrai si on rempace l'hypothèse "*continue*" par "*intégrable*".

Théorème 2.1.15. *Soit $\big(f_n\big)_n$ une suite de fonctions **intégrables** sur l'intervalle $[a\,,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\big(f_n\big)_n$ converge uniformément vers f, la fonction f est intégrable sur $[a\,,b]$ et on a*

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

Preuve. Rappelons qu'une fonction f définie sur un intervalle $[a\,,b]$, à valeurs réelles ou complexes est intégrables si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ telles que

(1). $\forall x \in [a\,,b]$, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \psi(x)$,

(2). $\displaystyle\int_a^b \psi(t)dt < \varepsilon$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisuqe $\big(f_n\big)_n$ converge uniformément vers f, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N(\varepsilon)$ et $\forall x \in [a\,,b]$, on a $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ c'est-à-dire pour tout $x \in [a\,,b]$, on a

$$f_{N(\varepsilon)}(x) - \varepsilon \leq f(x) \leq f_{N(\varepsilon)} + \varepsilon. \tag{2.1.5}$$

D'autre part, puisque $f_{N(\varepsilon)}$ est intégrable, il existe de deux fonctions en escalier φ et ψ telles que

(1). $\forall x \in [a\,,b]$, $|f(x) - \varphi(x)| \leq \psi(x)$,

(2). $\displaystyle\int_a^b \psi(t)dt < \varepsilon$

Soient $\Phi = \varphi - \varepsilon$ et $\chi = \psi + \varepsilon$. Il est clair que Φ et χ sont des fonctions en escalier vérifiant :

(1). $\forall x \in [a\,,b]$, $|f(x) - \Phi(x)| \leq \chi(x)$,

(2). $\displaystyle\int_a^b \chi(t)dt < \varepsilon\big(1 + (b-a)\big)$

Donc f est intégrable sur $[a\,,b]$. □

Théorème 2.1.16. *Soit $\big(f_n\big)_n$ une suite de fonctions intégrables sur $[a\,,b]$ qui converge uniformément sur $[a\,,b]$ vers une fonction f. Pour tout n et tout $x \in [a\,,b]$, on pose*

$$F_n(x) = \int_a^x f_n(t)dt \quad \textit{et} \quad F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alors la suite $\big(F_n\big)_n$ converge uniformément vers f sur $[a\,,b]$.

Preuve. Reprendre la démonstration du Théorème 2.1.14. □

En fait, le Théorème 2.1.14 et le Théorème 2.1.16 permettent d'intervertir lim et $\int$. Dans la pratique, on se sert du théorème suivant

Théorème 2.1.17. *Soit $\big(f_n\big)_n$ de fonctions continues (ou intégrables) sur l'intervalle $[a\,,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$. Si $\big(f_n\big)_n$ converge uniformément vers vers une fonction f, la fonction f est intégrable sur $[a\,,b]$ et on a*

$$\int_a^b \lim_{n\to+\infty} f_n(t)dt = \lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

2.1.5 Convergence uniforme et intégrabilité sur un intervalle quelconque de la limite

Dans ce paragraphe, les fonctions considérées sont des fonctions de la variable **réelle**.

Théorème 2.1.18 (Théorème de la convergence dominée)**.** *Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies sur un intervalle I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur I,*
- *la suite $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f,*
- *la fonction f est continue par morceaux sur I et*
- *il existe une fonction $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux sur I, positive et intégrable sur I telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in I$, on ait $|f_n(x)| \leq \varphi(x)$.*

Alors

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable sur I,*
- *la fonction f est intégrable sur I et*
- $\displaystyle\int_I f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)dt$ *c'est-à-dire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$

Proposition 2.1.19. *Soient I un **intervalle borné** de $\mathbb{R}$ et $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose que*

- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur I,*
- *la suite $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément sur I vers une fonction f.*

Alors

- *la fonction f est continue et intégrable sur I et*
- $\displaystyle\int_I f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)dt$ *c'est-à-dire* $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_I f_n(t)dt = \int_I f(t)dt.$

2.1.6 Convergence uniforme et dérivabilité de la limite

Théorème 2.1.20. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies et dérivable sur I. On suppose que*

(1). il existe $t_0 \in I$ tel que la suite numérique $\left(f_n(t_0)\right)_n$ converge et

(2). la suite des dérivées $\left(f_n'\right)_n$ converge uniformément vers g sur tout segment $[a\,,b] \subset I$.

Alors la suite $\left(f_n\right)_n$ converge uniformément sur tout segment $[a\,,b] \subset I$ vers une fonction dérivable f telle que $f'(t) = g(t)$ pour tout $t \in I$.

On peut alors écrire, pour tout $t \in [a\,,b]$, $f'(t) = \left[\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right]' = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(t).$

Preuve. Soit $[a\,,b] \subset I$ tel que $t_0 \in [a\,,b]$ et $\varepsilon > 0$. On peut alors écrire le critère de Cauchy uniforme pour la suite $\left(f_n'\right)_n$ sur $[a\,,b]$. Donc, il existe $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que si $p,q \geq N(\varepsilon)$, on a pour tout $t \in [a\,,b]$,

$$\left|f_p'(t) - f_q'(t)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \tag{2.1.6}$$

Pour chaque couple $(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que $p,q \geq N(\varepsilon)$, appliquons le théorème des accroissement finis en t_0 à la fonction $f_p - f_q$. On a pour tout $t \in [a\,,b]$,

$$\begin{aligned} \left|[f_p(t)-f_q(t)]-[f_p(t_0)-f_q(t_0)]\right| &\leq |t-t_0| \sup_{t\in[a\,,b]} \left|f_p'(t)-f_q(t)\right| \\ &\leq |t-t_0| \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \leq \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

Donc pour tout $t \in [a\,,b]$, on a

$$|f_p(t)-f_q(t)| \leq |f_p(t_0)-f_q(t_0)| + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque la suite numérique $\big(f_n(t_0)\big)_n$ est convergente, elle est de Cauchy. Donc il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que

$$\text{si } \; p,q \geq M, \; \text{ on a } \; |f_p(t_0)-f_q(t_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On en déduit que

$$\text{si } \; p,q \geq \max\big\{N,\, M\big\}, \; \text{ on a } \; |f_p(t)-f_q(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Ce qui prouve que la suite $\big(f_n\big)_n$ converge uniformément sur $[a\,,b]$. On note f sa limite.

En reprenant la formule des accroissements finis ci-dessus en un point $t_1 \in [a\,,b]$, si $p,q \geq N$, on a pour tout $t_1 \neq t \in [a\,,b]$,

$$\left|\frac{f_p(t)-f_q(t)}{t-t_1} - \frac{f_p(t_1)-f_q(t_1)}{t-t_1}\right| = \left|\frac{f_p(t)-f_p(t_1)}{t-t_1} - \frac{f_q(t)-f_q(t_1)}{t-t_1}\right| \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \tag{2.1.7}$$

Considérons maintenant la suite de fonctions $\big(\varphi_n\big)_n$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \dfrac{f_n(t)-f_n(t_1)}{t-t_1} & \text{si} \quad t \neq t_1 \\[2em] f_n'(t) & \text{si} \quad t = t_1. \end{cases}$$

Les relations (2.1.6) et (2.1.7) montrent que la suite $\big(\varphi_n\big)_n$ converge uniformément sur $[a\,,b]$. Notons φ sa limite.

La suite $\big(\varphi_n\big)_n$ est une suite de fonctions continues en t_1 car par hypothèse, les f_n sont dérivables en t_1. Donc on peut écrire

$$\lim_{t\to t_1} \varphi_n(t) = \lim_{t\to t_1} \frac{f_n(t)-f_n(t_1)}{t-t_1} = f_n'(t_1) = \varphi_n(t_1).$$

En appliquant le Théorème 2.1.12, on voit que la limite φ de la suite $\big(\varphi_n\big)_n$ est continue en t_1 et que

$$\varphi(t_1) \;=\; g(t_1) = \lim_{n\to+\infty} f_n'(t_1) = \lim_{n\to+\infty}\left[\lim_{t\to t_1} \frac{f_n(t)-f_n(t_1)}{t-t_1}\right] = \lim_{t\to t_1}\left[\lim_{n\to+\infty} \frac{f_n(t)-f_n(t_1)}{t-t_1}\right] = \lim_{t\to t_1} \frac{f(t)-f(t_1)}{t-t_1}.$$

On en déduit que la dérivée de f en t_1 existe et vaut $f'(t_1) = g(t_1) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n'(t_1)$.

Puisque ceci est vraie pour tout $t_1 \in [a\,,b]$, ceci prouve que f est dérivable sur $[a\,,b]$ et que sa dérivée est la limite de la suit $\big(f_n'\big)_n$ c'est-à-dire $g = f'$.

Comme $[a\,,b]$ a été choisi arbitrairement, le raisonnement précédent prouve que la suite $\big(f_n\big)_n$ converge uniformément sur tout segment $[a\,,b]$ de I contenant t_0 et par suite sur I tout entier. □

On utilisera beaucoup le cas particulier du Théorème 2.1.20 suivant

Corollaire 2.1.21. *Si la suite $\big(f_n\big)_n$ converge simplement sur I vers une fonction f et si la suite $\big(f_n'\big)_n$ converge uniformément sur tout segment $[a\,,b] \subset I$ vers une fonction g, alors la fonction f est dérivable et $f' = g$. De plus, la convergence de la suite $\big(f_n\big)_n$ est uniforme sur tout segment $[a\,,b]$.*

Méthodes à retenir pour étudier une suite de fonctions

Voici un petit resumé pour étudier une suite de fonctions.

(1). Pour étudier les convergences d'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$, on commence en général par étudier la convergence simple, puis étudier la convergence uniforme.

(2). Pour étudier la convergence simple de $\left(f_n\right)_n$, on fixe $x \in X$ et étudier la convergence de la suite numérique $\left(f_n(x)\right)_n$. Cela détermine la limite simple f de la suite $\left(f_n\right)_n$.

(3). Poue étudier la convergence uniforme d'une suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ qui déjà converge simplement vers une fonction f,

- voir si à partir d'un certain rang, $f_n - f$ est bornée et si c'est le cas, on a

$$f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c.u.} f \quad \text{si, et seulement si} \quad \sup_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

- Pour évaluer $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$, on étudie les variations de la fonction g_n définie par $g_n(x) = |f_n(x)-f(x)|$.
- Si on veut montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{c.u.} f$ et si $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$ ne paraît pas aisément calculable, on essaie de majorer $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$ par une suite numérique plus simple tendant vers 0.
- Si on veut montrer que $f_n \not\xrightarrow[n\to+\infty]{c.u.} f$ et si $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)|$ ne paraît pas aisément calculable, on essaie de trouver une suite $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ telle que $\left(f_n - f\right)(x) \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et on déduira que $\sup\limits_{x\in X}|f_n(x)-f(x)| \not\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2.2 Séries de fonctions

Définition 2.2.1. Soit $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies sur un domaine X et à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
On considère une nouvelle suite $\left(S_n\right)_n$ de fonctions définies sur X par $S_n(x) = f_0(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x)$.
On appelle **série de fonctions** de terme général f_n et on note (par abus de notation) $\sum f_n$, la suite $\left(\left(f_n\,,\,S_n\right)\right)_n$d'éléments de $\mathbb{K}\times\mathbb{K}$.
L'éléments $S_n(x)$ de $\mathbb{K}$ est appelé la somme des $(n+1)$ premiers termes de la série $\sum f_n$ et la suite $\left(S_n\right)_n$ est appelée la suite des sommes partielles de la série.

2.2.1 Les différents modes de convergence

Définition 2.2.2 (Convergence simple : C.S.)**.** On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement si la suite de fonctions $\left(S_n\right)_n$ converge simplement. C'est-à-dire , si pour tout $x \in X$, la suie numérique $\left(S_n(x)\right)_n$ est convergente. Dans ce cas, on peut définir une fonction $S : X \longrightarrow \mathbb{K}$. La fonction S ainsi définie est appelée la somme de la série de fonctions.

Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement, la suite $\left(r_n\right)_n$ définie par $r_n(x) = S(x) - S_n(x)$, pour tout $x \in X$ et tout $n \in \mathbb{N}$, s'appelle le reste d'ordre n de la série de terme général f_n.
Le fait que la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement vers S se traduit ainsi

$$\forall x \in X,\ \forall \varepsilon > 0,\ \exists N(x,\varepsilon) \in \mathbb{N} \ \text{ tel que } \ \forall n \geq N(x,\varepsilon),\ \text{ on a } \ |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

Définition 2.2.3 (Convergence absolue : C.A.)**.** On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge si la série de fonctions $\sum |f_n|$ converge simplement.

Définition 2.2.4 (Convergence uniforme : C.U.)**.** On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément vers S sur X si la suite de fonctions $\left(S_n\right)_n$ converge uniformément vers S sur X. Cela s'écrit :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon),\ \forall x \in X, \text{ on a } |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

C'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall n \geq N(\varepsilon), \text{ on a } \sup_{x\in X} |S_n(x) - S(x)| \leq \varepsilon.$$

Définition 2.2.5 (Convergence absolue uniforme : C.A.U.)**.** On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge absolument uniformément sur X si la série $\sum |f_n|$ converge uniformément sur X.

Il existe un critère de Cauchy, qui permet de tester la convergence uniforme d'une série de fonctions sans connaître sa somme.

Théorème 2.2.6. *Une série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X si, et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ tel que si } p \geq N \text{ et } q \geq N, \text{ on a } \sup_{x\in X} |S_p(x) - S_q(x)| \leq \varepsilon.$$

Comme dans le cas des suites de fonctions, le critère de Cauchy uniforme a un corollaire, que l'on utilise beaucoup par sa contraposée, pour montrer qu'une série de fonctions ne converge pas uniformément.

Corollaire 2.2.7. *Si la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X, on a* $\sup_{x\in X} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Preuve. On a $\sup_{x\in X} |f_n(x)| = \sup_{x\in X} |S_n(x) - S_{n-1}(x)|$. En appliquant le critère de Cauchy uniforme, on a le résultat. □

Définition 2.2.8 (Semi-convergence simple : S.C.S.)**.** On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ est semi-convergente simplement sur X si elle converge simplement sans converger absolument. C'est-à-dire la série de fonctions $\sum f_n$ est semi-convergente simplement si elle converge simplement tandis que la série de fonctions $\sum |f_n|$ ne converge pas simplement.

Définition 2.2.9 (Semi-convergence uniforme : S.C.S.)**.** On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ est semi-convergente uniformément sur X si elle converge uniformémént sur X sans converger absolument et uniformément. C'est-à-dire la série de fonctions $\sum f_n$ est semi-convergente uniformément si elle converge uniformément tandis que la série de fonctions $\sum |f_n|$ ne converge pas uniformément.

Définition 2.2.10 (Convergence compacte : C.C.)**.** Une série de fonctions $\sum f_n$ converge compactement sur X si elle converge uniformément sur tout sous-ensemble compact de X.

On a, pour les séries de fonctions, une autre notion de convergence, qui est plus forte que la convergence uniforme et souvent facile à vérifier : la **convergence normale**.

Définition 2.2.11. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement sur X s'il existe une série numérique à termes positifs $\sum a_n$ telle que :

(1) . $\forall n \in \mathbb{N}$ et $\forall x \in X$, on a $|f_n(x)| \leq a_n$ et

(2) . la série $\sum a_n$ est convergente.

On peut reformuler la Définition 2.2.11 précédente comme suit :

Définition 2.2.12. Une série de fonctions $\sum f_n$ est normalement convergente si la série numérique de terme général $a_n = \sup\limits_{x\in X} |f_n(x)|$ est convergente.

La relation entre ces différentes types de convergence est résumée dans le théorème suivant

Théorème 2.2.13.

$$\begin{array}{ccccc} C.N. & \Longrightarrow & C.A. & \Longrightarrow & C.S. \\ \Downarrow & & & & \Uparrow \\ C.U & & \Longrightarrow & & C.C. \end{array}$$

Preuve. Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X.

(1). $C.A. \Longrightarrow C.S.$: Posons $S_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$ et $\sigma_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} |f_k(x)|$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|S_n(x)| \leq \sigma_n(x)$. Par hypothèse, la suite $\left(\sigma_n\right)_n$ est convergente donc elle vérifie le critère de Cauchy : $\forall \varepsilon > 0,\ \forall x \in X,\ \exists N\big(x, \varepsilon\big)$ tel que $\forall n \geq N,\ \forall m \geq N$, on a $|\sigma_n(x) - \sigma_m(x)| \leq \varepsilon$. Supposons $m > n$. On a $|S_n(x) - S_m(x)| = \left|\sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=n+1}^{m} |f_k(x)| = \sigma_m(x) - \sigma_n(x) \leq \varepsilon$ et la suite $\big(S_n(x)\big)$ vérifie le critère de Cauchy donc elle converge pour tout $x \in X$.

(2). $C.N. \Longrightarrow C.A.$: Pour chaque x fixé, on a $|f_n(x)| \leq \alpha_n$. La série $\sum \alpha_n$ est convergente et par le théorème de comparaison, on déduit que $\sum |f_n(x)|$ converge.

(3). $C.U. \Longrightarrow C.C. \Longrightarrow C.S.$ et $S.C.U. \Longrightarrow S.C.S.$: Appliquer leThéorème 2.1.11 à la suite de fonctions $\big(S_n\big)_n$.

(4). $C.N. \Longrightarrow C.U.$: Nous allons montrer qu'elle vérifie le critère de Cauchy pour les séries de fonctions. Par hypothèse, il existe une série numérique à termes positifs $\sum a_n$ telle que :

$$\sup_{x\in X} |f_n(x)| \leq a_n \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \sum a_n \ \text{est convergente.}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Puisque $\sum a_n$ est convergente, elle satisfait au critère de Cauchy. Il existe ainsi $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\sum_{k=q+1}^{p} a_k \leq \varepsilon \quad \text{pour tous} \quad p > q \geq N$$

On a alors $\sum\limits_{k=q+1}^{p} \sup\limits_{x\in X} |f_k(x)| \leq \varepsilon \quad$ pour tous $\quad p > q \geq N$.

D'autre part, l'inégalité triangulaire donne, pour tous $p > q \geq N$: $\sup\limits_{x\in X} \left|\sum\limits_{k=q+1}^{p} f_k(x)\right| \leq \sum\limits_{k=q+1}^{p} \sup\limits_{x\in X} |f_k(x)|$.

Il s'ensuit que $\sup\limits_{x\in X} \left|\sum\limits_{k=q+1}^{p} f_k(x)\right| \leq \varepsilon$ pour tous $p > q \geq N$. Donc, la série de fonctions $\sum f_n$ vérifie le critère de Cauchy.

□

2.2.2 Critère de convergence des séries de fonctions

Convergence simple

Pour chaque x fixé, $f_n(x)$ est le terme général d'une série numérique. On peut donc utiliser les critères de d'Alembert ou de Cauchy c'est-à-dire étudier $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right|$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|f_n(x)|}$, ou le Théorème 1.4.8 si la série ne converge pas absolument.

Convergence uniforme

On peut utiliser le critère de Cauchy uniforme pour la suite $\left(S_n\right)_n$ pour avoir le critère de Cauchy uniforme pour la série dde fonctions $\sum f_n$:

$$\forall\varepsilon>0,\ \exists N(\varepsilon);\ \forall x\in X,\ \forall n>N,\ \forall m>N\ (m>n),\ \text{on a}\ \ |f_{n+1}(x)+f_{n+2}(x)+\cdots+f_m(x)|\leq\varepsilon.$$

Le critère de Cauchy uniforme est une condition nécessaire et suffisante pour obtenir la convergence uniforme MAIS il est peu pratique. On a le théorème suivant :

Théorème 2.2.14. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur X et à valeurs dans $\mathbb{K}$. On suppose qu'il existe une série numérique $\sum \alpha_n$, convergente telle que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $x\in Y\subset X$, on a $|f_n(x)|\leq\alpha_n$. Alors la série $\sum f_n$ converge uniformément sur Y.*

Semi-convergence uniforme

Théorème 2.2.15 (Abel - uniforme)**.** *Soit $\left(a_n\right)_n$ une suite de fonctions réelles ou complexes définies sur X et $\left(\lambda_n\right)_n$ une suite de fonctions strictement positives. On suppose que :*

(1). pour chaque $x\in X$, la suite $\left(\lambda_n(x)\right)_n$ est décroissante,

(2). la suite $\left(\lambda_n(x)\right)_n$ tend uniformément vers 0 quad n tend $+\infty$,

(3). pour tout $x\in X$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe une constante M, indépendante de x et de n, telle que $\left|\sum\limits_{k=0}^{n}a_k(x)\right|\leq M$.

Alors la série de fonctions $\sum\lambda_n a_n$ converge uniformément.

Les propriétés que nous avons vues pour les limites uniformes des suites de fonctions ont une traduction pour les éries de fonctions uniformément convergentes.

2.2.3 Convergence uniforme et continuité de la somme

Théorème 2.2.16. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions qui **converge uniformément** sur X et a pour somme la fonction S. Si pour chaque $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue en $x_0\in X$, la somme S est aussi continue en x_0.*

On peut alors écrire $S(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_n(x_0)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$.

Plus généralement, si chaque f_n est continue sur X et si la série $\sum f_n$ converge uniformément sur X, la somme S est aussi continue sur X.

Preuve. On applique le Théorème 2.1.12 à la suite $\left(S_n\right)_n$ des sommes partielles de la série $\sum f_n$, qui sont continues comme sommes finies de fonctions continues. □

2.2.4 Convergence uniforme et dérivabilité de la somme

Théorème 2.2.17. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions dérivables sur un intervalle I telle que*

(1). Il existe $x_0 \in I$ tel que la série numérique $\sum f_n(x_0)$ soit convergente,

(2). La série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I vers σ.

Alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I et a pour somme une fonction dérivable S telle que $S' = \sigma$. On peut alors écrire : $S'(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty} f'_n(x)$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le Théorème 2.1.20 à la suite $\left(S_n\right)_n$ des sommes partielles de la série $\sum f_n$ qui sont dérivables comme sommes finies de fonctions dérivables. □

Dans la pratique, on utilise souvent le corollaire suivant :

Corollaire 2.2.18. *Si $\sum f_n$ est une série de fonctions dérivales sur I qui converge simplement et a pour somme la fonction S et si la série des dérivées $\sum f'_n$ converge uniformément sur tout sous-intervalle borné de I et a pour somme la fonction σ alors S est dérivable et on a $S' = \sigma$ sur I.*

2.2.5 Convergence uniforme et intégrabilité de la somme

Théorème 2.2.19. *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies et continues sur $[a\,,b]$ qui converge uniformément sur $[a\,,b]$ et a pour somme S. Alors la série numérique $\sum \int_a^b f_n(t)dt$ est convergente et a pour somme $\int_a^b S(t)dt$. On peut alors écrire $\int_a^b S(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b f_n(t)dt = \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right] dt$.*

Il peut arriver que la convergence normale ne fonctionne pas pour certaines séries de fonction. Le théorème suivant est un outil pour montrer la convergence uniforme :

Théorème 2.2.20 (Abel-Dirichlet)**.** *Soit $\sum f_n$ une série de fonctions définies sur un ensemble X telle que $f_n = \varepsilon_n v_n$ où les suites de fonctions $\left(\varepsilon_n\right)_n$ et $\left(v_n\right)_n$ satisfont aux propriétés suivantes :*

(1). Pour tout $x \in X$, on a : $0 \leq \varepsilon_{n+1}(x) \leq \varepsilon_n(x)$,

(2). La suite de fonctions $\left(\varepsilon_n\right)_n$ converge uniformément vers la fonction nulle,

(3). Il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in X$, on a $|v_0(x) + v_1(x) + \cdots + v_n(x)| \leq A$.

Alors la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément sur X.

2.3 Exercices

Exercice 2.3.1. Soient $I = \left[0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = \left(\sin x\right)^n \cos x$. Etudier la convergence simple et uniforme de la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ sur I.

Exercice 2.3.2. Soit $I = [0\,,\pi]$. On définit, pour $n \geq 1$,la fonction f_n par $f_n(0) = 1$ et $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{x\left(1+nx\right)}$.

(1). Etudier la convergence simple et uniforme de la suite $\left(f_n\right)_n$.

(2). Soit $\alpha \in \,]0\,,\pi\,]$. Etudier la convergence uniforme de la suite $\left(f_n\right)_n$ sur $[\alpha\,,\pi]$.

Exercice 2.3.3. On définit, pour $n \geq 1$, la fonction f_n par $f_n(x) = \sqrt{n}\cos x\big(\sin x\big)^n$.

(1) . Etudier la convergence simple de la suite $\big(f_n\big)_n$ sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On note f la limite simple quand elle existe.

(2) . Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

(3) . La suite $\big(f_n\big)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$?

Exercice 2.3.4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit , pour $n \geq 1$ et $x \in [0\,,\,1]$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}e^{-nx}$.

(1) . Déterminer, pour $\beta \in \mathbb{R}$ et $x \in [0\,,\,1]$, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^\beta f_n(x)$.

(2) . Etudier la convergence simple de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$.

(3) . Pour quelle valeur(s) de α a-t-on convergence normale sur $[0\,,\,1]$?

Exercice 2.3.5. Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln\big(n+e^{nx}\big)}{n^3}$.

(1) . Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(2) . Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(3) . La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2.3.6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+$, $\big(f_n\big)_n$ une suite de fonctions définies sur I et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Montrer que si la suite $\big(f_n\big)_n$ converge simplement vers f sur I et si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante (resp. convexe, resp. $k-$lipschitzienne), la fonction f est croissante (resp. convexe, resp. $k-$lipschitzienne).

Exercice 2.3.7. Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}dx, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty}\int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2+e^x}dx.$$

2.4 Corrigés des exercices

Exercice 2.3.1. Soient $I = \left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = \big(\sin x\big)^n \cos x$.

(1) . **Convergence simple :** Soit $x \in I$. On a

- Si $x = 0$ ou $x = \dfrac{\pi}{2}$, $f_n(x) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il s'ensuit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x \in \left]0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\big(f_n(x)\big)_n$ est une suite géométrique de raison $q = \sin x$. De plus, $|\sin x| < 1$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

Conclusion : La suite de fonctions $\big(f_n\big)_n$ converge simplement sur I vers la fonction nulle.

(2) . **Convergence uniforme :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $f_n\big(0\big) = f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et f_n est positive. Pour tout $x \in I$, on a $f_n'(x) = \big(\sin x\big)^{n-1}\big(n\cos^2 x - \sin^2 x\big) = \big(\sin x\big)^{n-1}\big(\sqrt{n}\cos x - \sin x\big)\big(\sqrt{n}\cos x + \sin x\big)$ et

- $\big(\sin x\big)^{n-1} = 0$ si, et seulement si $x = 0$,
- $\big(\sqrt{n}\cos x - \sin x\big)\big(\sqrt{n}\cos x + \sin x\big) = 0$ si, et seulement si $x = \arctan\sqrt{n}$,
- $0 \leq \big(\sqrt{n}\cos x - \sin x\big)\big(\sqrt{n}\cos x + \sin x\big)$ si, et seulement si $x \leq \arctan\sqrt{n}$.

Ainsi, $|f_n|$ admet son maximum en $x_n = \arctan\sqrt{n}$ avec $\left|f_n\left(x_n\right)\right| = |\sin x_n|^n \cos x_n \leq \cos x_n = \cos\left(\arctan\sqrt{n}\right)$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \dfrac{\pi}{2}$ et la fonction $t \longmapsto \cos t$ est continue, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \cos x_n = 0$ ce qui donne $\sup\limits_{x\in I} |f_n(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, la convergence est uniforme.

Exercice 2.3.2. Soit $I = [0\,,\,\pi]$. On définit, pour $n \geq 1$,la fonction f_n par $f_n(0) = 1$ et $f_n(x) = \dfrac{\sin x}{x\left(1+nx\right)}$.

(1). • **Convergence simple :** On a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \left]0\,,\,\pi\right]$. Donc, la suite $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur I vers la fonction f définie par $f(0) = 1$ et $f(x) = 0$ si $x \neq 0$.

• **Convergence uniforme :** Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f_n(x) = 1 = f_n(0)$ c'est-à-dire chaque f_n est une fonction continue.

Puisque chaque f_n est continue alors que la fonction f ne l'est pas, la convergence n'est pas uniforme.

(2). Soit $\alpha \in \left]0\,,\,\pi\right]$. Pour tout $x \in [\alpha\,,\,\pi]$, on a $1+n\alpha \leq 1+nx$, $x\left(1+nx\right) \leq \alpha\left(1+n\alpha\right)$ et $0 \leq \sin x \leq 1$ Ainsi, pour tout $x \in [\alpha\,,\,\pi]$, on a $0 \leq f_n(x) \leq \dfrac{1}{\alpha\left(1+n\alpha\right)}$. Il s'ensuit que

$$\sup_{x\in[\alpha\,,\,\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[\alpha\,,\,\pi]} |f_n(x)| \leq \frac{1}{\alpha\left(1+n\alpha\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Donc, on a une convergence uniforme sur l'intervalle $[0\,,\,\pi]$.

Exercice 2.3.3. On définit, pour $n \geq 1$, la fonction f_n par $f_n(x) = \sqrt{n}\cos x\left(\sin x\right)^n$.

(1). Pour $x \in \left[0\,,\,\pi\right[$, on a $|\sin x| < 1$ et par croissances comparées, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$. De plus, $f_n\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$. Donc la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction $f \equiv 0$.

(2). On a $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt = 0$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt = \frac{\sqrt{n}}{n+1}$ pour tout $n \geq 1$ Ainsi, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt = 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$.

(3). La suite $\left(f_n\right)_n$ converge-t-elle uniformément sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$?

Le résultat de (2). ne permet pas de conclure. D'après l'Exercice 2.3.1, $\sup\limits_{x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| = f_n\left(x_n\right) = y_n$ où $x_n = \arctan\sqrt{n}$. On peut obtenir un équivalent simple de y_n. On a

$$\tan^2 x_n = n, \quad \cos^2 x_n = \frac{1}{n+1} \quad \text{et} \quad \sin^2 x_n = \frac{n}{n+1}.$$

Puisque $\sin x_n > 0$ et $\cos x_n > 0$, on peut écrire :

$$y_n = \sqrt{n} \times \left[\frac{n}{n+1}\right]^{\frac{n}{2}} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n} \times e^{\frac{n}{2}\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)} \times \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Comme $\dfrac{n}{2}\ln\left(1-\dfrac{1}{n+1}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\dfrac{n}{2}\right) \times \left(-\dfrac{1}{n}\right) = -\dfrac{1}{2}$, on a $y_n \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}}$.

Finalement, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]} |f_n(x)| = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Donc la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ ne converge pas uniformément vers f sur $\left[0\,,\,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Noter bien que le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ ne permet pas de conclure qu'on une convergence uniforme. Le théorème du cours dit que si la convergence est uniforme, on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)dt = 0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)dt$ **MAIS** la réciproque est fausse en général comme le montre cet exercice.

Exercice 2.3.4. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On définit , pour $n \geq 1$ et $x \in [0\,,\,1]$ la fonction f_n par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}e^{-nx}$.

(1). Soient $\beta \in \mathbb{R}$ et $x \in [0\,,\,1]$. On a $\left|n^\beta f_n(x)\right| = n^{\beta-\alpha}x^n e^{-nx} \leq n^{\beta-\alpha}x^n$ et par croissances comparées, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} n^\beta f_n(x) = 0$ pour tout $x \in [\,0\,,\,1\,[$. Pour $x = 1$, on a $n^\beta f_n(1) = n^{\beta-\alpha}e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
Donc, $n^\beta f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ pour tout $x \in [0\,,\,1]$ et tout $\beta \in \mathbb{R}$.

(2). D'après (1)., on a $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ pour tout $x \in [0\,,\,1]$. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge simplement sur $[0\,,\,1]$.

(3). En étudiant les variations de f_n, on montre que f_n est croissante et $\sup\limits_{x\in[0\,,\,1]} |f_n(x)| = \dfrac{e^{-n}}{n^\alpha} = \gamma_n$.
D'autre part, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} \gamma_n$ est convergente car pour tout $n > 0$, on a $\gamma_n > 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = \dfrac{1}{e}$.
Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge normalement sur $[0\,,\,1]$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.3.5. Soit la fonction $f : x \longmapsto \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\ln\left(n+e^{nx}\right)}{n^3}$.

(1). La fonction f est définie comme étant la somme d'une série de fonctions. Ainsi, dire que f est bien définie équivaut à dire que la série de fonctions de terme général $f_n(x) = \dfrac{\ln\left(n+e^{nx}\right)}{n^3}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Pour cela, soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \leq 0$, on a $\left(n+e^{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} n$ et $\ln\left(n+e^{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n$. Donc $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^3} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. Il s'ensuit que pour $x \leq 0$, la série numérique $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x)$ converge c'est-à-dire la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge simplement.
- Si $x > 0$, on a $\left(n+e^{nx}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{nx}$. Donc, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{n^3} \dfrac{\ln\left(e^{nx}\right)}{n^3} = \dfrac{x}{n^3}$ et $\sum\limits_{n\geq1} f_n(x)$ converge.

On conclut donc que pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge simplement c'est-à-dire la fonction $f$est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(2). Pour chaque $n \geq 1$ et la fonction f_n est continue, croissante et positive. D'autre part, soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On a, pour tout $n \geq 1$ et $x \in\,]-\infty\,,\,\alpha\,]$, $|f_n(x)| \leq |f_n(\alpha)|$. Donc la série de fonctions $\sum\limits_{n\geq1} f_n$ converge normalement sur $]-\infty\,,\,\alpha\,]$ et f est continue sur $]-\infty\,,\,\alpha\,]$. Puisque $\alpha \in \mathbb{R}$ est queconque, f est continue sur $\mathbb{R}$.

(3). Pour chaque $n \geq 1$, la fonction f_n est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x > 0$, on a

$$f_n'(x) = \frac{ne^{nx}}{n^3\left(n+e^{nx}\right)} = \frac{1}{n^2} \times \frac{e^{nx}}{n+e^{nx}}.$$

On obtient facilement, $0 \leq f_n'(x) \leq \dfrac{1}{n^2}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc, la série des dérivées $\sum\limits_{n\geq1} f_n'$ converge normalement et les autres propriétés pour appliquer le théorème de dérivation sont faciles à vérifier. Donc, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.3.6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+$, $\left(f_n\right)_n$ une suite de fonctions définies sur I et $f\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction tel que la suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ converge simplement vers f sur I.

(1). Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit croissante. Soient $x, y \in I$ tels que $x < y$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) \leq f_n(y)$. Puisque $\left(f_n\right)_n$ converge simplement vers f, on déduit par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ que $f(x) \leq f(y)$ c'est-à-dire f est croissante

(2). Supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n soit convexe. Soit $\lambda \in [0, 1]$ et $x, y \in I$. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f_n\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f_n(x) + (1-\lambda) f_n(y).$$

Puisque $\left(f_n\right)_n$ converge simplement vers f, on déduit par passage à la limite quand n tend vers $+\infty$ que $f_n\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ c'est-à-dire f est convexe.

Exercice 2.3.7. Calcul intégral.

(1). Pour $n \geq 1$, notons f_n la fonction définie sur $[\,0, +\infty\,[$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}$. On a

- Pour tout $n \geq 1$, f_n est continue sur $[\,0, +\infty\,[$,
- Pour $x \in [\,0, +\infty\,[$ fixé, $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ c'est-à-dire la suite $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur $[\,0, +\infty\,[$ vers la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
- Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [\,0, +\infty\,[$, on a $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ et l'application $\varphi\colon x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[\,0, +\infty\,[$ car $\dfrac{1}{1+x^2} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

Ainsi,la suite $\left(f_n\right)_n$ satisfait aux hypothèse du Théorème de la convergence dominée (Théorème 2.1.18). Donc, f intégrable sur $[\,0, +\infty\,[$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_n(x)dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$.

(2). Pour $n \in \mathbb{N}$, notons f_n la fonction définie sur $[\,1, +\infty\,[$ par $f_n(x) = \dfrac{n}{nx^2 + e^x}$. On a

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue sur $[\,1, +\infty\,[$,
- Pour $x \in [\,1, +\infty\,[$ fixé, on a $f_n(x) = \dfrac{n}{nx^2 + e^x} = \dfrac{1}{x^2 + \frac{e^x}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} f(x) = \dfrac{1}{x^2}$
- La fonction f est continue sur $[\,1, +\infty\,[$ et
- Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in [\,1, +\infty\,[$, $|f_n(x)| = \dfrac{n}{nx^2 + e^x} \leq \dfrac{1}{x^2}$ et l'application $\varphi\colon x \longmapsto \dfrac{1}{x^2}$ est continue, positive et intégrable sur $[\,0, +\infty\,[$.

Ainsi,la suite $\left(f_n\right)_n$ satisfait aux hypothèse du Théorème de la convergence dominée (Théorème 2.1.18). Donc, f intégrable sur $[\,1, +\infty\,[$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} f_n(x)dx \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_1^{+\infty} f(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{+\infty} = 1$.

Conclusion : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \int_1^{+\infty} \frac{n}{nx^2 + e^x}dx = 1$.

Chapitre 3

SÉRIES ENTIÈRES

Tout au long de ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

3.1 Définition et disque de convergence

Une série entière est une série de fonctions de la variable réelle ou complexe, d'une forme particulière. On désigne par x une variable réelle et par z une variable complexe.

Définition 3.1.1. Soit $\left(a_n\right)_n$ une suite d'éléments de $\mathbb{K}$. Une série entière est une série de fonctions de terme général $u_n(z) = a_n z^n$. La suite $\left(a_n\right)_n$ est appelé coefficients de la série entière.

Tous les résultats concernant les suites et séries de fonctions peuvent être utilisés pour étudier les séries entières, mais la propriété importante consiste en ce que les sommes partielles $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_n z^n$ sont des polynômes qui convergent (éventuellement) vers une fonction non polynômiale.

Exemple 3.1.2. Convergence de quelques séries :

(1). Pour la série $\sum_{n\geq 0} z^n$, on a $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} z^k = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z} \longrightarrow \dfrac{1}{1-z}$ si, et seulement si $|z| < 1$.

(2). Pour la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{z^n}{n!}$, on a $\left|\dfrac{u_{n+1}(z)}{u_n(z)}\right| = \dfrac{|z|}{n+1} \longrightarrow 0$ pour tout z. Donc, cette série converge pour tout z.

Lemme 3.1.3 (Abel)**.** *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. S'il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que la suite $\left(|a_n z_0^n|\right)_n$ soit bornée (indépendamment de n), la série $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ converge*

- *absolument pour tout z tel que $|z| < |z_0|$ et*
- *normalement dans tout disque $\{z\,;\ |z| \leq k\,|z_0|$ où $0 < k < 1\}$.*

Preuve. On a $a_n z^n = a_n z_0^n \left(\dfrac{z}{z_0}\right)^n$. Or il existe une constante α telle que pour tout $n \geq 0$, $|a_n z_0^n| \leq \alpha$ ce qui implique $|a_n z^n| \leq \alpha \left|\dfrac{z}{z_0}\right|^n$.

Si $|z| \leq k\,|z_0|$, on a $|a_n z^n| \leq \alpha k^n$ et on a une convergence normale puisque $\sum_{n\geq 0} k^n$ est convergente. $\square$

Rayon et disque de convergence

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière. Notons $\mathscr{B}$ l'ensemble des nombres réels $r \geq 0$ tels que la suite $\left(|a_n|\, r^n\right)_n$ soit bornée. On a toujours $0 \in \mathscr{B}$.

- Si $\mathscr{B}$ est borné, $\mathscr{B}$ est une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ donc admet une borne supérieure R et pour tout z tel que $|z| < R$, il existe $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que $|z| < |z_0| < R$. Ainsi, d'après le Théorème 3.1.3, la série entière est convergente pour tout z tel que $|z| < R$. Si z_0 est tel que $|z_0| > R$, la suite $\left(|a_n z_0^n|\right)_n$ n'est pas bornée et la série ne peut pas converger.
  Le nombre R est appelé **rayon de convergence** de la série entière.
  L'ensemble $D := \{z \in \mathbb{C} \,;\, |z| < R\}$ est appelé **disque de convergence** de la série entière.
- Si $\mathscr{B}$ n'est pas bornée, pour chaque $z_0 \in \mathbb{C}$, la suite $\left(|a_n z_0^n|\right)_n$ est bornée et la série entière est convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. Dans ce cas, on dit que le rayon de convergence de la série entière est infini et on écrira par convention $R = +\infty$.

Calcul du rayon de convergence

- Par le critère de Cauchy pour les séries de fonctions, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lim\limits_{n\to+\infty} |z| \sqrt[n]{a_n}$ donc la série converge si $|z| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}}$ et diverge si $|z| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}}$. Ainsi, le rayon de convergence R est donné par $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$ à condition que la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_n$ ait une limite.
- De même, par le critère de d'Alembert pour les séries de fonctions, on a :
  $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}z^{n+1}}{a_n z^n}\right| = |z| \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ donc, la série converge si $|z| < \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$ et diverge si $|z| > \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|}$.
  Par conséquent, $R = \lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ à condition que le quotient $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ soit défini et que sa limite existe.

3.2 Opérations sur les séries entières

Théorème 3.2.1. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et de sommes respectives S_a et S_b. Alors*

(1). pour tous scalaires λ et μ, la série entière $\sum \left(\lambda a_n + \mu b_n\right) z^n$ a pour rayon de convergence R tel que $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ et a pour somme $\lambda S_a + \mu S_b$,

(2). la série entière produite $\sum c_n z^n$ où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_n b_{n-k}$, a pour rayon de convergence $R \geq \min\{R_a, R_b\}$ et a pour somme $S_a S_b$.

Preuve. Si $|z| < \min\{R_a, R_b\}$, les série numériques $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ sont absolument convergentes. Donc, il suffit d'appliquer la Proposition 1.4.4 pour (1) et la Proposition 1.4.5 pour (2). □

Théorème 3.2.2 (Substitution d'une série entière dans une autre)**.** *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_a et R_b et de sommes respectives S_a et S_b. On suppose qu'il existe α tel que $0 < \alpha < R_b$ et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} |b_n| \alpha^n < R_b$. Alors il existe une série entière $\sum c_n z^n$ de rayon de convergence $R \geq \alpha$ et de somme $S_a \circ S_b$.*

Application. Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R_a et de somme S. On cherche à substituer la fonction $f : z \longmapsto az + b$ dans cette série.

La fonction f est la somme de la série entière (finie) $az+b$, de rayon de convergence $+\infty$. En appliquant le Théorème 3.2.2, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $|a|\alpha + |b| < R$, la série entière de somme

$$S(az+b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \big(az+b\big)^n = a_0 + a_1\big(az+b\big) + a_2\big(az+b\big)^2 + \cdots$$

a un rayon de convergence $R \geq \alpha$. En particulier, si $|b| < R_a$, la série entière de somme

$$S(z+b) = a_0 + a_1\big(z+b\big) + a_2\big(z+b\big)^2 + \cdots$$

a un rayon de convergence strictement positif. En réordonnant les termes selon les puissances de z, on trouve :

$$S(z+b) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n \quad \text{où} \quad c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{n+k}{n} a_{n+k} b^k \quad \text{pour tout} \quad n \in \mathbb{N}.$$

3.3 Dérivation et intégration des séries entières

Définition 3.3.1. On appelle **série dérivée** de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$, la série entière $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Théorème 3.3.2. *Si $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ a pour rayon de convergence R, sa série dérivée $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence ainsi que $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$.*

Noter que $\sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$ est la série entière dont la dérivée est $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$.

Dans tout ce qui suit et jusqu'à la fin de cette section, nous nous limiterons au cas où la variable est réelle. Soit $\sum a_n x^n$ ($x \in \mathbb{R}$) une série entière de rayon de convergence R. Par les résultats qui précèdent, la série est absolument convergente sur l'intervalle $]-R\,,R[$ et divergente pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| > R$. Les sommes partielles de la série sont les polynômes $S_n : \ x \longmapsto \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et la dérivée de S_n est la fonction $S'_n : \ x \longmapsto \sum_{k=1}^{n} k a_k x^{k-1}$ qui est la $n-$ième somme partielle de la série dérivée.

Théorème 3.3.3. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S. Alors, la fonction $S : \ ]-R\,,R[\longrightarrow \mathbb{K}$ est dérivable et sa dérivée S' est la somme de la série entière dérivée $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$.*

Preuve. Pour tout $r < R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement sur $[-r\,,r]$ (par définition du rayon de convergence) et donc uniformément sur cet intervalle (Théorème 2.2.13). Puisque la série dérivée a le même rayon de convergence (Théorème 3.3.2), elle converge également uniformément sur $[-r\,,r]$. Par le Théorème 2.2.17, il s'ensuit que S est dérivable sur $[-r\,,r]$ et que S' est la somme de la séire dérivée sur $[-r\,,r]$. Ceci étant vrai pour tout $r < R$, le théorème en découle. □

Corollaire 3.3.4. *Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S. Alors, la fonction $S : \ ]-R\,,R[\longrightarrow \mathbb{K}$ est indéfiniment dérivable et sa $k-$ième dérivée $S^{(k)}$ est la somme de la série entière*

$$\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k-1}$$

qui a le même rayon de convergence R.

Preuve. Il suffit de faire un raisonnement par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$. □

Corollaire 3.3.5. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S. Alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$a_n = \frac{S^{(n)}(0)}{n!}$$

Le Corollaire 3.3.5 précédent a pour conséquence importante l'unicité des coefficients d'une série entière.

Corollaire 3.3.6. *Soient* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *et* $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ *deux séries entières d'une variable réelle, de rayons de convergence respectifs* R_a *et* R_b *et de sommes respectives* S_a *et* S_b*. S'il existe* $0 < r < \min\left\{R_a, R_b\right\}$ *tel que* $S_a(x) = S_b(x)$ *pour tout* $x \in \,]-r\,,r[$*, on a* $a_n = b_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $S_a(x) = S_b(x)$ et donc $S_a^{(n)}(x) = S_b^{(n)}(x)$ pour tout $x \in \,]-r\,,r[$. En particulier, on a $S_a^{(n)}(0) = S_b^{(n)}(0)$ et le Corollaire 3.3.5 montre que $a_n = b_n$. □

Théorème 3.3.7. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière d'une variable réelle, de rayon de convergence R et de somme S. Alors pour tout* $x \in \,]-R\,,R[$*, on a*

$$\int_0^x S(t)dt = \int_0^x \Big(\sum_{n\geq 0} a_n t^n\Big)dt = \sum_{n\geq 0}\int_0^x a_n t^n dt = \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

Preuve. De la même façon que pour le Théorème 3.3.3, pour tout $0 < r < R$, la série $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ converge normalement donc uniformément sur $[-r\,,r]$. On peut ainsi intégrer terme à terme sur cet intervalle d'après le Théorème 2.2.19 et par suite sur $]-R\,,R[$. □

3.4 Développement en série entière

3.4.1 Fonctions holomorphes

Définition 3.4.1. Soit f une fonction définie dans un domaine D du plan complexe et à valeurs dans $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe au point $z_0 \in D$ si elle est $\mathbb{C}-$dérivable en ce point c'est-à-dire $\lim_{z\to z_0}\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe. Si la limite existe, on la note $f'(z_0)$. On dit que f est holomorphe dans D si elle est holomorphe en chaque point z_0 de D.

Remarque

L'existence de $f'(z_0)$ peut s'écrire :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \varepsilon(z-z_0)\cdot|z-z_0|$$

où ε est une fonction cotinue tendant vers 0 quand z tend vers z_0.
Si on pose $z = x+iy$, f est $\mathbb{C}-$dérivable en z_0 veut dire f est diférentiable au point $\big(x_0\,,y_0\big)$ et cela s'écrit :

$$f\big(x,y\big) = f\big(x_0\,,y_0\big) + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\big(x_0\,,y_0\big)\big(x-x_0\big) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(x_0\,,y_0\big)\cdot\big(y-y_0\big) + \varepsilon\big(x-x_0\,,y-y_0\big)\cdot\Big\|\big((x-x_0)\,,(y-y_0)\big)\Big\|.$$

Alors, f holomorphe équivaut à $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Si $f\big(x,y\big) = P\big(x,y\big) + iQ\big(x,y\big)$, avec P et Q réelle, f holomorphe équivaut à

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{(Condition de Cauchy).}$$

Théorème 3.4.2. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière de rayn de convergence* R*. Alors, sa somme* f *est une fonction holomorphe dans le disque de convergence et on a* $f'(z) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$.

Preuve. Soient $z_0 \neq z$ tels que $|z| < R$ et $|z_0| < R$. On a

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{z^n - z_0^n}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(z)$$

avec $v_n(z) = a_n\Big(z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \cdots + z^{n-k}z_0^{k-1} + \cdots z_0^{n-1}\Big)$ pour $z \neq z_0$ et $v_n(z_0) = n a_n z_0$.
Soit $0 < r < R$ tel que $|z| \leq r$ et $|z_0| \leq r$. On a

$$|v_n(z)| \leq |z_n| \sum_{k=1}^{n} |z|^{n-k} |z_0|^{k-1} \leq |a_n| \sum_{k=1}^{n} r^{n-k} r^{k-1} = n\,|a_n|\, r^{n-1} = \omega_n.$$

La série de terme général ω_n est convergente donc la série entière $\sum_{n\geq 1} v_n(z)$ converge normalement dans le disque $D\big(0\,,\,r\big)$, sa somme $\varphi(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(z)$ est donc une fonction continue dans ce disque. Ainsi, $\lim_{z\to z_0} \varphi(z) = \varphi(z_0)$ existe, ce qui s'écrit

$$\lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n(z) = f'(z_0).$$

□

Corollaire 3.4.3. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ *une série entière de la variable réelle, de rayn de convergence* R*. Alors*

(1). Sa somme f *est une fonction dérivable sur l'intervalle* $]-R\,,R[$ *avec* $f'(x) = \sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$,

(2). Puisque f' *est la somme de la série entière dérivée, on en déduit que* f' *est dérivable et par récurrence,* f *est indéfiniment dérivable. On a alors :*

$$f^{(p)}(x) = \sum_{n\geq p} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p} = \sum_{n\geq p} \frac{n!}{(n-p)!} a_n z^{n-p}.$$

3.4.2 Coefficient d'une série entière

Théorème 3.4.4. *Soit* $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ *une série entière convergente de somme* f*. Alors les coefficients* a_p *de la série entière peuvent s'exprimer en fonction des dérivées* $p-$*ièmes de* f *à l'origine :*

$$f^{(p)}(z) = \sum_{n=p}^{+\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)a_n z^{n-p}.$$

Donc, $f^{(p)}(0) = p! a_p$ *c'est-à-dire* $a_p = \dfrac{1}{p!} f^{(p)}(0)$ *et* $f(z) = \sum_{n\geq 0} \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0) z^n$.

3.4.3 Fonctions analytiques

Définition 3.4.5. Soit f une fonction définie dans un voisinage V d'un point z_0 de $\mathbb{C}$ et à valeurs complexes. On dit que f est développable en série entière en z_0 ou que f analytique au point z_0, s'il existe une suite $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$ soit convergente pour tout $z \in V$ et ait pour somme $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z-z_0)^n$.
On définit de façon analogue la notion de fonction analytique réelle pour une fonction f réelle définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Remarques

(1). Une fonction analytique complexe est indéfiniment dérivable puisque c'est la somme d'une série entière donc holomorphe, et réciproquement on peut montrer qu'une fonction holomorphe est analytique.

(2). **Attention,** Une fonction analytique réelle est indéfiniment dérivable **mais** une fonction réelle qui est de classe $\mathscr{C}^\infty$ n'est pas nécessairement analytique c'est-à-dire il existe des fonctions *réelles* indéfiniment dérivables dont la série de MacLaurin converge mais la somme n'est pas f.

Les résultats suivants permettent de résoudre ce problème :

Théorème 3.4.6. *Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la série de MacLaurin d'ordre n est*

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \cdots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \quad avec \quad 0 < \theta < 1.$$

Alors $\sum_{n\geq 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ converge et a pour somme $f(x)$ si, et seulement si $\lim_{n\to+\infty} \frac{x^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) = 0$ pour tout x dans un voisinage de 0.

Théorème 3.4.7. *Soit f une fonction indéfiniment dérivable sur $[-r\,,\,r]$. On suppose que pour tout $x \in\ ]-r\,,\,r[$ et pour tout n, il existe une constante M telle que $\left|f^{(n)}(x)\right| \leq M$. Alors f est développable en série entière sur $]-r\,,\,r[$ et on a pour tout $x \in\ ]-r\,,\,r[\ :\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$.*

Preuve. Pour $|x| \leq r$, on a

$$\left|f(x) - \sum_{p=0}^{n} \frac{x^p}{p!}f^{(p)}(0)\right| = \left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)\right| \leq \frac{M \cdot r^{n+1}}{(n+1)!} = \alpha_n \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n} = r \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Ainsi, la série numérique $\sum_{n\geq 0} \alpha_n$ converge donc $\lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$. □

3.5 Séries entières des fonctions usuelles

En utilisant la formule de MacLaurin, on a des développements en série entière que l'on connaît :

- $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ pour tout $|z| < 1$,
- $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$,
- $\left(1+z\right)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+2)(\alpha-n+1)}{n!}z^n$ pour tout $|z| < 1$,

Par combinaison linéaire des ces deux séries

- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{(2n+1)}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$,
- $\cosh z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$,

- $\sinh z = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$,

Par intégration, on obtient

- $\ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ pour tout $|x| < 1$,
- $\ln(1-z) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}$ pour tout $|z| < 1$,
- $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ pour tout $|x| < 1$,
- $\ln(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}$ pour tout $|z| < 1$,
- $\dfrac{1}{1+x^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{(2n)}$ pour tout $|x| < 1$,
- $\arctan x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$ pour tout $|x| < 1$.

3.6 Exercices

Exercice 3.6.1. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n^3+1} z^n, \quad \sum_{n\geq 0} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) z^n, \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 0} \frac{2^n+n^2}{3^n-n^2} z^n.$$

Exercice 3.6.2. Calculer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes (z : variable complexe et x : variable réelle) : $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^2 x^n$, $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(-1\right)^n \left(n^2+1\right) x^{2n}$, et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!} z^n$.

Exercice 3.6.3. Existence et calcul de $S = \displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{\left(n-1\right) n 5^n}$.

Exercice 3.6.4. Développer f en série entière au voisinage de 0 dans chacun des cas suivants :

$$f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}, \quad f(x) = \frac{1}{x^4-3x^2+2} \quad \text{et} \quad f(x) = \left(1-x\right)\ln\left(1-x\right).$$

Exercice 3.6.5. On veut développer en série entière la fonction $f\colon x \longmapsto \ln\sqrt{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}$ ou $\alpha \in \left]0\,,\pi\right[$.

(1). Justifier et établir que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{x-e^{i\alpha}} + \dfrac{1}{x-e^{-i\alpha}}\right)$.

(2). Développer f' en série entière et préciser le rayon de convergence.

(3). En déduire le développement de f en série entière.

3.7 Corrigés des exercices

Exercice 3.6.1. Calcul de rayon de convergence.

(1). $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+1}{n^3+1} z^n$. Notons $a_n = \dfrac{n^2+1}{n^3+1}$. On a

$$a_n = \frac{n^2+1}{n^3+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n}{n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, on a $R = 1$.

(2). $\sum\limits_{n\geq 0}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)z^n$. Notons $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$. On a

$$a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt{n}}\quad\text{et}\quad\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{n\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}1.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, on a $R=1$.

(3). $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{2^n+n^2}{3^n-n^2}z^n$. Notons $a_n=\frac{2^n+n^2}{3^n-n^2}$. On a

$$a_n=\frac{2^n+n^2}{3^n-n^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{2^n}{3^n}\quad\text{et}\quad\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{3^{n+1}}{2^{n+1}}\cdot\frac{2^n}{3^n}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{3}{2}.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, on a $R=\frac{3}{2}$.

Exercice 3.6.2. Rayon de convergence et la somme

(1). $\sum\limits_{n\geq 0}n^2x^n$. Notons $a_n=n^2$. La règle de d'Alembert donne $R=1$. Pour $x\in\,]-1\,,\,1[$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}x^n=\frac{1}{1-x}.$$

D'où, en dérivant, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{\left(1-x\right)^2}\quad\text{pour tout}\quad x\in\,]-1\,,\,1\,[\,.$$

En multipliant par x, on a

$$\sum_{n=1}^{+\infty}nx^{n}=\frac{x}{\left(1-x\right)^2}\quad\text{pour tout}\quad x\in\,]-1\,,\,1\,[\,.$$

Puis en dérivant, on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n^2x^{n-1}=\frac{1+x}{\left(1-x\right)^3}$ pour tout $x\in\,]-1\,,\,1\,[$.
Puisque le terme d'indice 0 est nul, on obtient, en multipliant par x,

$$S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}n^2x^n=\frac{x\left(1+x\right)}{\left(1-x\right)^3}\quad\text{pour tout}\quad x\in\,]-1\,,\,1\,[\,.$$

(2). $\sum\limits_{n\geq 0}\left(-1\right)^n\left(n^2+1\right)x^{2n}$. Soit $x\in\mathbb{R}^*$. Notons $a_n=\left(-1\right)^n\left(n^2+1\right)$. Par la règle de d'Alembert, on a $R=1$.
Pour tout $x\in\,]-1\,,\,1\,[$, on a

$$\begin{aligned}S(x)&=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-1\right)^n\left(n^2+1\right)x^{2n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(n^2+1\right)\left(-x^2\right)^n\\&=\sum_{n=0}n^2\left(-x^2\right)^n+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(-x^2\right)^n=\frac{-x^2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x\right)^3}+\frac{1}{1+x^2}.\end{aligned}$$

(3). $\sum\limits_{n\geq 0}\frac{n+1}{n!}z^n$. Par la règle de d'Alembert, on montre que $R=+\infty$ et pour $z\in\mathbb{C}$, on a

$$S(x)=\sum_{n=1}\frac{n+1}{n!}z^n=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n!}=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{(n-1)!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^{n+1}}{n!}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=z\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}.$$

Finalement, on obtient $S(x)=z\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}+\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\left(z+1\right)\times\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\left(1+z\right)e^z$.

Exercice 3.6.3. Existence et calcul de $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n}$. Pour $n \geq 2$, on a

$$u_n = \frac{2^n + n3^n}{(n-1)n5^n} = \frac{1}{n(n-1)}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{1}{n-1}\left(\frac{3}{5}\right)^n.$$

Considérons les séries entières $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n(n-1)}$ et $\sum_{n\geq 2} \frac{x^n}{n-1}$. Par la règle de d'Alembert, ces séries entières ont pour rayon de convergence $R = 1$ et pour $x \in \,]-1\,,\,1\,[$, on a

$$A(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n-1} = x\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{n-1} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = x\big(-\ln(1-x)\big) = -x\ln(1-x).$$

et

$$B(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)} = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}\right)x^n = -x\ln(1-x) - (-\ln(1-x) - x) = (1-x)\ln(1-x) + x.$$

Puisque $\frac{2}{5}$ et $\frac{3}{5}$ appartiennent à $]-1\,,\,1\,[$, on a $S = \sum_{n=2}^{+\infty} u_n = B\left(\frac{2}{5}\right) + A\left(\frac{3}{5}\right)$.

Exercice 3.6.4. Développement en série entière de f au voisinage de 0.

(1). $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ donc au moins sur $]-1\,,\,1\,[$. Pour $x \in \,]-1\,,\,1\,[$,

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{x+2}{x^2-1} = x + \frac{x+2}{(x-1)(x+1)} \\ &= x + \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1} = x - \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{1-x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+x} \\ &= x - \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} x^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n = x + \sum_{n=0}^{+\infty}\left[-\frac{3}{2} - \frac{(-1)^n}{2}\right]x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n. \end{aligned}$$

En notant $a_n = \begin{cases} -\frac{3}{2} - \frac{(-1)^n}{2} & \text{si} \quad n \neq 1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 1. \end{cases}$ ou encore $a_n = \begin{cases} -\frac{3}{2} - \frac{(-1)^n}{2} & \text{si} \quad n = 2p+1 \text{ avec } p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ -2 & \text{si} \quad n = 2p \text{ avec } p \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 1. \end{cases}$

Déterminons le rayon de convergence de cette série entière.

- D'une part, puisque la suite $(a_n)_n$ ne converge pas vers 0, on a $R \leq 1$,
- D'autre part, puisque la suite $(a_n)_n$ est bornée, on a $R \geq 1$.

On conclut que $R = 1$.

(2). $f(x) = \frac{1}{x^4 - 3x^2 + 2}$. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{2}, \pm 1\}$ donc elle est définie sur $]-1\,,\,1\,[$. Pour $x \in \,]-1\,,\,1\,[$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{x^2-1} + \frac{1}{x^2-2} = \frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x^2}{2}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)x^n. \end{aligned}$$

Puisque $1 - \frac{1}{2^{n+1}} \underset{+\infty}{\sim} 1$ et que la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ a pour rayon de convergence $R = 1$, on obtient $R = 1$.

(3). $f(x)=\big(1-x\big)\ln\big(1-x\big)$. La fonction f est définie sur $]-\infty\,,1\,[$ donc elle est définie sur $]-1\,,1\,[$.
Pour $x\in\,]-1\,,1\,[$, on a

$$f(x)=\big(1-x\big)\ln\big(1-x\big)=-\big(1-x\big)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n+1}}{n}=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n}+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{x^n}{n-1}$$
$$=-x+\sum_{n=2}^{+\infty}\left[-\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}\right]x^n=-x+\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\big(n-1\big)}x^n$$

En notant $a_n=\begin{cases}0 & \text{si}\quad n=0\\ -1 & \text{si}\quad n=1\\ \frac{1}{n\left(n-1\right)} & \text{si}\quad n\geq 21.\end{cases}$, par la règle de d'Alembert, on obtient $R=1$.

Exercice 3.6.5. On veut développer en série entière la fonction $f:\,x\longmapsto\ln\sqrt{x^2-2x\cos\alpha+1}$ ou $\alpha\in\,]\,0\,,\pi\,[$.

(1). On a $x^2-2x\cos\alpha+1=\big(x-\cos\alpha\big)^2+\sin^2\alpha$. Puisque $\sin^2\alpha\neq 0$, on déduit que $x^2-2x\cos\alpha+1>0$ et f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=\dfrac{x-\cos\alpha}{x^2-2x\cos\alpha+1}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{x-e^{i\alpha}}+\dfrac{1}{x-e^{-i\alpha}}\right]$.

(2). Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $f(x)=\Re e\left[\dfrac{1}{x-e^{-i\alpha}}\right]=-\Re e\left[\dfrac{e^{i\alpha}}{x-e^{i\alpha}}\right]$. Si $x\in\,]-1\,,1\,[$, on a $|e^{ix}|<1$ et donc on peut utiliser la série géométrique pour obtenir

$$\frac{e^{i\alpha}}{x-e^{i\alpha}}=e^{i\alpha}\sum_{n=0}^{+\infty}e^{in\alpha}x^n=\sum_{n=0}^{+\infty}e^{i(n+1)\alpha}x^n.$$

En prenant la partie réelle de cette expression, on obtient $f'(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\big((n+1)\alpha\big)x^n$ et cette série entière a pour rayon de convergence $R\geq 1$. Mais en utilisant la relation

$$\cos\big(2(n+1)\alpha\big)=2\cos^2\big((n+1)\alpha\big)-1,$$

on déduit que la suite $\Big(\cos\big((n+1)\alpha\big)\Big)_n$ ne peut pas converger vers 0.
Donc la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty}\cos\big((n+1)\alpha\big)x^n$ a pour rayon de convergence $R=1$.

(3). En prenant la primitive qui vaut 0 en 0, on déduit que si $x\in\,]-1\,,1\,[$, on a $f(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\cos n\alpha}{n}x^n$ et la série entière a pour rayon de convergence $R=1$.

Chapitre 4

INTÉGRALES DÉPENDANT D'UN PARAMÈTRE

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$, A une partie de $\mathbb{R}$ et $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application.

Si pour tout $x \in A$, l'application $f\big(x\,,\,\cdot\big) : t \in I \longmapsto f\big(x\,,\,t\big) \in \mathbb{K}$ est continue par morceaux et intégrable sur I, on peut considérer la fonction $F : I \longrightarrow \mathbb{K}$ définie par

$$F(x) = \int_I f\big(x\,,\,t\big)dt$$

Nous intégrons par rapport à t sur I, mais cette fonction dépend d'un paramètre x. En intégrant, nous obtenons donc une nouvelle fonction de la variable x ; ici notée par F. En général, on ne sait pas calculer explicitement l'intégrale, et donc la seule expression qu'on puisse avoir de F sera sa forme intégrale. Nous essayons quand même d'avoir des informations sur la fonction F concernant sa continuité, sa dérivabilité et même son intégrabilité quand c'est possible. C'est le but de ce chapitre. Pour aboutir à notre objectif, nous avons besoin quelques notions éssentielles.

4.1 Rappels sur les intégrales généralisée

Dans cette section, nous considérons un intervalle semi-ouvert $[\,a\,,b\,[$ où $b \in \mathbb{R} \cup \big\{+\infty\big\}$ et $f : [\,a\,,b\,[\longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On notera que les résultats de cette section présentent de nombreuses analogie avec ceux du chapitre 1 sur les séries numériques. Cela provient du fait que ce sont deux types de sommation, l'une discrète pour les séries numériques et l'autre continue pour les intégrales généralisées. En revanche, certain résultats peuvent être spécifique au type de sommation envisagée.

Définition 4.1.1 (Fonction localement intégrable)**.** On dit $f : [\,a\,,b\,[\longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est localement intégrable si elle est intégrable, au sens de Riemann, sur tout sous-intervalle fermé $[a\,,c] \subset [\,a\,,b\,[$.

Définition 4.1.2. Soit $f : [\,a\,,b\,[\longrightarrow \mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ une fonction localement intégrable.

(1) . On dit que f est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ si $\lim\limits_{x\to b} \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ existe.

(2) . Si f est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$, on appelera **intégrale généralisée de f** sur $[\,a\,,b\,[$ et on notera $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ la limite ci-dessus, c'est-à-dire
$$\int_a^b f(t)dt = \lim_{x\to b}\int_a^x f(t)dt.$$

Remarque 4.1.3. Lorsqu'une fonction localement intégrable f est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ au sens des intégrales généralisée définies ci-dessus, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est convergente.

La proposition suivante est une conséquence immédiate des propriétés de l'intégrale de Riemann.

Proposition 4.1.4. *Soient f et g deux fonctions définies et intégrables sur $[\,a\,,b\,[$. Alors*

(1). Pour tous scalaires $\lambda\ \mu \in \mathbb{K}$, la fonction $\lambda f \mu g$ est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ et on a

$$\int_a^b \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)dt = \lambda\int_a^b f(t)dt + \mu\int_a^b g(t)dt.$$

(2). Si $|f|$ est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$, on a :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

(3). Si $f(t)\leq g(t)$ pour tout $t\in[\,a\,,b\,[$, on a

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

(4). Pour tout $c\in\,]\,a\,,b\,[$, on a

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt.$$

Comme pour les suites ou les séries numériques, on a un théorème de Cauchy pour les intégrales généralisées qui donne un moyen de décider si une fonction f définie sur $[\,a\,,b\,[$ y est intégrable sans connaître la valeur de son intégrale généralisée sur cet intervalle.

Notation. On considère un intervalle semi-ouvert $[\,a\,,b\,[$ où $b\in\mathbb{R}\cup\big\{+\infty\big\}$. On notera $V(b)$ un voisinage de b dans $[\,a\,,b\,[$, c'est-à-dire $V(b)$ est un intervalle de type $[\,A\,,+\infty\,[$ si $b=+\infty$ et $V(b)$ est un intervalle de type $[\,b-\eta\,,b\,[$ avec $0<\eta\leq b-a$, si b est fini.

Théorème 4.1.5 (Critère de Cauchy)**.** *Soit F une fonction définie sur un intervalle semi-ouvert $[\,a\,,b\,[$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors $\lim\limits_{x\to b}F(x)$ existe si, et seulement si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage $V(b)$ du point b tel que :*

$$\forall x,\ x'\in V(b),\quad \text{on ait}\quad \big|F(x)-F(x')\big|\leq\varepsilon.$$

Théorème 4.1.6. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[\,a\,,b\,[$. Alors f y est intégrable si pour tout $\varepsilon>0$, il existe un voisinage $V(b)$ de b tel que pour tous $x,x'\in V(b)$, on ait $\left|\int_x^{x'} f(t)dt\right|\leq\varepsilon$.*

4.1.1 Intégrales généralisées des fonctions positives

Comme dans l'étude des série numériques à termes positifs, on a dans le cas des fonctions positives, des théorèmes de comparaison.

Théorème 4.1.7. *Soient f et g des fonctions définies et localement intégrables sur $[\,a\,,b\,[$. On suppose que pour tout $t\in[\,a\,,b\,[$ on ait $0\leq f(t)\leq g(t)$. Alors, si g est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$, f l'est aussi et si f n'est pas intégrable sur $[\,a\,,b\,[$, g ne l'est pas non plus.*

Théorème 4.1.8. *Soient f et g des fonctions définies, localement intégrables sur $[\,a\,,b\,[$ et telles que pour tout $t\in[\,a\,,b\,[$, on ait $0\leq f(t)$ et $0\leq g(t)$. Alors, si f et g sont équivalentes au voisinage d b, f est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ si, et seulement si g est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$.*

Pour appliquer ces théorèmes de comparaison, nous donnons dans la proposition suivante quelques de fonctions classiques qui constitueront une échelle de comparaison.

Proposition 4.1.9. *Soit $\alpha > 0$ et f la fonction définie sur $]\,0\,,+\infty\,[$ par $f(t) = \dfrac{1}{t^{\alpha}}$. Alors*

(1). f est intégrable sur $[\,1\,,+\infty\,[$ si, et seulement si $\alpha > 1$ et

(2). f est intégrable sur $]\,0\,,1\,]$ si, et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème 4.1.10. *Soit f une fonction définie, localement intégrable,* ***positive*** *et* ***décroissante*** *sur $[\,a\,,+\infty\,[$. Alors f est intégrable sur $[\,a\,,+\infty\,[$ si, et seulement si la série numérique à termes positifs, de terme général $u_a = f(n)$ est convrgente.*

4.1.2 Intégrales généralisées des fonctions ne gardant pas un signe constant

Nous allons maintenant étudier une notion qui, dans certains cas, permet de ramener l'étude de l'intégrale d'une fonction de signe quelconque à celle d'une fonction positive.

Définition 4.1.11. Soit f une fonction localement intégrable sur $[\,a\,,b\,[$. On dit que f est absolument intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ si $|f|$ est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$ c'est-à-dire $\lim\limits_{x\to b}\displaystyle\int_a^x |\boldsymbol{f(t)}|\,\boldsymbol{dt}$ existe.

Proposition 4.1.12. *Soit f une fonction localement intégrable sur $[\,a\,,b\,[$. Si f est absolument intégrable sur $[\,a\,,b\,[$, elle y est intégrable et on a*

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Proposition 4.1.13. *Soit f une fonction continue sur un intervalle semi-ouvert $[\,a\,,+\infty\,[$, avec $a > 0$. S'il existe $\alpha > 1$ tel que $\lim\limits_{t\to+\infty} t^{\alpha}\,|f(t)| = 0$, f est intégrable sur $[\,a\,,+\infty\,[$.*

Comme son analogue relatif aux séries numériques, le théorème suivant s'appelle le théorème d'Abel :

Théorème 4.1.14 (Théorème d'Abel)**.** *Soit f une fonction définie, continue, positive, décroissante et telle que $\lim\limits_{x\to b} f(x) = 0$. Soit g une fonction localement intégrable sur $[\,a\,,b\,[$. S'il existe $M > 0$ tel que pour tout $t \in [\,a\,,b\,[$, on ait*

$$\left|\int_a^x g(t)dt\right| \leq M,$$

la fonction produit fg est intégrable sur $[\,a\,,b\,[$.

Remarque 4.1.15. Ce théorème s'applique en particulier lorsque la fonction g est l'une des fonctions $e^{i\lambda t}$, $\sin\lambda t$, $\cos\lambda t$, avec $\lambda \in\,]\,0\,,+\infty\,[$ fixé et $b = +\infty$.

4.2 Hypothèse de domination et théorème de convergence

Définition 4.2.1. Soit $f\colon A\times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une appilaction. On dit que

(1). l'application f vérifie l'**hypothèse de domination sur** $A\times I$ s'il existe une fonction $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable tel que pour tout $\big(x\,,t\big) \in A\times I$, on ait $\Big|f\big(x\,,t\big)\Big| \leq \varphi(t)$,

(2). l'application f vérifie l'**hypothèse de domination locale sur** $A\times I$ si pour toute partie compacte K contenue dans A, il existe une fonction $\varphi_K\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable tel que pour tout $\big(x\,,t\big) \in A\times I$, on ait $\Big|f\big(x\,,t\big)\Big| \leq \varphi(t)$.

Remarque 4.2.2. Soit $f\colon A\times I\longrightarrow\mathbb{K}$ une application.

(1). si I est un segment et s'il existe une $M\geq 0$ vérifiant : pour tout $\big(x\,,t\big)\in A\times I$, on ait $\Big|f\big(x\,,t\big)\Big|\leq M$, la fonction f vérifie l'hypothèse de domination puisque l'application constante $t\in I\longmapsto M$ est intégrable sur le segment I.

(2). si f vérifie l'hypothèse de domination sur $A\times I$, elle y vérifie l'hypothèse de domination locale,

(3). si I est un segment et si $f\colon A\times I\longrightarrow\mathbb{K}$ est continue (en tant que fonction de deux variables), f vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A\times I$. En effet, pour tout compact $K\subset A$, f est continue sur $K\times I$ donc bornée sur $K\times I$ et toute fonction constante sur I est intégrable sur le segment I.

Définition 4.2.3. Soit $f\colon A\times I\longrightarrow\mathbb{K}$ une application. On dit que

(1). f est continue par rapport à x si pour tout $t\in I$, la fonction $f\big(\cdot\,,t\big)\colon x\in A\longmapsto f\big(x\,,t\big)\in\mathbb{K}$ est continue,

(2). f est continue par morceaux par rapport t si pour tout $x\in A$, l'application $f\big(x\,,\cdot\big)\colon t\in I\longmapsto f\big(x\,,t\big)\in\mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I.

Proposition 4.2.4. *Soient f et φ deux fonctions continues par morceaux sur un intervalle I telles que pour tout $t\in I$, on ait $|f(t)|\leq\varphi(t)$. Alors, si φ est intégrable sur I, la fonction f est intégrable sur I.*

Théorème 4.2.5. *Soit $\big(f_n\big)_n$ une suite de fonctions intégrables sur un intervalle $[a\,,b]$. On suppose que :*

(1). la suite $\big(f_n\big)_n$ converge simplement sur $[a\,,b]$ vers une fonction intégrable f et

(2). il existe $M\in\mathbb{R}$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout $t\in[a\,,b]$, on a $|f_n(t)|\leq M$.

Alors

$$\int_a^b f(t)dt=\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(t)dt.$$

Toute suite de fonctions $\big(f_n\big)_n$ vérifiant la condition (2) du Théorème4.2.5 est dite *uniformément bornée*.

4.3 Continuité

Théorème 4.3.1. *Soit $f\colon A\times I\longrightarrow\mathbb{K}$ une application. On suppose que*

(1). f est continue par rapport à la première variable c'est-à-dire par rapport à x,

(2). f est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable c'est-à-dire par rapport à t,

(3). f vérifie l'hypothèse de domination sur $A\times I$ c'est-à-dire il existe une fonction $\varphi\colon I\longrightarrow\mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable vérifiant : pour tout $\big(x\,,t\big)\in A\times I$, on ait $\Big|f\big(x\,,t\big)\Big|\leq\varphi(t)$.

Alors

(1). Pour tout $x\in A$, la fonction $f\big(x\,,\cdot\big)\colon I\longrightarrow\mathbb{K}$ est intégrable,

(2). La fonction $F\colon x\in A\longmapsto F(x)=\displaystyle\int_I f\big(x\,,t\big)dt$ est continue sur A.

Preuve. D'abord, d'après la Proposition 4.2.4, pour tout $x\in A$, la fonction $f\big(x\,,\cdot\big)$ est intégrable sur I.

Soit $x\in A$ fixé et soit $\big(x_n\big)_n$ une suite d'éléments de A convergeant vers x. Notons, pour tout $n\in\mathbb{N}$: $f_n\colon t\in I\longmapsto f\big(x_n\,,t\big)$. On a

- Pour tout $n\in\mathbb{N}$, la fonction f_n est continue par morceaux sur I,

- La suite de fonctions $\left(f_n\right)_n$ converge simplement sur I vers la fonction $f\left(x,\cdot\right)$ car pour tout $t \in I$, $f_n(t) = f\left(x_n, t\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f\left(x,t\right)$, du fait que f est continue par rapport à x.
- L'application $f\left(x,\cdot\right)$ est continue par morceaux sur I.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in I$, on a $\left|f\left(x_n, t\right)\right| \leq \varphi(t)$ et φ est continue par morceux, positive et intégrable sur I. D'après le théorème de convergence dominée (Théorème 2.1.18), il en résulte que pour tout $x \in A$, la fonction $f\left(x,\cdot\right)$ est intégrable sur I et que

$$\int_I f_n(t)dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f\left(x,\cdot\right)(t)dt = \int_I f\left(x,t\right)dt = F(x) \quad \text{c'est-à-dire} \quad F\left(x_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$$

Ainsi,pour toute suite $\left(x_n\right)_n$ dans A tel que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x \in A$, la suite $\left(F(x_n)\right)_n$ converge vers $F(x)$.
D'après la caractérisation séquentielle de la continuité, on conclut que F est continue en x et comme x est arbitraire dans A, F est continue sur A. □

En fait, on peut étendre le Théorème 4.3.1 au cas où on n'a que l'hypothèse de domination locale.

Théorème 4.3.2. *Soit $f\colon A\times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On suppose que*

(1). f est continue par rapport à la première variable c'est-à-dire par rapport à x,

(2). f est continue par morceaux par rapport à la deuxième variable c'est-à-dire par rapport à t,

(3). f vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A\times I$ c'est-à-dire pour tout compact $K \subset A$ il existe une fonction $\varphi_K\colon K \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable vérifiant : pour tout $\left(x,t\right) \in K\times I$, on ait $\left|f\left(x,t\right)\right| \leq \varphi_K(t)$.

Alors

(1). Pour tout $x \in A$, la fonction $f\left(x,\cdot\right)\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$ est intégrable,

(2). La fonction $F\colon x \in A \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_I f\left(x,t\right)dt$ est continue sur A.

Preuve. Soient $x \in A$ et $\left(x_n\right)_n \subset A$ telle que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$. Rappelons que d'après un théorème de la topologie (cf semestre 3 chap. espaces métriques compacts), $K = \left\{x_n\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{x\right\}$ est une partie compacte de A.
En appliquant le Théorème 4.3.1 à $f_{|K\times I}$, pour tout $x \in K$, la fonction $f\left(x,\cdot\right)$ est intégrable sur I et la fonction $x \in K \longmapsto \displaystyle\int_I f\left(x,t\right)dt$ est continue sur K. Il en résulte que pour tout $x \in A$, la fonction $f\left(x,\cdot\right)$ est intégrable sur I et que $F\left(x_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} F(x)$, ce qui montre que F est continue en x et finalement F est continue sur A. □

4.4 Dérivabilité

Dans ce paragraphe, A désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Théorème 4.4.1. *Soit $f\colon A\times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On suppose que*

(1). Pour tout $x \in A$, la fonction $f\left(x,\cdot\right)\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$ est intégrable,

(2). $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $A\times I$, est continue par rapport à x et est continue par morceaux par rapport à t,

(3). $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $A\times I$ c'est-à-dire il existe une fonction $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable vérifiant : pour tout $\left(x,t\right) \in A\times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(x,t\right)\right| \leq \varphi(t)$.

Alors

(1). Pour tout $x \in A$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,\,\cdot\big)\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$ est intégrable et

(2). La fonction $F\colon x \in A \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_I f\big(x\,,\,t\big)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et pour tout $x \in A$, on a

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,\,t\big)dt.$$

Preuve. D'abord, d'après la Proposition 4.2.4, pour tout $x \in A$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,\,\cdot\big)$ est intégrable sur I.
Notons $G\colon A \longrightarrow \mathbb{K}$, $x \longmapsto G(x) = \displaystyle\int_I \frac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,\,t\big)dt$.
Soit $\alpha \in A$. Notons $A_\alpha = \big\{h \in \mathbb{R}\ ;\ \alpha + h \in A\big\}$ et $T\colon A_\alpha \times I \longrightarrow \mathbb{K}$, l'application définie par

$$\forall\big(h\,,\,t\big) \in A_\alpha \times I, \quad T\big(h\,,\,t\big) = \begin{cases} \dfrac{1}{h}\Big[f\big(\alpha+h\,,\,t\big) - f\big(\alpha\,,\,t\big)\Big] & \text{si} \quad h \neq 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha\,,\,t\big) & \text{si} \quad h = 0. \end{cases}$$

Comme pour tout $t \in I$, la fonction $f\big(\cdot\,,\,t\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A, on a pour tout $\big(h\,,\,t\big) \in A_\alpha \times I$, en utilisant le changement de variable $y = \dfrac{x-\alpha}{h}$:

$$f\big(\alpha+h\,,\,t\big) - f\big(\alpha\,,\,t\big) = \int_\alpha^{\alpha+h} \frac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,\,t\big)dx = h\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha+hy\,,\,t\big)dy.$$

Il en résulte que

$$\forall\big(h\,,\,t\big) \in A_\alpha \times I, \quad T\big(h\,,\,t\big) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha+hy\,,\,t\big)dy.$$

- Soit $t \in I$ fixé teporairement. L'application $\big(h\,,\,y\big) \in A_\alpha \times [0\,,\,1] \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha+hy\,,\,t\big)$ est continue par rapport à h et est continue par morceaux par rapport à y car $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est supposé continue. De plus, cette application vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A_\alpha \times I$ car pour tout compact $K \subset A_\alpha$, la restriction de $\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(\cdot\,,\,t\big)$ à K est continue sur K donc bornée et d'après le Théorème 4.3.2, l'application

$$T\big(\cdot\,,\,t\big)\colon A_\alpha \longrightarrow \mathbb{K},\ h \longmapsto T\big(h\,,\,t\big) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha+hy\,,\,t\big)dy$$

  est continue sur A_α.
- D'autre part, par la définition de T, pour tout $h \in A_\alpha$, $T\big(\cdot\,,\,t\big)$ est continue par morceaux sur I.
- Par hypothèse, il existe $\varphi\colon I \longrightarrow \mathbb{K}$ positive, continue par morceaux et intégrable sur I tel que

$$\forall\big(x\,,\,t\big) \in A \times I, \quad \text{on ait} \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,\,t\big)\right| \leq \varphi(t).$$

  On a donc, pour tout $\big(h\,,\,y\big) \in A_\alpha \times I$:

$$\Big|T\big(h\,,\,t\big)\Big| = \left|\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha+hy\,,\,t\big)dy\right| \leq \int_0^1 \left|\frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha+hy\,,\,t\big)\right|dy \leq \int_0^1 \varphi(t)dy = \varphi(t).$$

Ceci montre que T vérifie l'hypothèse de domination sur $A_\alpha \times I$ et d'après le Théorème 4.3.1, l'application $\tau : A_\alpha \longrightarrow \mathbb{K}$, $h \longmapsto \tau(h) = \displaystyle\int_I T\big(h\,,t\big)dt$ est continue sur A_α. En particulier, $\tau(f) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \tau(0)$.
Mais pour tout $h \in A_\alpha \setminus \big\{0\big\}$, on a

$$\tau(h) = \int_I \frac{1}{h}\Big[f\big(\alpha+h\,,t\big) - f\big(\alpha\,,t\big)\Big]dt = \frac{1}{h}\Big[F\big(\alpha+h\big) - F\big(\alpha\big)\Big]$$

et

$$\frac{1}{h}\Big[F\big(\alpha+h\big) - F\big(\alpha\big)\Big] \underset{h \to 0}{\longrightarrow} \int_I \frac{\partial f}{\partial x}\big(\alpha\,,t\big)dt = G\big(\alpha\big)$$

c'est-à-dire F est dérivable en α et $F'\big(\alpha\big) = G\big(\alpha\big)$.
Enfin, d'après le Théorème 4.3.1, puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est continue par rapport à x, continue par morceaux par rapport à t et vérifie l'hypothèse de domination sur $A \times I$, G est continue sur A.
Finalement, F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et $F' = G$.

□

Corollaire 4.4.2. *Soient $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application et $n \in \mathbb{N} \setminus \big\{0\big\}$. On suppose que*

(1). Pour tout $x \in A$, la fonction $f\big(x\,,\cdot\big) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est intégrable,

(2). f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ existent sur $A \times I$, sont continues par rapport à x et sont continues par morceaux par rapport à t,

(3). $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ vérifie l'hypothèse de domination sur $A \times I$

Alors

(1). Pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ sont intégrables sur I et

(2). La fonction $F : x \in A \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_I f\big(x\,,t\big)dt$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur A et on a

$$\forall i \in \big\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\big\}, \quad \forall x \in A, \quad F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}\big(x\,,t\big)dt.$$

On peut étendre le Théorème 4.4.1 au cas où on n'a que l'hypothèse de domination locale.

Théorème 4.4.3. *Soit $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application. On suppose que*

(1). Pour tout $x \in A$, la fonction $f\big(x\,,\cdot\big) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est intégrable,

(2). $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $A \times I$, est continue par rapport à x et est continue par morceaux par rapport à t,

(3). $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$ c'est-à-dire pour tout compact $K \subset A$, il existe une fonction $\varphi_K : K \longrightarrow \mathbb{R}$ positive, continue par morceaux et intégrable vérifiant : pour tout $\big(x\,,t\big) \in K \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,t\big)\right| \leq \varphi_K(t)$.

Alors

(1). Pour tout $x \in A$, la fonction $\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,\cdot\big) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est intégrable et

(2). La fonction $F : x \in A \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_I f\big(x\,,t\big)dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et pour tout $x \in A$, on a

$$F'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,t\big)dt.$$

Corollaire 4.4.4. *Soient $f : A \times I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On suppose que*

(1). *Pour tout $x \in A$, la fonction $f(x, \cdot) : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est intégrable,*

(2). *f, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ existent sur $A \times I$, sont continues par rapport à x et sont continues par morceaux par rapport à t,*

(3). *$\dfrac{\partial f}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A \times I$*

Alors

(1). *Pour tout $x \in A$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \cdots, \dfrac{\partial^n f}{\partial x^n}$ sont intégrables sur I et*

(2). *La fonction $F : x \in A \longmapsto F(x) = \displaystyle\int_I f(x, t)dt$ est de classe $\mathscr{C}^n$ sur A et on a*

$$\forall i \in \{1,\, 2,\, \cdots,\, n\}, \quad \forall x \in A, \quad F^{(i)}(x) = \int_I \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x, t)dt.$$

4.5 Exercices

Exercice 4.5.1. Soit F la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + x^2 - 2x\cos t\right)dt$. Etudier la continuité et la dérivabilité de F sur $]-1, 1[$.

Exercice 4.5.2. Soit la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(x^2 + \sin^2 t\right)dt$.

(1). Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.

(2). Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \pi\ln x\right)$. En déduire une écriture simplifiée de $f(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 4.5.3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt$.

(1). Etudier l'existence, la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

(2). Déterminer une équation différentielle vérifiée par f.

(3). En déduire une valeur simple pour $f(x)$. (On admettra que $f(0) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$).

Exercice 4.5.4. Soient $f(x) = \left[\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}dt\right]^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}dt$.

(1). Montrer que f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, +\infty[$ et déterminer leur dérivée.

(2). Montrer que pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a $f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

(3). En déduire la valeur de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}dt$.

4.6 Corrigés des exercices

Exercice 4.5.1 Etude de la continuité et de la dérivabilité de la fonction F la fonction définie par

$$F(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \ln\left(1 + x^2 - 2x\cos t\right)dt.$$

Dans cet exercice, $A =]-1, 1[$ et $I = [-\pi, \pi]$.

(1). **Continuité.** Puisque $1+x^2-2x\cos t$ est positif et ne s'annule pas sur $A\times I$, la fonction de deux variables $f\colon \big(x\,,t\big)\in A\times I\longmapsto \ln\big(1+x^2-2x\cos t\big)$ est continue. Comme $I=[-\pi\,,\pi]$ est un segment, d'après le (3) de la Remarque 4.2.2, f vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A\times I$.
En appliquant le Théorème 4.3.2, on conclut que F est continue sur $A=\,]-1\,,1\,[$.

(2). **Dérivabilité.** La dérivée partielle de f par rapport à x, qui vaut $\dfrac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,t\big)=\dfrac{2\big(x-\cos t\big)}{1+x^2-2x\cos t}$ est également continue sur $A\times I$. Comme $I=[-\pi\,,\pi]$ est un segment, d'après le (3) de la Remarque 4.2.2, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A\times I$. En appliquant le Théorème 4.4.3, on conclut que F est dérivable sur A avec

$$F'(x)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,t\big)dt=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{2\big(x-\cos t\big)}{1+x^2-2x\cos t}dt.$$

Exercice 4.5.2. Soit la fonction $f\colon x\longmapsto \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\big(x^2+\sin^2 t\big)dt$.
Notons h la fonction définie sur $]\,0\,,+\infty\,[\,\times I$ par $h\big(x\,,t\big)=\ln\big(x^2+\sin^2 t\big)$.

(1). Soit $x\in\,]\,0\,,+\infty\,[$. La fonction $t\longmapsto\ln\big(x^2+\sin^2 t\big)$ est continue sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable.
Pour tout $t\in\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$, la fonction $x\longmapsto\ln\big(x^2+\sin^2 t\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]\,0\,,+\infty\,[$ avec

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,t\big)=\frac{2x}{x+\sin^2 t}\quad\text{pour tout}\quad x\in\,]\,0\,,+\infty\,[\,.$$

D'autre part, soit $[a\,,b]\subset\,]\,0\,,+\infty\,[$. Pour tout $t\in\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ et tout $x\in\,]\,0\,,+\infty\,[$, on a

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}\big(x\,,t\big)\right|\le\frac{2b}{a^2+\sin^2 t}$$

et la fonction $\varphi\colon t\in\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]\longmapsto\dfrac{2b}{a^2+\sin^2 t}$ est continue sur $\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc intégrable. Autrement dit, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $]\,0\,,+\infty\,[\,\times\left[0\,,\dfrac{\pi}{2}\right]$.
Finalement, f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a\,,b]$ avec $f'(x)=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{x^2+\sin^2 t}dt$ pour tout $x\in[a\,,b]$.
Puisque $[a\,,b]$ est arbitraire et f est de classe $\mathscr{C}^1$, on conclut que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0\,,+\infty]$ avec

$$f'(x)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{x^2+\sin^2 t}dt\quad\text{pour tout}\quad x\in\,]\,0\,,+\infty\,[\,.$$

En effectuant le changement de variable : $u=\tan t$, puisque la fonction $t\longmapsto\arctan u$ est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $[\,0\,,+\infty\,[$ sur $[\,0\,,\dfrac{\pi}{2}\,[$, on a pour tout $x\in\,]\,0\,,+\infty\,[$:

$$f'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^2+\dfrac{u^2}{1+u^2}}\frac{du}{1+u^2}=\int_0^{+\infty}\frac{2x}{x^2+\big(1+x^2\big)u^2}du$$
$$=\left[\frac{2}{\sqrt{1+x^2}}\arctan\left(\frac{u\sqrt{1+x^2}}{x}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(2). Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-\pi\ln x\big)$. En déduire une écriture simplifiée de $f(x)$ pour $x>0$.
Pour $x\in\,]\,0\,,+\infty\,[$, on a

$$f(x)-\pi\ln x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[\ln\big(x^2+\sin^2 t\big)-\ln\big(x^2\big)\right]dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{x^2+\sin^2 t}{x^2}\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(1+\frac{\sin^2 t}{x^2}\right)dt.$$

D'autre part, pour $u \geq 0$, on a $\ln\left(1+u\right) \leq u$. Ainsi,

$$0 \leq f(x) - \pi \ln x \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(1 + \frac{\sin^2 t}{x^2}\right) dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{x^2} dt = \frac{\pi}{2x^2}.$$

Part le théorème de comparaison, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[f(x) - \pi \ln x\right] = 0$.
Mais pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, $f'(x) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1+x^2}}$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in \left]0, +\infty\right[$, on a $f(x) = \alpha + \pi \operatorname{argsinh} x$ où $\operatorname{argsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$. On détermine α par la limite précedente.

$$f(x) - \pi \ln x = \alpha + \alpha \operatorname{argsinh} x - \pi \ln x = \alpha + \pi \ln\left(\frac{x + \sqrt{1+x^2}}{x}\right) = \alpha + \ln\left(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}\right)$$

ce qui donne $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - \pi \ln x\right) = \alpha + \pi \ln 2 = 0$. Ainsi, pour $x \in \left]0, +\infty\right[$, $f(x) = \pi \operatorname{argsinh} x - \pi \ln 2$.

Exercice 4.5.3. On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos\left(xt\right) dt$.
Notons h la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par $h\left(x, t\right) = e^{-t^2} \cos\left(xt\right)$.

(1). Existence, la continuité et la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

(a). **Existence.** Soit $x \in \mathbb{R}$. La fonction $t \longmapsto h\left(x, t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\left|e^{-t^2} \cos\left(xt\right)\right| \leq e^{-t^2}$ et la fonction $t \longmapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $x \longmapsto h\left(x, t\right)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ c'est-à-dire f est bien définie.

(b). **Continuité.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto h\left(x, t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \longmapsto h\left(x, t\right)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $\left|h\left(x, t\right)\right| \leq e^{-t^2} = \varphi(t)$ et φ est continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En appliquant le Théorème 4.3.1, on conclut que f est continue sur $\mathbb{R}$.

(c). **Dérivabilité.** Pour $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \longmapsto h\left(x, t\right)$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \longmapsto h\left(x, t\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}\left(x, t\right) = -te^{-t^2} \sin\left(xt\right)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial h}{\partial x}\left(x, t\right)\right| = te^{-t^2} \left|\sin\left(xt\right)\right| \leq te^{-t^2} = \psi(t).$$

La fonction ψ étant continue, positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$. En appliquant le Théorème 4.4.1, on conclut que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial h}{\partial x}\left(x, t\right) dt = -\int_0^{+\infty} te^{-t^2} \sin\left(xt\right) dt.$$

(2). Soit $x \in \mathbb{R}$. Les fonctions $u\colon t \longmapsto \dfrac{1}{2} e^{-t^2}$ et $v\colon t \longmapsto \sin\left(xt\right)$ sont définies et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Soit $\alpha > 0$. On peut alors écrire

$$\int_0^{\alpha} \left(-te^{-t^2}\right) \sin\left(xt\right) dt = \left[\frac{1}{2} e^{-t^2} \sin\left(xt\right)\right]_0^{\alpha} - \frac{x}{2} \int_0^{\alpha} e^{-t^2} \cos\left(xt\right) dt.$$

En faisant tendre α vers $+\infty$, on obtient :

$$f'(x) = -\frac{x}{2} f(x) \quad \text{pour tout} \quad x \in \mathbb{R}. \tag{4.6.1}$$

(3). En résolvant l'équation différentielle (4.6.1), on obtient $f(x) = f(0) e^{-\frac{x^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\frac{x^2}{4}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4.5.4 Soient $f(x) = \left[\int_0^x e^{-t^2}dt\right]^2$ et $g(x) = \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2}\left(1+t^2\right)}{1+t^2}dt$.

(1). • Posons $f = F^2$ où $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt$ est la primitive de $x \longmapsto e^{-x^2}$ ne s'annulant pas en 0. La fonction F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$. Donc, f l'est aussi avec

$$f'(x) = 2F'(x)F(x) = 2e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt \quad \text{pour tout} \quad x \geq 0.$$

• Posons $h\big(x\,,\,t\big) = \dfrac{e^{-x^2}\left(1+t^2\right)}{1+t^2}$ pour tout $\big(x\,,\,t\big) \in \mathbb{R}_+ \times [0\,,\,1]$.
Pour tout $x \geq 0$, la fonction $t \longmapsto h\big(x\,,\,t\big)$ est continue sur $[0\,,\,1]$ donc elle y est intégrable.
Pour tout $t \in [0\,,\,1]$, la fonction $x \longmapsto h\big(x\,,\,t\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec $\dfrac{\partial h}{\partial x}\big(x\,,\,t\big) = -2xe^{-x^2}e^{-x^2(1+t^2)}$.
Pour $\big(x\,,\,t\big) \in \mathbb{R}_+ \times [0\,,\,1]$, on a $\left|\dfrac{\partial h}{\partial x}\big(x\,,\,t\big)\right| \leq 1$ et la fonction $t \longmapsto 1$ est continue et intégrable sur $[0\,,\,1]$. Donc g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ avec

$$g'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}dt = -2e^{-x^2}\int_0^1 xe^{-x^2t^2}dt \quad \text{pour tout} \quad x \geq 0.$$

Le changement de variable $u = xt$ donne $g'(x) = -2e^{-x^2}\int_0^x e^{-u^2}du$.

(2). D'après les calculs précédents, $f+g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$, de dérivée nulle donc elle est constante. Or, $f(0) = 0$ et $g(0) = \int_0^1 \dfrac{dt}{1+t^2} = \dfrac{\pi}{4}$. Donc, pour tout $x \geq 0$, on a $f(x)+g(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

(3). La fonction $\varphi\colon t \longmapsto e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car elle est continue sur $\mathbb{R}_+$ et $\varphi(t) = o\left(e^{-t}\right)$ au voisinage de $+\infty$. Ainsi, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = I^2$.

D'autre part, pour tout $x \geq 0$, on a : $0 \leq g(x) \leq \int_0^1 \dfrac{e^{-x^2}}{1+t^2}dt = \dfrac{\pi}{4}e^{-x^2}$. Ce qui donne $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$.

On conclut que $I^2 = \dfrac{\pi}{4}$ et puisque $I \geq 0$, on a $I = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.