III. DYNAMIQUE GALILEENNE DU SOLIDE.

III.1 : RELATION FONDAMENTALE DE LA DYNAMIQUE :

{ torseur dynamique du solide (S) au point A} = { torseur des efforts au point A appliqués à ce solide }

$$[\, m\vec{\Gamma}_{Ro}(G \in S)\,,\ \vec{\delta}_{Ro}(A,S)\,] = [\vec{F}_{eff}\,, \vec{M}_A(efforts)]_A \qquad (III.1)$$

$$\vec{R} = m\vec{\Gamma}_{Ro}(G \in S) \text{ est la résultante dynamique ;} \qquad (III.2)$$

$\vec{\delta}_{Ro}(A,S)$ *est le moment dynamique au point A du solide (S) dans son mouvement par rapport au repère galiléen* $R_o = (0; \vec{x}_o, \vec{y}_o, \vec{z}_o)$;

$\vec{F}eff$ *est la résultante des efforts appliqués au solide,*

$\vec{M}_A(efforts)$ *est le moment au point A des efforts appliqués au solide.*

Les efforts appliqués au solide (S) se composent des forces connues et des forces inconnues ; ces dernières sont appelées forces de liaison ou tout simplement liaison .

Le torseur des forces connues a pour éléments de réduction au point A : $[\vec{F}, \vec{M}_A(fc)]$.

Il faut noter que si $\vec{F}$ *est la force connue appliquée au point Q du solide, le moment au point A de la force* $\vec{F}$ *est* $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AQ} \wedge \vec{F}$.

Le torseur de liaison au point A a pour éléments de réduction $[\vec{l}, \vec{M}_A(liaison)]$ *de composantes (X, Y, Z, L, M, N) dans le repère de projection Rp donné ; ces composantes sont appelées inconnues de liaison .*

$$\vec{l} = (X,Y,Z)/Rp\ ,\quad \vec{M}_A(liaison) = (L,M,N)/Rp\,. \qquad (III.3)$$

En définitive le torseur des efforts appliqués au solide (S) au point A est :

$$[\vec{F}eff, \vec{M}_A(efforts)]_A \text{ où} \qquad (III.4)$$

$$\vec{F}eff = \vec{F} + \vec{l} \qquad (III.5)$$

$$\vec{M}_A(efforts) = \vec{M}_A(fc) + \vec{M}_A(liaison) \qquad (III.6)$$

III.2 : THEOREME GENERAUX :

III.2.1 : Expression vectorielle :

Théorème du centre de masse G (ou théorème de la résultante dynamique) :

$$m\vec{\Gamma}_{Ro}(G \in S) = \vec{F}_{eff} \qquad (III.7)$$

Théorème du moment cinétique au point A (ou théorème du moment dynamique au point A) :

$$\vec{\delta}_{Ro}(A,S) = \vec{M}_A[effort] \qquad (III.8)$$

III.2.2 : Les équations scalaires déduites des théorèmes généraux :

Ces deux théorèmes généraux explicités dans la même base du repère de projection Rp donnent en général six (6) équations scalaires avec comme inconnues les paramètres de mouvement et les inconnues de liaison.

S'il y a autant d'inconnues que d'équations scalaires, le problème est dit déterminé.

S'il y a plus d'inconnues que d'équations, le problème est dit indéterminé.

Equations de mouvement : ce sont les équations scalaires qui ne renferment pas d'inconnues de liaison.

Dans certains cas on peut intégrer les équations de mouvement et on obtient une relation qui lie les paramètres de mouvement et leurs dérivés premières ; cette relation est appelée l'intégrale première de mouvement.

III.3. THEOREME DE L'ENERGIE CINETIQUE.

III.3.1. Forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique

$$dEc_{Ro}(S) = dW(efforts) \qquad (III.9)$$

où $dEc_{Ro}(S)$ est la différentielle de l'énergie cinétique

et $dW(efforts$, le travail élémentaire de tous les efforts appliqués au solide

III.3.2. Forme intégrale du théorème ou intégrale première de l'énergie

Les efforts dérivent d'une fonction de force U lorsque

$$\vec{F}_{eff} = \vec{\nabla}U \Leftrightarrow \vec{rot}(\vec{F}_{eff}) = \vec{0}. \qquad (III.10$$

Lorsque les efforts appliqués au solide dérivent d'une fonction de force U, alors $dW(efforts)$ = dU, et la relation (III) devient :

$$dEc_{Ro}(S) = dU \qquad (III.11)$$

L'intégration membre à membre de cette relation conduit à la forme intégrale du théorème de l'énergie cinétique :

$$Ec_{Ro}(S) = U + C \;,\; C \text{ la constante d'intégration} \qquad (III.12)$$

La relation (III.12) est l'intégrale première de l'énergie qu'il faut expliciter dans le repère de projection donné.)

Entre deux instants t_1 et t_2 donnés la relation (III.11) conduit à :

$$\int_{t1}^{t2} dEc_{Ro}(S) = \int_{t1}^{t2} dW(efforts) = U_2 - U_1 \qquad (III.13)$$

d'où l'énoncé :

la variation de l'énergie cinétique entre deux instants t_1 et t_2 et égale au travail de tous les efforts appliqués au solide entre ces deux instants.

Remarque : Notons que lorsque les efforts dérivent d' une fonction potentielle Ep, on a dU = - dEp .

III.3.3 Le travail du torseur des efforts

a) le travail des forces connues

Soit $\vec{F}$ une force connue qui s'applique au pont Q lié au solide (S) :($(\vec{F},Q)$

Son travail est $dW(\vec{F}) = \vec{F}.d\vec{Q}$ (III.14)

soit $dW(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}_{Ro}(Q \in S).dt$

Par définition $P_{Ro}(\vec{F}) = \vec{F}.\vec{V}_{Ro}(Q \in S)$ est la puissance dans Ro de la force $\vec{F}$ et

$$dW(\vec{F}) = .\,P_{Ro}(\vec{F}).dt \qquad (III.15)$$

Cas particulier : travail du poids du solide (S) :

$$dW(m\vec{g}) = m\vec{g}..d\vec{G} = m\vec{g}.d(\vec{OG}) = d(m\vec{g}.\vec{OG}) \qquad (III.16)$$

car O , fixe, origine de Ro . Pars intégration on a

$$W(m\vec{g}) = m\vec{g}.\vec{OG} + constante \qquad (III.17)$$

III.3.4. le travail du torseur de liaison au point A du solide

La puissance du torseur de liaison au point A lié au solide (S) notée $P_{Ro}[liaison]_A$ est par définition le comoment du torseur cinématique et du torseur de liaison au point A :

$$P_{Ro}[liaison]_A = [\Omega]_A.[liaison]_A = \vec{\Omega}_{S/Ro}.\vec{M}_A[liaison] + \vec{V}_{Ro}(A \in S)..\vec{l} \qquad (III.18)$$

Ainsi $dW[liaison] = P_{Ro}[liaison]_A.\,dt$ (III.19)

Liaison parfaite au point A :

Une liaison est dite parfaite lorsqu'elle dissipe une puissance nulle au cours du mouvement du solide ($P_{Ro}[liaison]_A$ = 0). (III.20)

Une liaison parfaite est aussi appelée liaison sans frottement.

III.4. DYNAMIQUE DE CONTACT DE DEUX SOLIDES

Les deux solides (S1) et (S2) en contact ponctuel permanent au point I sont en mouvement par rapport au repère $R_o = (0;\vec{x}_o,\vec{y}_o,\vec{z}_o)$. On considère le mouvement du solide (S1) par rapport au solide (S2) avec le vecteur de glissement au point I :

$$\vec{V}_g = \vec{V}(S1/S2)_I \qquad (III.21)$$

III.4.1Torseur des actions de contact ou torseur des forces de liaison au point I

$$[contact]_I = [\vec{R}\ ,\vec{M}_I = \vec{0}].avec : \vec{R} = N\vec{n} + \vec{T}\ ; \qquad (III.22)$$

- $\vec{R}$ *représente la force de contact entre (S1)et (S2) ; sa composante* $\vec{N} = N\vec{n}$ *représente la réaction de (S2) sur (S1), et la force* $\vec{T}$ *représente la force de frottement de (S1) sur (S2).le vecteur unitaire* $\vec{n}$ *est normal au plan tangent* (π) *aux solides (S1) et (S2) au point I et il est dirigé du solide (S2) vers le solide (S1).*
- *Propriété de la force* $\vec{N} = N\vec{n}$ *: elle traduit la liaison unilatérale de (S1) sur (S2), c'est-à-dire que (S1) peut éventuellement s'éloigner de (S2) mais ne peut pas pénétrer à l'intérieur de (S2).*
- *La force de frottement* $\vec{T}$ *est parallèle au plan (* π *) ; elle est liée au coefficient de frottement f (réel positif ou nul) ; elle a les propriétés suivantes selon le mouvement de (S1) avec ou sans glissement au point I sur (S2) :*

	$\vec{u} = \vec{V}g = \vec{V}(S1/S2)_I \neq \vec{0}$ (avec glissement au point I)	$\vec{u} = \vec{V}(S1/S2) = \vec{0}$ (sans glissement au point I)
f > 0 (contact avec frottement au point I)	$\vec{u} = -\lambda\vec{T}, \lambda > 0$ et $\lVert\vec{T}\rVert = fN$	$\lVert\vec{T}\rVert < fN$
f = 0 (contact sans frottement au point I	$\vec{T} = \vec{0}$ ($\vec{R}$ est normal à (π))	$\vec{T} = \vec{0}$ ($\vec{R}$ est normal à (π)

III.4.2.Travail du torseur de contact au point I.

$$dW[contact] = \vec{R}.d\vec{I} \qquad (III.23)$$

$d\vec{I}$ le déplacement du point I tel que

$$d\vec{I} = \vec{u}.dt\ ; \qquad (III.24)$$

Ainsi le travail du torseur de contact est nul soit dans le cas de contact sans frottement soit dans le cas de contact sans glissement au point I.

III.5. L'ENERGIE MECANIQUE D' UN SOLIDE.

Par définition, l' énergie mécanique E d' un solide est la somme à tout instant t de ses énergies cinétique Ec et potentielle Ep .

$$E = Ec + Ep \qquad (III.25)$$

THEOREME DE L'ENERGIE MECANIQUE :

Ce théorème est déduit du théorème de l'énergie cinétique sous la forme différentielle (III.9).

Les efforts appliqués à un solide ne dérivent pas tous d' une fonction potentielle Ep ; on peut les classer en deux catégories :

- *les efforts dérivant d'une fonction potentielle Ep (Ep = - U (fonction de force)*
- *et les efforts ne dérivant pas d'une fonction potentielle notés efnp.*

Alors $dW(efforts) = dU + dW(efnp)$ *où* $dU = -dEp$

La relation (III) s'écrit :

$$dEc_{Ro}(S) = dW(efforts) = -\,dEp + d\,W(efnp)$$

$$dEc_{Ro}(S) + dEp = dW(efnp)$$

Soit $$dE = dW(efnp) \qquad \text{(III.26)}$$

La relation (III.26) exprime le théorème de l'énergie mécanique sous forme différentielle.

Notons que si tous les efforts dérivent d'une fonction potentielle Ep *alors*

$$dE = 0 \qquad \text{(III.27)}$$

On dit dans ce cas que l'énergie mécanique se conserve :

$$E = \text{constante à tout instant } t\,. \qquad \text{(III.28)}$$

IV. DYNAMIQUE NON GALILEENNE DU SOLIDE.

IV.1. DYNAMIQUE NON GALILEENE D' UN POINT MATERIEL M (Rappel)

On note $R_o = (O;\vec{x}_o,\vec{y}_o,\vec{z}_o)$ *le repère galiléen et*

$R = (O';\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *le repère non galiléen en mouvement par rapport au repère galiléen et* $(\vec{\Omega} = \vec{\Omega}_{R/Ro} \neq \vec{0})$.

Le mouvement du point M est caractérisé par :

$(\vec{V}_{Ro}(M) = \vec{V}_a \;;\; \vec{\Gamma}_{Ro}(M) = \vec{\gamma}_a)$ *dans Ro*

et $(\vec{V}_R(M) = \vec{V} \;;\; \vec{\Gamma}_R(M) = \vec{\gamma})$ *dans R*

La composition de mouvement nous donne :

$\vec{\gamma} = \vec{\gamma}_a - \vec{\gamma}_e - \vec{\gamma}_c$ *alors :*

$$m\vec{\gamma}_a = \sum \vec{F} \;\Rightarrow\; m\vec{\gamma} = \sum \vec{F} + \vec{F}_{ic} + \vec{F}_{ie} \qquad \text{(III.29)}$$

où

$\vec{F}_{ie}$ *est la force d'inertie d'entraînement = - m* $\vec{\gamma}_e$

$\vec{F}_{ic}$ *est la force d'inertie de Coriolis* $= -m\vec{\gamma}_{ic}$

Ces deux forces sont dues à l' effet de rotation du repère R par rapport à Ro et doivent être considérés dans la relation fondamentale de la dynamique non galiléenne.

IV.2. DYNAMIQUE NON GALILEENE D' UN SOLIDE

On note $R_o = (O;\vec{x}_o,\vec{y}_o,\vec{z}_o)$ *le repère galiléen et*

$R = (O';\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *le repère non galiléen en mouvement par rapport et (S) le solide en mouvement par rapport au repère R*

IV.2.1 RELATION FONDAMENTALE

{torseur dynamique dans $R = (O;\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ *}={torseur des efforts appliqués à (S)}+{torseur des forces d'inertie }*

$$[\, m\vec{\Gamma}_R(G \in S)\,,\ \vec{\delta}_R(A,S)\,] = [\vec{F}eff, \vec{M}_A(efforts)]_A + [\vec{F}_c, \vec{M}_A(Fc)]_A + [\vec{F}_{ie}, \vec{M}_A(Fie)]_A \qquad \text{(III.30)}$$

IV.2.2 REMARQUE :

Une fois que les deux torseurs des forces d'inertie de Coriolis et d'entraînement sont établis, le traitement de la dynamique non galiléenne est le même que celui de la dynamique galiléenne.