Zéros des fonctions

Vidéo ■ partie 1. La dichotomie
Vidéo ■ partie 2. La méthode de la sécante
Vidéo ■ partie 3. La méthode de Newton

Dans ce chapitre nous allons appliquer toutes les notions précédentes sur les suites et les fonctions, à la recherche des zéros des fonctions. Plus précisément, nous allons voir trois méthodes afin de trouver des approximations des solutions d'une équation du type $(f(x) = 0)$.

1. La dichotomie

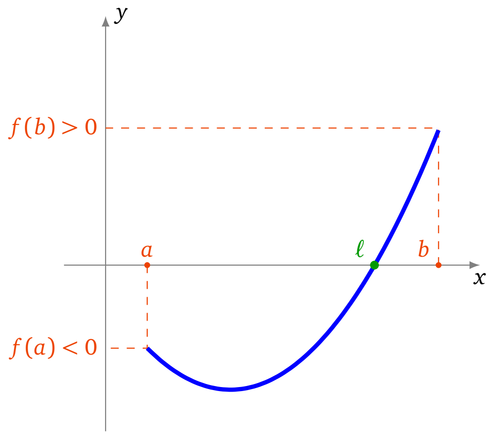
1.1. Principe de la dichotomie

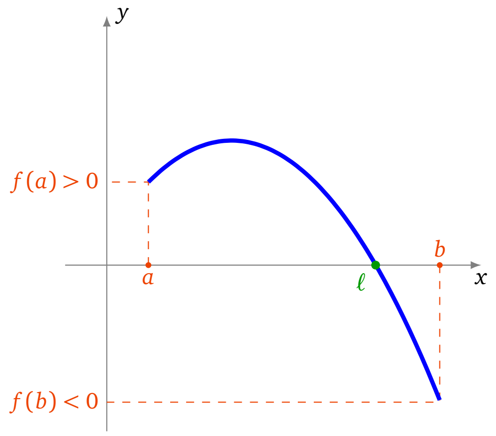
Le principe de dichotomie repose sur la version suivante du ***théorème des valeurs intermédiaires*** :

Théorème 1.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.

$$\boxed{\text{Si } f(a) \cdot f(b) \leqslant 0, \text{ alors il existe } \ell \in [a, b] \text{ tel que } f(\ell) = 0.}$$

La condition $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$ signifie que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes opposés (ou que l'un des deux est nul). L'hypothèse de continuité est essentielle !

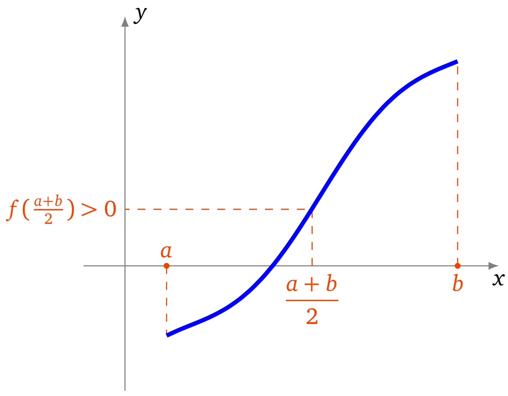


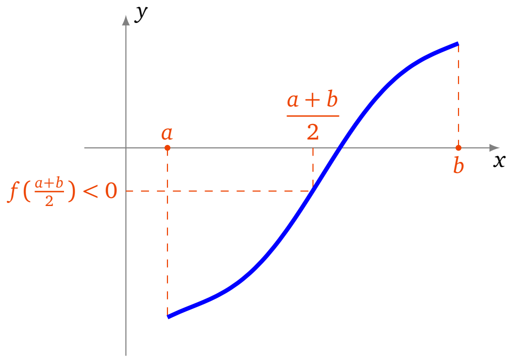


Ce théorème affirme qu'il existe au moins une solution de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a, b]$. Pour le rendre effectif, et trouver une solution (approchée) de l'équation $(f(x) = 0)$, il s'agit maintenant de l'appliquer sur un intervalle suffisamment petit. On va voir que cela permet d'obtenir un ℓ solution de l'équation $(f(x) = 0)$ comme la limite d'une suite.
Voici comment construire une suite d'intervalles emboîtés, dont la longueur tend vers 0, et contenant chacun une solution de l'équation $(f(x) = 0)$.

On part d'une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, avec $a < b$, et $f(a) \cdot f(b) \leqslant 0$.
Voici la première étape de la construction : on regarde le signe de la valeur de la fonction f appliquée au point milieu $\frac{a+b}{2}$.

- Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) \leqslant 0$, alors il existe $c \in [a, \frac{a+b}{2}]$ tel que $f(c) = 0$.
- Si $f(a) \cdot f(\frac{a+b}{2}) > 0$, cela implique que $f(\frac{a+b}{2}) \cdot f(b) \leqslant 0$, et alors il existe $c \in [\frac{a+b}{2}, b]$ tel que $f(c) = 0$.





Nous avons obtenu un intervalle de longueur moitié dans lequel l'équation $(f(x) = 0)$ admet une solution. On itère alors le procédé pour diviser de nouveau l'intervalle en deux.
Voici le processus complet :

- **Au rang 0 :**
  On pose $a_0 = a$, $b_0 = b$. Il existe une solution x_0 de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_0, b_0]$.
- **Au rang 1 :**
  — Si $f(a_0) \cdot f(\frac{a_0+b_0}{2}) \leqslant 0$, alors on pose $a_1 = a_0$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$,
  — sinon on pose $a_1 = \frac{a_0+b_0}{2}$ et $b_1 = b$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_1 de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_1, b_1]$.
- ...
- **Au rang n :** supposons construit un intervalle $[a_n, b_n]$, de longueur $\frac{b-a}{2^n}$, et contenant une solution x_n de l'équation $(f(x) = 0)$. Alors :
  — Si $f(a_n) \cdot f(\frac{a_n+b_n}{2}) \leqslant 0$, alors on pose $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$,
  — sinon on pose $a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1} = b_n$.
  — Dans les deux cas, il existe une solution x_{n+1} de l'équation $(f(x) = 0)$ dans l'intervalle $[a_{n+1}, b_{n+1}]$.

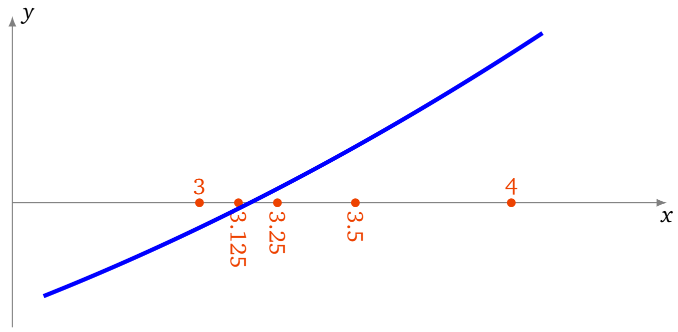
À chaque étape on a

$$a_n \leqslant x_n \leqslant b_n.$$

On arrête le processus dès que $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ est inférieur à la précision souhaitée.
Comme (a_n) est par construction une suite croissante, (b_n) une suite décroissante, et $(b_n - a_n) \to 0$ lorsque $n \to +\infty$, les suites (a_n) et (b_n) sont adjacentes et donc elles admettent une même limite. D'après le théorème des gendarmes, c'est aussi la limite disons ℓ de la suite (x_n). La continuité de f montre que $f(\ell) = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} 0 = 0$. Donc les suites (a_n) et (b_n) tendent toutes les deux vers ℓ, qui est une solution de l'équation $(f(x) = 0)$.

1.2. Résultats numériques pour $\sqrt{10}$

Nous allons calculer une approximation de $\sqrt{10}$. Soit la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 10$, c'est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\pm\sqrt{10}$. De plus $\sqrt{10}$ est l'unique solution positive de l'équation $(f(x) = 0)$. Nous pouvons restreindre la fonction f à l'intervalle $[3,4]$: en effet $3^2 = 9 \leqslant 10$ donc $3 \leqslant \sqrt{10}$ et $4^2 = 16 \geqslant 10$ donc $4 \geqslant \sqrt{10}$. En d'autre termes $f(3) \leqslant 0$ et $f(4) \geqslant 0$, donc l'équation $(f(x) = 0)$ admet une solution dans l'intervalle $[3,4]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires, et par unicité c'est $\sqrt{10}$, donc $\sqrt{10} \in [3,4]$.
Notez que l'on ne choisit pas pour f la fonction $x \mapsto x - \sqrt{10}$ car on ne connaît pas la valeur de $\sqrt{10}$. C'est ce que l'on cherche à calculer !



Voici les toutes premières étapes :

1. On pose $a_0 = 3$ et $b_0 = 4$, on a bien $f(a_0) \leqslant 0$ et $f(b_0) \geqslant 0$. On calcule $\frac{a_0+b_0}{2} = 3,5$ puis $f(\frac{a_0+b_0}{2})$: $f(3,5) = 3,5^2 - 10 = 2,25 \geqslant 0$. Donc $\sqrt{10}$ est dans l'intervalle $[3;3,5]$ et on pose $a_1 = a_0 = 3$ et $b_1 = \frac{a_0+b_0}{2} = 3,5$.
2. On sait donc que $f(a_1) \leqslant 0$ et $f(b_1) \geqslant 0$. On calcule $f(\frac{a_1+b_1}{2}) = f(3,25) = 0,5625 \geqslant 0$, on pose $a_2 = 3$ et $b_2 = 3,25$.
3. On calcule $f(\frac{a_2+b_2}{2}) = f(3,125) = -0,23\ldots \leqslant 0$. Comme $f(b_2) \geqslant 0$ alors cette fois f s'annule sur le second intervalle $[\frac{a_2+b_2}{2}, b_2]$ et on pose $a_3 = \frac{a_2+b_2}{2} = 3,125$ et $b_3 = b_2 = 3,25$.

À ce stade, on a prouvé : $3,125 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 3,25$.
Voici la suite des étapes :

$$\begin{array}{ll}
a_0 = 3 & b_0 = 4 \\
a_1 = 3 & b_1 = 3,5 \\
a_2 = 3 & b_2 = 3,25 \\
a_3 = 3,125 & b_3 = 3,25 \\
a_4 = 3,125 & b_4 = 3,1875 \\
a_5 = 3,15625 & b_5 = 3,1875 \\
a_6 = 3,15625 & b_6 = 3,171875 \\
a_7 = 3,15625 & b_7 = 3,164062\ldots \\
a_8 = 3,16015\ldots & b_8 = 3,164062\ldots
\end{array}$$

Donc en 8 étapes on obtient l'encadrement :

$$3,160 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 3,165$$

En particulier, on vient d'obtenir les deux premières décimales : $\sqrt{10} = 3,16\ldots$

1.3. Résultats numériques pour $(1,10)^{1/12}$

Nous cherchons maintenant une approximation de $(1,10)^{1/12}$. Soit $f(x) = x^{12} - 1,10$. On pose $a_0 = 1$ et $b_0 = 1,1$. Alors $f(a_0) = -0,10 \leqslant 0$ et $f(b_0) = 2,038\ldots \geqslant 0$.

$$\begin{array}{ll}
a_0 = 1 & b_0 = 1,10 \\
a_1 = 1 & b_1 = 1,05 \\
a_2 = 1 & b_2 = 1,025 \\
a_3 = 1 & b_3 = 1,0125 \\
a_4 = 1,00625 & b_4 = 1,0125 \\
a_5 = 1,00625 & b_5 = 1,00937\ldots \\
a_6 = 1,00781\ldots & b_6 = 1,00937\ldots \\
a_7 = 1,00781\ldots & b_7 = 1,00859\ldots \\
a_8 = 1,00781\ldots & b_8 = 1,00820\ldots
\end{array}$$

Donc en 8 étapes on obtient l'encadrement :

$$1,00781 \leqslant (1,10)^{1/12} \leqslant 1,00821$$

1.4. Calcul de l'erreur

La méthode de dichotomie a l'énorme avantage de fournir un encadrement d'une solution ℓ de l'équation $(f(x)=0)$. Il est donc facile d'avoir une majoration de l'erreur. En effet, à chaque étape, la taille l'intervalle contenant ℓ est divisée par 2. Au départ, on sait que $\ell \in [a,b]$ (de longueur $b-a$) ; puis $\ell \in [a_1,b_1]$ (de longueur $\frac{b-a}{2}$) ; puis $\ell \in [a_2,b_2]$ (de longueur $\frac{b-a}{4}$) ; ... ; $[a_n,b_n]$ étant de longueur $\frac{b-a}{2^n}$.
Si, par exemple, on souhaite obtenir une approximation de ℓ à 10^{-N} près, comme on sait que $a_n \leqslant \ell \leqslant b_n$, on obtient $|\ell-a_n| \leqslant |b_n-a_n| = \frac{b-a}{2^n}$. Donc pour avoir $|\ell-a_n| \leqslant 10^{-N}$, il suffit de choisir n tel que $\frac{b-a}{2^n} \leqslant 10^{-N}$.
Nous allons utiliser le logarithme décimal :

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{2^n} \leqslant 10^{-N} &\iff (b-a)10^N \leqslant 2^n \\
&\iff \log(b-a)+\log(10^N) \leqslant \log(2^n) \\
&\iff \log(b-a)+N \leqslant n\log 2 \\
&\iff n \geqslant \frac{N+\log(b-a)}{\log 2}
\end{aligned}$$

Sachant $\log 2 = 0,301\ldots$, si par exemple $b-a \leqslant 1$, voici le nombre d'itérations suffisantes pour avoir une précision de 10^{-N} (ce qui correspond, à peu près, à N chiffres exacts après la virgule).

10^{-10} ($\sim$ 10 décimales)	34 itérations
10^{-100} ($\sim$ 100 décimales)	333 itérations
10^{-1000} ($\sim$ 1000 décimales)	3322 itérations

Il faut entre 3 et 4 itérations supplémentaires pour obtenir une nouvelle décimale.

Remarque.
En toute rigueur il ne faut pas confondre précision et nombre de décimales exactes, par exemple $0,999$ est une approximation de $1,000$ à 10^{-3} près, mais aucune décimale après la virgule n'est exacte. En pratique, c'est la précision qui est la plus importante, mais il est plus frappant de parler du nombre de décimales exactes.

1.5. Algorithmes

Voici comment implémenter la dichotomie dans le langage `Python`. Tout d'abord on définit une fonction f (ici par exemple $f(x)=x^2-10$) :

Code 1 (*dichotomie.py (1)*).
```
def f(x):
    return x*x - 10
```

Puis la dichotomie proprement dite : en entrée de la fonction, on a pour variables a, b et n le nombre d'étapes voulues.

Code 2 (*dichotomie.py (2)*).
```
def dicho(a,b,n):
    for i in range(n):
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return a,b
```

Même algorithme, mais avec cette fois en entrée la précision souhaitée :

Code 3 (*dichotomie.py (3)*).
```
def dichobis(a,b,prec):
    while b-a>prec:
```

```
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            b = c
        else:
            a = c
    return a,b
```

Enfin, voici la version récursive de l'algorithme de dichotomie.

Code 4 (*dichotomie.py (4)*).

```
def dichotomie(a,b,prec):
    if b-a<=prec:
        return a,b
    else:
        c = (a+b)/2
        if f(a)*f(c) <= 0:
            return dichotomie(a,c,prec)
        else:
            return dichotomie(c,b,prec)
```

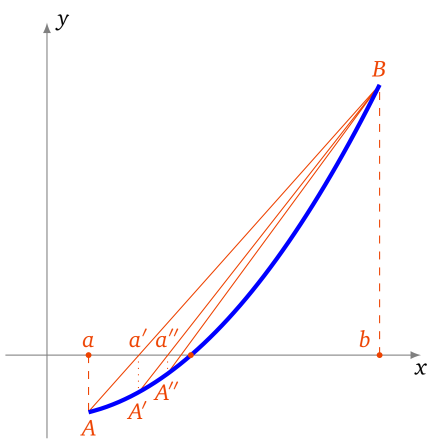
Mini-exercices. 1. À la main, calculer un encadrement à $0,1$ près de $\sqrt{3}$. Idem avec $\sqrt[3]{2}$.

2. Calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3 + 1 = 3x$.
3. Est-il plus efficace de diviser l'intervalle en 4 au lieu d'en 2 ? (À chaque itération, la dichotomie classique nécessite l'évaluation de f en une nouvelle valeur $\frac{a+b}{2}$ pour une précision améliorée d'un facteur 2.)
4. Écrire un algorithme pour calculer plusieurs solutions de $(f(x) = 0)$.
5. On se donne un tableau trié de taille N, rempli de nombres appartenant à $\{1, \ldots, n\}$. Écrire un algorithme qui teste si une valeur k apparaît dans le tableau et en quelle position.

2. La méthode de la sécante

2.1. Principe de la sécante

L'idée de la méthode de la sécante est très simple : pour une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$, et vérifiant $f(a) \leqslant 0$, $f(b) > 0$, on trace le segment $[AB]$ où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$. Si le segment reste au-dessus du graphe de f alors la fonction s'annule sur l'intervalle $[a', b]$ où $(a', 0)$ est le point d'intersection de la droite (AB) avec l'axe des abscisses. La droite (AB) s'appelle la ***sécante***. On recommence en partant maintenant de l'intervalle $[a', b]$ pour obtenir une valeur a''.

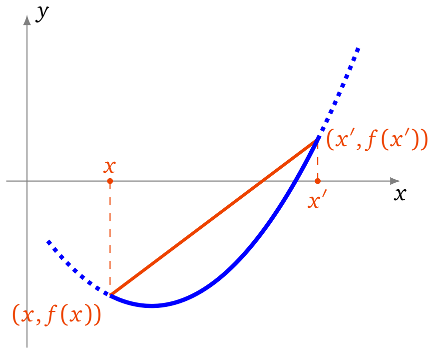


Proposition 1.
Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, strictement croissante et convexe telle que $f(a) \leqslant 0$, $f(b) > 0$. Alors la suite définie par

$$a_0 = a \qquad \text{et} \qquad a_{n+1} = a_n - \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)} f(a_n)$$

est croissante et converge vers la solution ℓ de $(f(x) = 0)$.

L'hypothèse f **convexe** signifie exactement que pour tout x, x' dans $[a, b]$ la sécante (ou corde) entre $(x, f(x))$ et $(x', f(x'))$ est au-dessus du graphe de f.



Démonstration. 1. Justifions d'abord la construction de la suite récurrente.

L'équation de la droite passant par les deux points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$ est

$$y = (x - a)\frac{f(b) - f(a)}{b - a} + f(a)$$

Cette droite intersecte l'axe des abscisses en $(a', 0)$ qui vérifie donc $0 = (a' - a)\frac{f(b)-f(a)}{b-a} + f(a)$, donc $a' = a - \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$.

2. Croissance de (a_n).

Montrons par récurrence que $f(a_n) \leqslant 0$. C'est vrai au rang 0 car $f(a_0) = f(a) \leqslant 0$ par hypothèse. Supposons vraie l'hypothèse au rang n. Si $a_{n+1} < a_n$ (un cas qui s'avérera *a posteriori* jamais réalisé), alors comme f est strictement croissante, on a $f(a_{n+1}) < f(a_n)$, et en particulier $f(a_{n+1}) \leqslant 0$. Sinon $a_{n+1} \geqslant a_n$. Comme f est convexe : la sécante entre $(a_n, f(a_n))$ et $(b, f(b))$ est au-dessus du graphe de f. En particulier le point $(a_{n+1}, 0)$ (qui est sur cette sécante par définition a_{n+1}) est au-dessus du point $(a_{n+1}, f(a_{n+1}))$, et donc $f(a_{n+1}) \leqslant 0$ aussi dans ce cas, ce qui conclut la récurrence.

Comme $f(a_n) \leqslant 0$ et f est croissante, alors par la formule $a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$, on obtient que $a_{n+1} \geqslant a_n$.

3. Convergence de (a_n).

La suite (a_n) est croissante et majorée par b, donc elle converge. Notons ℓ sa limite. Par continuité $f(a_n) \to f(\ell)$. Comme pour tout n, $f(a_n) \leqslant 0$, on en déduit que $f(\ell) \leqslant 0$. En particulier, comme on suppose $f(b) > 0$, on a $\ell < b$. Comme $a_n \to \ell$, $a_{n+1} \to \ell$, $f(a_n) \to f(\ell)$, l'égalité $a_{n+1} = a_n - \frac{b-a_n}{f(b)-f(a_n)} f(a_n)$ devient à la limite (lorsque $n \to +\infty$) : $\ell = \ell - \frac{b-\ell}{f(b)-f(\ell)} f(\ell)$, ce qui implique $f(\ell) = 0$.

Conclusion : (a_n) converge vers la solution de $(f(x) = 0)$.

$\square$

2.2. Résultats numériques pour $\sqrt{10}$

Pour $a = 3$, $b = 4$, $f(x) = x^2 - 10$ voici les résultats numériques, est aussi indiquée une majoration de l'erreur $\epsilon_n = \sqrt{10} - a_n$ (voir ci-après).

$a_0 = 3$	$\epsilon_0 \leqslant 0,1666\ldots$
$a_1 = 3,14285714285\ldots$	$\epsilon_1 \leqslant 0,02040\ldots$
$a_2 = 3,16000000000\ldots$	$\epsilon_2 \leqslant 0,00239\ldots$
$a_3 = 3,16201117318\ldots$	$\epsilon_3 \leqslant 0,00028\ldots$
$a_4 = 3,16224648985\ldots$	$\epsilon_4 \leqslant 3,28\ldots \cdot 10^{-5}$
$a_5 = 3,16227401437\ldots$	$\epsilon_5 \leqslant 3,84\ldots \cdot 10^{-6}$
$a_6 = 3,16227723374\ldots$	$\epsilon_6 \leqslant 4,49\ldots \cdot 10^{-7}$
$a_7 = 3,16227761029\ldots$	$\epsilon_7 \leqslant 5,25\ldots \cdot 10^{-8}$
$a_8 = 3,16227765433\ldots$	$\epsilon_8 \leqslant 6,14\ldots \cdot 10^{-9}$

2.3. Résultats numériques pour $(1,10)^{1/12}$

Voici les résultats numériques avec une majoration de l'erreur $\epsilon_n = (1,10)^{1/12} - a_n$, avec $f(x) = x^{12} - 1,10$, $a = 1$ et $b = 1,1$

$a_0 = 1$	$\epsilon_0 \leqslant 0,0083\ldots$
$a_1 = 1,00467633\ldots$	$\epsilon_1 \leqslant 0,0035\ldots$
$a_2 = 1,00661950\ldots$	$\epsilon_2 \leqslant 0,0014\ldots$
$a_3 = 1,00741927\ldots$	$\epsilon_3 \leqslant 0,00060\ldots$
$a_4 = 1,00774712\ldots$	$\epsilon_4 \leqslant 0,00024\ldots$
$a_5 = 1,00788130\ldots$	$\epsilon_5 \leqslant 0,00010\ldots$
$a_6 = 1,00793618\ldots$	$\epsilon_6 \leqslant 4,14\ldots \cdot 10^{-5}$
$a_7 = 1,00795862\ldots$	$\epsilon_7 \leqslant 1,69\ldots \cdot 10^{-5}$
$a_8 = 1,00796779\ldots$	$\epsilon_8 \leqslant 6,92\ldots \cdot 10^{-6}$

2.4. Calcul de l'erreur

La méthode de la sécante fournit l'encadrement $a_n \leqslant l \leqslant b$. Mais comme b est fixe cela ne donne pas d'information exploitable pour $|l - a_n|$. Voici une façon générale d'estimer l'erreur, à l'aide du théorème des accroissements finis.

Proposition 2.
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable et ℓ tel que $f(\ell) = 0$. S'il existe une constante $m > 0$ telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \geqslant m$ alors

$$|x - \ell| \leqslant \frac{|f(x)|}{m} \qquad \textit{pour tout } x \in I.$$

Démonstration. Par l'inégalité des accroissement finis entre x et ℓ : $|f(x) - f(\ell)| \geqslant m|x - \ell|$ mais $f(\ell) = 0$, d'où la majoration. □

Exemple 1 (Erreur pour $\sqrt{10}$)**.**
Soit $f(x) = x^2 - 10$ et l'intervalle $I = [3,4]$. Alors $f'(x) = 2x$ donc $|f'(x)| \geqslant 6$ sur I. On pose donc $m = 6$, $\ell = \sqrt{10}$, $x = a_n$. On obtient l'estimation de l'erreur :

$$\epsilon_n = |\ell - a_n| \leqslant \frac{|f(a_n)|}{m} = \frac{|a_n^2 - 10|}{6}$$

Par exemple on a trouvé $a_2 = 3,16... \leqslant 3,17$ donc $\sqrt{10} - a_2 \leqslant \frac{|3,17^2 - 10|}{6} = 0,489$.

Pour a_8 on a trouvé $a_8 = 3,1622776543347473\ldots$ donc $\sqrt{10} - a_8 \leqslant \frac{|a_8^2 - 10|}{6} = 6,14\ldots \cdot 10^{-9}$. On a en fait 7 décimales exactes après la virgule.

Dans la pratique, voici le nombre d'itérations suffisantes pour avoir une précision de 10^{-n} pour cet exemple. Grosso-modo, une itération de plus donne une décimale supplémentaire.

10^{-10} ($\sim$ 10 décimales)	10 itérations
10^{-100} ($\sim$ 100 décimales)	107 itérations
10^{-1000} ($\sim$ 1000 décimales)	1073 itérations

Exemple 2 (Erreur pour $(1,10)^{1/12}$).
On pose $f(x) = x^{12} - 1,10$, $I = [1;1,10]$ et $\ell = (1,10)^{1/12}$. Comme $f'(x) = 12x^{11}$, si on pose de plus $m = 12$, on a $|f'(x)| \geqslant m$ pour $x \in I$. On obtient

$$\epsilon_n = |\ell - a_n| \leqslant \frac{|a_n^{12} - 1,10|}{12}.$$

Par exemple $a_8 = 1.0079677973185432\ldots$ donc

$$|(1,10)^{1/12} - a_8| \leqslant \frac{|a_8^{12} - 1,10|}{12} = 6,92\ldots \cdot 10^{-6}.$$

2.5. Algorithme

Voici l'algorithme : c'est tout simplement la mise en œuvre de la suite récurrente (a_n).

Code 5 (*secante.py*).

```
def secante(a,b,n):
    for i in range(n):
        a = a-f(a)*(b-a)/(f(b)-f(a))
    return a
```

Mini-exercices. 1. À la main, calculer un encadrement à $0,1$ près de $\sqrt{3}$. Idem avec $\sqrt[3]{2}$.

2. Calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3 + 1 = 3x$.
3. Calculer une approximation de la solution de l'équation $(\cos x = 0)$ sur $[0, \pi]$. Idem avec $(\cos x = 2\sin x)$.
4. Étudier l'équation $(\exp(-x) = -\ln(x))$. Donner une approximation de la (ou des) solution(s) et une majoration de l'erreur correspondante.

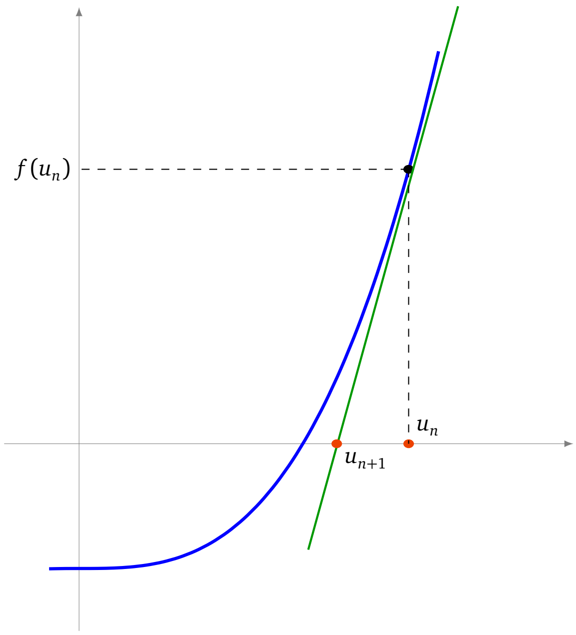
3. La méthode de Newton

3.1. Méthode de Newton

La méthode de Newton consiste à remplacer la sécante de la méthode précédente par la tangente. Elle est d'une redoutable efficacité.
Partons d'une fonction dérivable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et d'un point $u_0 \in [a,b]$. On appelle $(u_1, 0)$ l'intersection de la tangente au graphe de f en $(u_0, f(u_0))$ avec l'axe des abscisses. Si $u_1 \in [a,b]$ alors on recommence l'opération avec la tangente au point d'abscisse u_1. Ce processus conduit à la définition d'une suite récurrente :

$$u_0 \in [a,b] \qquad \text{et} \qquad u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}.$$

Démonstration. En effet la tangente au point d'abscisse u_n a pour équation : $y = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$. Donc le point $(x, 0)$ appartenant à la tangente (et à l'axe des abscisses) vérifie $0 = f'(u_n)(x - u_n) + f(u_n)$. D'où $x = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$. $\square$



3.2. Résultats pour $\sqrt{10}$

Pour calculer $\sqrt{a}$, on pose $f(x) = x^2 - a$, avec $f'(x) = 2x$. La suite issue de la méthode de Newton est déterminée par $u_0 > 0$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^2 - a}{2u_n}$. Suite qui pour cet exemple s'appelle ***suite de Héron*** et que l'on récrit souvent

$$\boxed{u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).}$$

Proposition 3.
Cette suite (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Pour le calcul de $\sqrt{10}$, on pose par exemple $u_0 = 4$, et on peut même commencer les calculs à la main :

$$\begin{aligned}
&u_0 = 4\\
&u_1 = \tfrac{1}{2}\left(u_0 + \tfrac{10}{u_0}\right) = \tfrac{1}{2}\left(4 + \tfrac{10}{4}\right) = \tfrac{13}{4} = 3,25\\
&u_2 = \tfrac{1}{2}\left(u_1 + \tfrac{10}{u_1}\right) = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{13}{4} + \tfrac{10}{\frac{13}{4}}\right) = \tfrac{329}{104} = 3,1634\ldots\\
&u_3 = \tfrac{1}{2}\left(u_2 + \tfrac{10}{u_2}\right) = \tfrac{216\,401}{68\,432} = 3,16227788\ldots\\
&u_4 = 3,162277660168387\ldots
\end{aligned}$$

Pour u_4 on obtient $\sqrt{10} = 3,1622776601683\ldots$ avec déjà 13 décimales exactes !
Voici la preuve de la convergence de la suite (u_n) vers $\sqrt{a}$.

Démonstration.

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

1. Montrons que $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour $n \geqslant 1$.
   Tout d'abord
   $$u_{n+1}^2 - a = \frac{1}{4}\left(\frac{u_n^2 + a}{u_n}\right)^2 - a = \frac{1}{4u_n^2}(u_n^4 - 2au_n^2 + a^2) = \frac{1}{4}\frac{(u_n^2 - a)^2}{u_n^2}$$
   Donc $u_{n+1}^2 - a \geqslant 0$. Comme il est clair que pour tout $n \geqslant 0$, $u_n \geqslant 0$, on en déduit que pour tout $n \geqslant 0$, $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$. (Notez que u_0 lui est quelconque.)
2. Montrons que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite décroissante qui converge.
   Comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{u_n^2}\right)$, et que pour $n \geqslant 1$ on vient de voir que $u_n^2 \geqslant a$ (donc $\frac{a}{u_n^2} \leqslant 1$), alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$, pour tout $n \leqslant 1$.
   Conséquence : la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0 donc elle converge.

3. (u_n) converge vers $\sqrt{a}$.
   Notons ℓ la limite de (u_n). Alors $u_n \to \ell$ et $u_{n+1} \to \ell$. Lorsque $n \to +\infty$ dans la relation $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, on obtient $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right)$. Ce qui conduit à la relation $\ell^2 = a$ et par positivité de la suite, $\ell = \sqrt{a}$.

□

3.3. Résultats numériques pour $(1,10)^{1/12}$

Pour calculer $(1,10)^{1/12}$, on pose $f(x) = x^{12} - a$ avec $a = 1,10$. On a $f'(x) = 12x^{11}$. On obtient $u_{n+1} = u_n - \frac{u_n^{12}-a}{12u_n^{11}}$. Ce que l'on reformule ainsi :

$$u_0 > 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{12}\left(11u_n + \frac{a}{u_n^{11}}\right).$$

Voici les résultats numériques pour $(1,10)^{1/12}$ en partant de $u_0 = 1$.

$$\begin{aligned}
u_0 &= 1\\
u_1 &= 1,0083333333333333\ldots\\
u_2 &= 1,0079748433368980\ldots\\
u_3 &= 1,0079741404315996\ldots\\
u_4 &= 1,0079741404289038\ldots
\end{aligned}$$

Toutes les décimales affichées pour u_4 sont exactes : $(1,10)^{1/12} = 1,0079741404289038\ldots$

3.4. Calcul de l'erreur pour $\sqrt{10}$

Proposition 4. *1. Soit k tel que $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$. Alors pour tout $n \geqslant 1$:*

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

2. Pour $a = 10$, $u_0 = 4$, on a :

$$u_n - \sqrt{10} \leqslant 8\left(\frac{1}{24}\right)^{2^{n-1}}$$

Admirez la puissance de la méthode de Newton : 11 itérations donnent déjà 1000 décimales exactes après la virgule. Cette rapidité de convergence se justifie grâce au calcul de l'erreur : la précision est multipliée par 2 à chaque étape, donc à chaque itération le nombre de décimales exactes double !

10^{-10} ($\sim$ 10 décimales)	4 itérations
10^{-100} ($\sim$ 100 décimales)	8 itérations
10^{-1000} ($\sim$ 1000 décimales)	11 itérations

Démonstration. 1. Dans la preuve de la proposition 3, nous avons vu l'égalité :

$$u_{n+1}^2 - a = \frac{(u_n^2-a)^2}{4u_n^2} \quad \text{donc} \quad (u_{n+1}-\sqrt{a})(u_{n+1}+\sqrt{a}) = \frac{(u_n-\sqrt{a})^2(u_n+\sqrt{a})^2}{4u_n^2}$$

Ainsi comme $u_n \geqslant \sqrt{a}$ pour $n \geqslant 1$:

$$u_{n+1} - \sqrt{a} = (u_n-\sqrt{a})^2 \times \frac{1}{u_{n+1}+\sqrt{a}} \times \frac{1}{4}\left(1+\frac{\sqrt{a}}{u_n}\right)^2 \leqslant (u_n-\sqrt{a})^2 \times \frac{1}{2\sqrt{a}} \times \frac{1}{4}\cdot(1+1)^2 = \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2$$

Si k vérifie $u_1 - \sqrt{a} \leqslant k$, nous allons en déduire par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, la formule

$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}$$

C'est vrai pour $n = 1$. Supposons la formule vraie au rang n, alors :

$$u_{n+1} - \sqrt{a} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{a}}(u_n-\sqrt{a})^2 = \frac{1}{2\sqrt{a}}(2\sqrt{a})^2\left(\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^{n-1}}\right)^2 = 2\sqrt{a}\left(\frac{k}{2\sqrt{a}}\right)^{2^n}$$

La formule est donc vrai au rang suivant.

2. Pour $a = 10$ avec $u_0 = 4$ on a $u_1 = 3,25$. Comme $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4$ alors $u_1 - \sqrt{10} \leqslant u_1 - 3 \leqslant \frac{1}{4}$. On fixe donc $k = \frac{1}{4}$. Toujours par l'encadrement $3 \leqslant \sqrt{10} \leqslant 4$, la formule obtenue précédemment devient
$$u_n - \sqrt{a} \leqslant 2 \cdot 4 \left(\frac{\frac{1}{4}}{2 \cdot 3} \right)^{2^{n-1}} = 8 \left(\frac{1}{24} \right)^{2^{n-1}} .$$

□

3.5. Algorithme

Voici l'algorithme pour le calcul de $\sqrt{a}$. On précise en entrée le réel $a \geqslant 0$ dont on veut calculer la racine et le nombre n d'itérations.

Code 6 (*newton.py*).

```
def racine_carree(a,n):
    u=4                 # N'importe qu'elle valeur > 0
    for i in range(n):
        u = 0.5*(u+a/u)
    return u
```

En utilisant le module `decimal` le calcul de u_n pour $n = 11$ donne 1000 décimales de $\sqrt{10}$:

3,
1622776601683793319988935444327185337195551393252 1 6826857504852792594438639238221344248108379300295 1
8734728415284005514854885603045388001469051959670 0 1539033449216571792599406591501534741133394841240 8
5316929577090471576461044369257879062037808609941 8 2837171154840632855299911859682456420332696160469 1
3143361289497918902665295436126761787813500613881 8 6278580463683134952478031143769334671973819513185 6
7840323124179540221830804587284461460025357757970 2 8286440290244079778960345439891633492226526120677 9
2651676031048436697793756926155720500369894909469 4 2185000735834884464388273110928910904234805423565 3
4039072740197865437259396417260013069900009557844 6 3109626790694418336130181302894541703315807731626 3
8639519379370465476522063206368658719782204931242 6 0534541116093569798281324522970007988835237595853 2
8579251362964686511497675217123459559238039375625 1 2536985519495532509994703884399033646616547064723 4
9997961323434030218570521878366763457895107329828 7 5157945215771652139626324438399018484560935762602 0

Mini-exercices. 1. À la calculette, calculer les trois premières étapes pour une approximation de $\sqrt{3}$, sous forme de nombres rationnels. Idem avec $\sqrt[3]{2}$.
2. Implémenter la méthode de Newton, étant données une fonction f et sa dérivée f'.
3. Calculer une approximation des solutions de l'équation $x^3 + 1 = 3x$.
4. Soit $a > 0$. Comment calculer $\frac{1}{a}$ par une méthode de Newton ?
5. Calculer n de sorte que $u_n - \sqrt{10} \leqslant 10^{-\ell}$ (avec $u_0 = 4$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right)$, $a = 10$).

Auteurs du chapitre Auteurs : Arnaud Bodin, Niels Borne, Laura Desideri
Dessins : Benjamin Boutin