Université d'Antananarivo
Domaine Sciences et Technologies
Durée : 3 heures

Séries et Intégrales
Semestre 4
Session septembre 2022

Mention Mathématiques
et Informatique
Documents non autorisés

Remarques.

- Toute tentative de fraude entraînera une note **ZERO**,
- Il est strictement interdit d'emprunter et de faire passer des objets durant l'épreuve.

4.34

Exercice 1. On considère la suite $(u_n)_n$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1}^2 + u_n u_{n+2} = (-1)^n$.

(2) En déduire que pour tout $n \geq 1$, on a $\dfrac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}} = \dfrac{u_{n+1}}{u_n} - \dfrac{u_{n+2}}{u_{n+1}}$.

(3) Etudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{u_n u_{n+1}}$ et déterminer sa somme éventuelle.

Exercice 2. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \left(\sqrt{n^2+an+2} - \sqrt{n^2+bn+1}\right)^n$ où $a,\ b \in \mathbb{R}$ et $a \geq b$.

Exercice 3. On considère la suite de fonctions $(f_n)_n$ définie sur $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{2nx}{1+n^2x^4}$.

(1) Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$ sur $[0;1]$.

(2) En utilisant la suite $(x_n)_n$ définie par $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_n$ sur $[0;1]$.

Exercice 4. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions continues de $[a;b]$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que pour chaque $x \in [a;b]$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante et minorée.

(1) Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers une fonction f.

(2) Montrer que si f est continue sur $[a;b]$, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a;b]$ vers f;

(3) Que peut-on dire lorsque, pour tout $x \in [a;b]$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est croissante et majorée ?