CHAPITRE VI

THEOREMES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE

THEOREMES FONDAMENTAUX DE LA DYNAMIQUE

1. Objectif de la dynamique

La dynamique permet d'analyser les liens existant entre les mouvements déjà décrits par la cinématique et les forces où actions qui leurs ont donné naissance.

Elle permet d'examiner le concept de force et d'une manière globale le concept d'efforts exercés sur un système matériel quelconque. Pour toutes ces raisons, nous sommes amenés à introduire la notion de torseur des efforts extérieurs, nécessaire à l'écriture du principe fondamental de la dynamique.

2. Notions de référentiels

A partir du principe de l'action et de la réaction et du principe fondamental de la dynamique, nous pouvons établir les théorèmes généraux de la dynamique dans un référentiel Galiléen ou non Galiléen.

En effet, un référentiel est dit Galiléen ou (absolu) si les lois de Newton exprimées dans celui-ci sont valables. Tout repère en mouvement de translation uniforme par rapport à un repère Galiléen est lui aussi Galiléen, car les accélérations constatées à partir d'un même point seront les même dans les deux repères.

3. Expression de la loi fondamentale de la dynamique

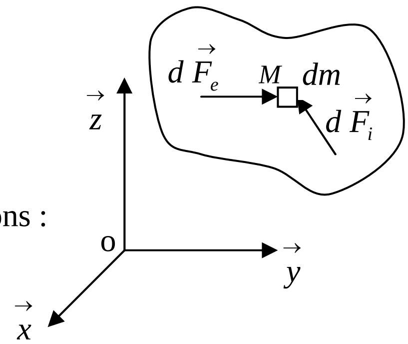
Soit un système matériel *(S)* non isolé et soumis à des interactions dans un repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$. Pour ce système matériel on distingue deux types d'actions :

- Les actions mécaniques intérieures, résultant des actions d'une partie de *(S)* sur une autre partie de *(S)* ; *ces actions sont appelées forces intérieures et notées* : $d\,\vec{F}_i$;
- Les actions mécaniques extérieures résultant des actions du reste de l'univers (le milieu extérieur) sur *(S)* , ces actions sont appelées forces extérieures et notées : $d\,\vec{F}_e$.

Il faut choisir convenablement les conditions aux limites du système pour pouvoir classer les actions (forces) intérieures et extérieures.

En un point quelconque M du système *(S)* , la relation fondamentale de la dynamique s'écrit :

$d\vec{F}_i + d\vec{F}_e = \vec{\gamma}(M)dm$



dm : élément de masse au voisinage du point M ;

$\vec{\gamma}(M)$: accélération du point M .

En sommant sur l'ensemble du système matériel, nous avons :

$$\int_S d\vec{F}_i + \int_S d\vec{F}_e = \int_S \vec{\gamma}(M)dm$$

En un point A quelconque de l'espace les moments, de ces forces, sont donnés par :

$$\int_S \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_i + \int_S \overrightarrow{AP} \wedge d\vec{F}_e = \int_S \overrightarrow{AP} \wedge \vec{\gamma}(M)dm$$

Nous supposons que le système matériel (S) n'échange pas de matière avec d'autres systèmes et que sa masse totale est constante.

Les actions mécaniques extérieures qui s'exercent sur *(S)* sont représentées par un torseur $[\tau_{Fext}]_A$: appelé torseur des forces extérieures dont les éléments de réduction au point A sont : $[\tau_{Fext}]_A = \begin{cases} \vec{F}_{ext} \\ \overrightarrow{M}_{Aext} \end{cases}$

$\vec{F}_{ext}$: est la résultante des forces extérieures s'exerçant sur le système *(S)*

$\overrightarrow{M}_{Aext}$: est le moment au point *A* des forces extérieures s'exerçant sur le système *(S)*.

Le principe fondamental de la dynamique montre que dans tout référentiel Galiléen, le torseur dynamique $[D]_A$ *du système (S) est égal au torseur des forces extérieures* $[\tau_{Fext}]_A$ *calculé au même point A .*

Les éléments de réduction du torseur dynamique $[D]_A$ *du système (S)* dans le repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ sont : $[D]_A = \begin{cases} \vec{D} \\ \vec{\delta}_A \end{cases}$

$\vec{D}$: la résultante dynamique ; $\vec{\delta}_A$: le moment dynamique au point *A*.

L'égalité des deux torseurs induit l'égalité de leurs éléments de réduction. Ce principe équivaut à la généralisation des lois de Newton. Les éléments des deux torseurs peuvent être calculés séparément et ensuite faire l'égalité des expressions obtenues.

Le point A par rapport auquel on calcul les moments est un point quelconque, il faut faire un choix judicieux pour faciliter l'écriture des équations. Souvent dans les problèmes de mécanique, on choisi le centre de masse du système car le moment d'inertie intervenant dans les calculs est plus facile à déterminer.

3.1. Théorème de la résultante dynamique

Soit un système matériel *(S)* en mouvement dans un repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et soumis à des actions extérieures. *La résultante dynamique du système matériel (S) est égale à la résultante des actions (forces) mécaniques extérieures.*

$$\vec{D}(S/R_0) = m\vec{\gamma}^0(G/R_0) = \sum \vec{F}_{ext}$$

G : est le centre de masse du système.

La résultante des forces extérieures est égale à la masse du système par l'accélération de son centre d'inertie.

3.2. Théorème du moment dynamique

Soit un système matériel *(S)* en mouvement dans un repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et soumis à des actions extérieures. *Le moment dynamique du système matériel (S) en un point A quelconque est égale au moment des actions (forces) mécaniques extérieures au même point A.*

$$\vec{\delta}_A(S/R_0) = \overrightarrow{M}_A(S/R_0)$$

Au centre d'inertie du système cette égalité s'écrirait :

$$\vec{\delta}_G(S/R_0) = \overrightarrow{M}_G(S/R_0) = \frac{d\,\vec{\sigma}_G(S/R_0)}{dt}$$

Comme nous l'avons déjà montré précédemment, le moment cinétique au point G centre d'inertie du système est indépendant du repère dans lequel il est mesuré, alors il est souvent plus simple d'effectuer le calcul des moments dynamiques au centre d'inertie des systèmes.

Remarque :

Le moment dynamique d'un système composé est égal à la somme des moments dynamiques des éléments qui le compose par rapport au même point.

3.3. Equations scalaires déduites du principe fondamental

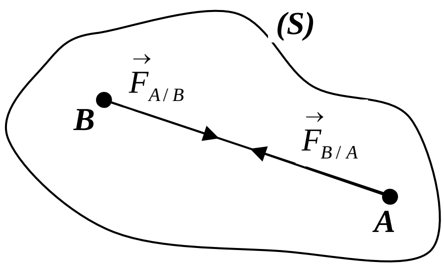
Les équations vectorielles de la résultante et du moment dynamique conduisent chacune à trois équations scalaires, soit pour les deux à six équations scalaires pour un système matériel donné.

Le choix du repère pour expliciter l'équation de la résultante dynamique est le choix du point où sera calculé le moment dynamique doivent être judicieux de manière à simplifier l'écriture mathématique des équations scalaires.

Ces équations scalaires sont des équations différentielles de second ordre et en générale non linéaires. Elles contiennent les caractéristiques d'inertie et les données géométriques du système ainsi que les composantes d'actions mécaniques appliquées au système.

4. Principe de l'action et de la réaction

Deux points A et B quelconque d'un système matériel *(S)* sont en interaction, ils s'influencent mutuellement par les actions et les réactions de l'un sur l'autre.



$\vec{F}_{A/B}$: action de A sur B

$\vec{F}_{B/A}$: action de B sur A

Ces deux actions s'équilibrent, le principe de l'action et de la réaction se traduit par l'équation : $\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \vec{0}$

Cette expression signifie que les actions sont portées par la droite qui joint les deux points A et B, on peut écrire alors : $\vec{F}_{A/B} = \lambda\ \overrightarrow{AB}$ et $\vec{F}_{B/A} = \lambda\ \overrightarrow{BA}$

$$\vec{F}_{A/B} + \vec{F}_{B/A} = \lambda\ \overrightarrow{AB} + \lambda\ \overrightarrow{BA} = \lambda\ (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$$

4.1. Théorème de l'action et de la réaction

Soient deux systèmes matériels *(S₁)* et *(S₂)* en mouvement dans un référentiel Galiléen R_0.

Appelons *(S)* le système constitué de la réunion des deux systèmes : $(S)=(S_1)\cup(S_2)$

Le torseur des forces extérieures s'exerçant sur (S_1) se décompose en :

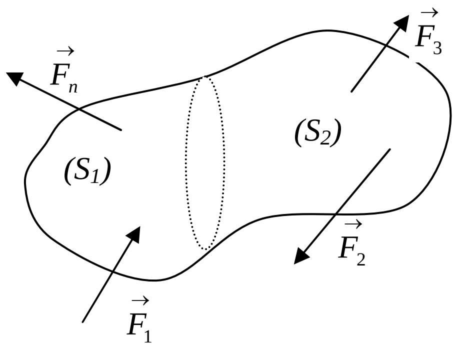
- $[\tau]_{Fext1}$: résultant des actions du milieu extérieur *(S)* sur (S_1) ;
- $[\tau]_{12}$: résultant des actions de (S_2) sur (S_1) ;

Le torseur des forces extérieures s'exerçant sur (S_2) se décompose, en :

- $[\tau]_{Fext2}$: résultant des actions du milieu extérieur *(S)* sur (S_2) ;
- $[\tau]_{21}$: résultant des actions de (S_1) sur (S_2) ;

Appliquons le principe fondamental de la dynamique dans le repère Galiléen R_0 aux différents systèmes :

- à (S_1) : $[D]_1=[\tau]_{Fext1}+[\tau]_{12}$
- à (S_2) : $[D]_2=[\tau]_{Fext2}+[\tau]_{12}$
- à (S) : $[D]=[\tau]_{Fext1}+[\tau]_{Fext2}$



Sachant que : $[D]=[D]_1+[D]_2$

en les remplaçant par leurs expressions on obtient :

$$[\tau]_{Fext1}+[\tau]_{Fext2}=[\tau]_{Fext1}+[\tau]_{21}+[\tau]_{Fext2}+[\tau]_{12} \quad \Leftrightarrow \quad [\tau]_{12}+[\tau]_{12}=0 \;\Rightarrow\; [\tau]_{21}=-[\tau]_{12}$$

Cette expression traduit le théorème de l'action et de la réaction. Pour le système matériel *(S)* la relation : $[\tau]_{12}+[\tau]_{12}=0$ caractérise les actions intérieures.

D'une manière générale, lorsqu'il est possible de caractériser toutes les actions mécaniques intérieures à un système matériel *(S)* par un torseur $[\tau]_{F\,\mathrm{int}}$, celui-ci est toujours nul.

$$[\tau]_{F\,\mathrm{int}}=0$$

4.2. Propriétés des forces intérieures

Le torseur des forces intérieures a comme éléments de réduction : $[\tau]_{F\,\mathrm{int}}=\begin{cases}\vec{R}_{\mathrm{int}}=\vec{0}\\ \vec{M}_{A\,\mathrm{int}}=\vec{0}\end{cases}$

$$\vec{R}_{\mathrm{int}}=\sum_{i=1}^{n}(\vec{F}_{ij}+\vec{F}_{ji})=\vec{0} \qquad \text{action réaction} \quad \vec{F}_{ij}=-\vec{F}_{ji}$$

Le moment des forces intérieures en un point A quelconque de l'espace est donné par :

$$\vec{M}_{A\text{int}} = \sum_i \left(\overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{F}_{ij} + \overrightarrow{AM}_j \wedge \vec{F}_{ji} \right) = \sum_i \left(\overrightarrow{AM}_i \wedge \vec{F}_{ij} + (\overrightarrow{AM}_i + \overrightarrow{M_iM}_j) \wedge \vec{F}_{ji} \right)$$

$$= \sum_i \left(\overrightarrow{AM}_i \wedge (\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) + \overrightarrow{M_iM}_j \wedge \vec{F}_{ji} \right) = \vec{0}$$

car $(\vec{F}_{ij} + \vec{F}_{ji}) = \vec{0}$ et $\overrightarrow{M_iM}_j \wedge \vec{F}_{ji} = \vec{0}$

Le torseur des forces intérieures est toujours un torseur nul : $[\tau]_{F\text{int}} = 0$

5. Principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non Galiléen

Soit un repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et un système matériel *(S)* lié à un repère $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ en mouvement quelconque mais déterminé et connu par rapport à R_0.

L'application du théorème fondamental au système matériel *(S)* dans son mouvement par rapport au repère Galiléen $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ se traduit par l'égalité du torseur dynamique du système et du torseur des forces extérieures en un point A quelconque et s'écrit :

$$[D]_{A/R_0} = [\tau_{Fext}]_{A/R_0}$$

$$[D]_{A/R_0} = \begin{cases} \vec{D} = \int_S \vec{\gamma}^0(M)dm \\ \vec{\delta}_A^0 = \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}^0(M)dm \end{cases}$$

Nous avons vu précédemment en cinématique du solide que la loi de composition des vecteurs accélérations s'écrit :

$$\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^1(M) + \left(\vec{\gamma}^0(O_1) + \frac{d^0\vec{\Omega}_1^0}{\text{dt}} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M} \right) + 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M) \right)$$

Sous forme réduite cette expression s'écrit : $\vec{\gamma}^0(M) = \vec{\gamma}^1(M) + \vec{\gamma}_1^0(M) + \vec{\gamma}_C(M)$

$\vec{\gamma}^0(M)$: accélération absolue du point M ;

$\vec{\gamma}^1(M)$: accélération relative du point M ;

$\vec{\gamma}_1^0(M)$: accélération d'entraînement du point M ;

$\vec{\gamma}_C(M)$: accélération de Coriolis (ou complémentaire) du point M.

Ces trois accélérations donnent naissance à des résultantes dynamiques et à des moments dynamiques en un point A quelconque de l'espace, nous aurons ainsi les trois torseurs suivants:

$$[D]_{A/R_0} = [D]_{A/R_1} + [D_{ie}]_A + [D_{ic}]_A = [\tau_{Fext}]_{A/R_0}$$

- Torseur dynamique du système (S) dans son mouvement relatif par rapport à R_1 :

$$[D]_{A/R_1} = \begin{cases} \int_S \vec{\gamma}^1(M)dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}^1(M)dm \end{cases}$$

- Torseur des forces d'inertie d'entraînement du système (S)

$$[D_{ie}]_{A \in R_1/R_0} = \begin{cases} \int_S \vec{\gamma}_1^0(M)dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}_1^0(M)dm \end{cases}$$

- Torseur des forces de Coriolis :

$$[D_{ic}]_A = \begin{cases} \int_S 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M)\right)dm \\ \int_S \overrightarrow{AM} \wedge 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M)\right)dm \end{cases}$$

En remplaçant les expressions des trois torseurs, nous déduisons facilement le torseur dynamique dans le repère non Galiléen R_1 :

$$[D]_{A/R_1} = [\tau_{Fext}]_{A/R_0} - [D_{ie}]_{A \in R_1/R_0} - [D_{ic}]_A$$

Cette expression d'égalité des torseurs se traduit par deux équations vectorielles :

$$\int_S \vec{\gamma}^1(M)dm = \sum_i \vec{F}_{ext} - \int_S \vec{\gamma}_1^0(M)dm - \int_S 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M)\right)dm$$

$$\int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}^1(M)dm = \overrightarrow{AM} \wedge \sum_i \vec{F}_{ext} - \int_S \overrightarrow{AM} \wedge \vec{\gamma}_1^0(M)dm - \int_S \overrightarrow{AM} \wedge 2\left(\vec{\Omega}_1^0 \wedge \vec{V}^1(M)\right)dm$$

Les actions d'inertie d'entraînement et de Coriolis sont des actions immatérielles, donc fictives qui traduisent l'influence du mouvement d'un repère non Galiléen par rapport à un repère Galiléen.

6. Théorème de l'énergie cinétique

Dans de nombreux cas, pour déterminer l'équation du mouvement d'un solide où d'un système de solide, il est plus judicieux d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique afin d'aboutir à la solution du problème mécanique.

De plus la dérivée de l'énergie cinétique est liée à la puissance des efforts intérieurs et extérieurs agissant sur le solide.

6.1. Travail et puissance d'une force

Soit un système discret composé de n particules M_i de masse m_i, mobiles dans un référentiel Galiléen $R(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. Soit $\overrightarrow{OM_i}$ le vecteur position dans le repère R de la particule M_i, son vecteur vitesse s'écrirait :

$$\vec{V}(M_i)=\frac{d\,\overrightarrow{OM_i}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad d\,\overrightarrow{OM_i}=\vec{V}(M_i)dt$$

$d\,\overrightarrow{OM_i}$: le vecteur déplacement élémentaire durant un temps dt

Si la particule M_i est soumise à une force $\vec{F_i}$, le travail élémentaire de cette force est égale à :

$$dW_i=\vec{F_i}\bullet d\,\overrightarrow{OM_i}$$

La puissance que reçoit la particule M_i est égal à :

$$P_i=\frac{dW_i}{dt}=\vec{F_i}\bullet\frac{d\,\overrightarrow{OM_i}}{dt}=\vec{F_i}\bullet\vec{V}(M_i)$$

il faut noter que chaque terme $\vec{F_i}$ contient les forces intérieures $\vec{F}_{i\,\mathrm{int}}$ et extérieures $\vec{F}_{iext}$ tel que : $\vec{F_i}=\vec{F}_{i\,\mathrm{int}}+\vec{F}_{iext}$; pour l'ensemble du système nous aurons :

$$W=\sum_i\vec{F_i}\bullet d\,\overrightarrow{OM_i}=\sum_i(\vec{F}_{i\,\mathrm{int}}+\vec{F}_{iext})\bullet d\,\overrightarrow{OM_i}$$

$$P=\sum_i\vec{F_i}\bullet\vec{V}(M_i)=\sum_i(\vec{F}_{i\,\mathrm{int}}+\vec{F}_{iext})\bullet\vec{V}(M_i)$$

6.2. Théorème de l'énergie cinétique

L'ensemble des n particules M_i de masse m_i et de vitesse $\vec{V}(M_i)$ en mouvement dans le référentiel Galiléen $R(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ a pour énergie cinétique

$$E_C = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m_i \left(\vec{V}(M_i) \right)^2$$

La dérivée de cette expression par rapport au temps donne :

$$\frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{\vec{V}(M_i)}{dt} \bullet \vec{V}(M_i)$$

or la force à laquelle est soumise la particule M_i est égale à : $\vec{F}_i = m_i \dfrac{d\vec{V}(M_i)}{dt}$, on obtient

ainsi : $$\frac{dE_C}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \bullet \vec{V}(M_i) = P$$

Comme la force $\vec{F}_i$ contient des forces d'origines intérieures et extérieures, cette relation

peut s'écrire : $$\frac{dE_C}{dt} = P_{\text{int}} + P_{ext}$$

P_{int} : puissance fournie au système par les forces intérieures ;

P_{ext} : puissance fournie au système par les forces extérieures.

La puissance des efforts intérieurs et extérieurs est égale à la dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique.

En intégrant l'expression précédente entre deux instants t_1 et t_2, le théorème de l'énergie

cinétique devient : $$E_C(t_2) - E_C(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} (P_{\text{int}} + P_{ext}) dt$$

$$E_C(t_2) - E_C(t_1) = W_{\text{int}} + W_{ext}$$

la variation de l'énergie cinétique entre deux instants t_1 et t_2 est égale au travail de toutes les forces intérieures et extérieures qui s'appliquent sur l'ensemble des particules.

6.3. Energie cinétique d'un solide indéformable

Dans le cas d'un solide indéformable l'énergie cinétique est donnée par :

$$E_C = \frac{1}{2}\int_S \vec{V}^2(M)dm$$

Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé fixe et $R_1(O_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ un repère lié au solide *(S)* indéformable, en mouvement quelconque tel que $O_1 \in (S)$.

Soit $\vec{\Omega}_1^0$: la vitesse de rotation du repère R_1 par rapport au repère R_2 et M un point quelconque du solide, nous écrire par la cinématique du solide :

$$\vec{V}^0(M) = \vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

L'énergie cinétique du solide *(S)* en mouvement par rapport à un repère fixe R_0 a pour expression : $\dfrac{dE_C^0}{dt} = \int_S \vec{V}^0(M) \bullet \dfrac{d\vec{V}^0(M)}{dt}dm = \int_S \vec{V}^0(M) \bullet \vec{\gamma}^0(M)dm$

$$\frac{dE_C^0}{dt} = \int_S \left(\vec{V}^0(O_1) + \vec{\Omega}_1^0 \wedge \overrightarrow{O_1M}\right) \bullet \vec{\gamma}^0(M)dm$$

en utilisant la règle de permutation dans le produit mixte, l'expression devient :

$$\frac{dE_C^0}{dt} = \vec{V}^0(O_1) \bullet \int_S \vec{\gamma}^0(M)dm + \vec{\Omega}_1^0 \bullet \int_S \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{\gamma}^0(M)dm$$

qui peut s'écrire aussi sous la forme de produit de deux torseurs :

$$\frac{dE_C^0}{dt} = \left\{\begin{array}{l} \vec{\Omega}_1^0 \\ \vec{V}^0(O_1) \end{array}\right. \bullet \left\{\begin{array}{l} \int_S \vec{\gamma}^0(M)dm \\ \int_S \overrightarrow{O_1M} \wedge \vec{\gamma}^0(M)dm \end{array}\right. = [C]_{O_1} \bullet [D]_{O_1}$$

La dérivée de l'énergie cinétique est égale au produit des torseurs cinématiques et dynamiques, elle est donc égale à la puissance des quantités d'accélérations absolues.
On a vu précédemment, d'après le théorème fondamental de la dynamique que le torseur dynamique est égal au torseur des efforts extérieurs pour un solide indéformable, d'où l'expression finale :

$$\frac{dE_C}{dt} = P_{ext}$$

6.4. Conservation de l'énergie totale

Le théorème de l'énergie cinétique peut alors s'écrire :

$$dE_C = P_{ext}dt = dW_{ext}$$

Si toutes les forces extérieures dérivent d'une fonction potentielle $U(r)$ indépendante du temps, elles peuvent s'écrire sous la forme : $\vec{F}_{ext} = -\overrightarrow{grad}\,U(r)$ et on déduit :

$$dW_{ext} = \vec{F}_{ext} \bullet d\,\vec{r} = -dU(r)$$

Le théorème de l'énergie cinétique devient :

$dE_C = -dU(r) \quad \Leftrightarrow \quad d(E_C + U) = 0$ et finalement : $E_C + U = Cte$

$$\boldsymbol{E_C + U = E}\ , \qquad \textbf{\textit{E : Energie totale}}$$

Cette expression traduit le théorème de conservation de l'énergie totale.

7. Dynamique des solides en contacts

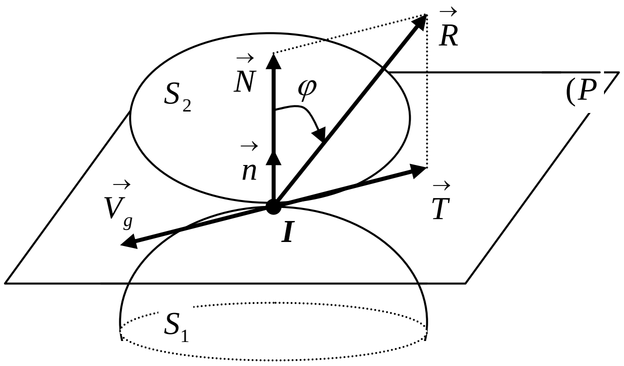
7.1. Actions de contact entre deux solides : Lois de Coulomb

Les lois de coulomb introduisent les notions de frottement de glissement entre les solides.

Soient deux solides *(S₁)* et *(S₂)* liés aux repères R_1 et R_2 mobiles par rapport à un repère R_0 fixe. Les deux solides en mouvement sont assujettis à un contact ponctuel à tout instant en un point I appartenant au plan *(P)* tangent en ce point aux deux solides.

$\vec{n}$ normale en I au plan *(P)*

$\vec{T} \in (P)$



Au point de contact des deux solides nous pouvons distinguer :

$I_1 \in S_1$: point du solide S_1 en contact avec le solide S_2 à l'instant t ;

$I_2 \in S_2$: point du solide S_2 en contact avec le solide S_1 au même instant t ;

$I \in R_0$: la position commune de $I_1 \in S_1$ et $I_2 \in S_2$ au même instant t ;

Le point géométrique I n'appartient ni à S_1 ni à S_2. Les points I, I_1, I_2 occupent géométriquement la même position mais ils ont des rôles cinématiques différents.

La vitesse de glissement du solide S_2 par rapport au solide S_1 appartient au plan *(P)* tangent au point de contact, elle est donnée par la relation :

$$\vec{V}_g(I) = \vec{V}_g(S_2/S_1) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1)$$

Le solide S_1 exerce une action sur le solide S_2, tel que représenté sur la figure ci-dessus et de même pour S_2 qui exerce la même action sur S_1 mais dans le sens opposé. Ces actions peuvent être représentées par leurs torseurs respectifs en un point A quelconque de l'espace.

Action de S_1 sur S_2 : $[T_{21}]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \overrightarrow{M}_{1A} \end{cases}$; Action de S_2 sur S_1 : $[T_{12}]_A = \begin{cases} \vec{R} \\ \overrightarrow{M}_{2A} \end{cases}$

La réaction se compose d'une normale $\vec{N}$ au plan tangent *(P)* au point I et d'une composante tangentielle $\vec{T}$ située dans le plan *(P)* tel que : $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$

Les deux composantes satisfont aux lois de coulomb déterminées expérimentalement.

7.2. Réaction normale $\vec{N}$

La réaction normale $\vec{N}$ est toujours dirigée vers les solides auquel elle est appliquée, c'est une force répulsive. Elle ne dépend ni de la nature des surfaces en contact ni de la vitesse de glissement entre les deux solides. Elle disparaît lorsqu'il n'a plus de contact entre les solides.

7.3. Réaction tangentielle $\vec{T}$

Deux cas peuvent se présenter : - Contact entre deux solides avec glissement

- Contact entre deux solides sans glissement

a) Contact avec glissement

Quand le solide S_2 glisse sur le solide S_1, la vitesse de glissement n'est pas nulle, elle est donnée par : $\vec{V}_g(I) = \vec{V}_g(S_2/S_1) = \vec{V}^0(I_2) - \vec{V}^0(I_1) \neq \vec{0}$

La réaction tangentielle $\vec{T}$ est colinéaire à la vitesse de glissement, mais de sens opposée. Pour une vitesse de glissement fixée, le module de la réaction tangentielle (force de frottement) est proportionnel au module de la réaction normale : $\left|\vec{T}\right| = f \left|\vec{N}\right|$

f : est le coefficient de frottement de glissement, il dépend de la nature et de l'état des surfaces en contact. Ce coefficient, souvent indépendant de la vitesse de glissement, s'exprime aussi par la relation :

$$f = tg\varphi \quad , \quad \varphi \text{ : est l'angle de frottement.}$$

En réalité quand les solides glissent l'un par rapport à l'autre, on constate que le coefficient de frottement diminue légèrement. De là, on distingue deux coefficients :

f_S : coefficient de frottement statique pour $\vec{V}_g(S_2/S_1) = \vec{0}$

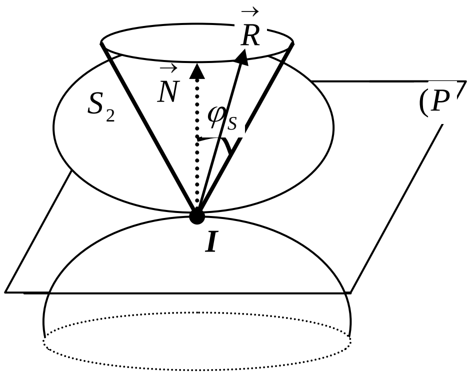
f_D : coefficient de frottement dynamique pour $\vec{V}_g(S_2/S_1) \neq \vec{0}$

Si le mouvement se fait sans frottement : $f_D = 0$ alors $\vec{T} = \vec{0}$, alors la réaction $\vec{R}$ est normale au plan *(P)*.

b) Contact sans glissement

Le solide S_2 ne glisse pas sur le solide S_1 tant que : $\left|\vec{T}\right| \leq f \left|\vec{N}\right|$

On peut constater géométriquement qu'il n'y a pas de glissement tant que la réaction $\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$ est située à l'intérieur du cône de frottement statique.



c) Roulement et Pivotement

Les lois de Coulomb peuvent se généraliser aux actions de frottements de roulement et de pivotement. Le roulement se fait le long de l'axe portant la vitesse de glissement et le pivotement se fait autour de la normale au point de contact I des deux solides. Le moment résistant au pivotement au point I est noté : $\overrightarrow{M}_{Ip}$ et le moment résistant au roulement au point I est noté : $\overrightarrow{M}_{Ir}$

Dans le cas du glissement nous avons :

$$\left|\overrightarrow{M}_{Ip}\right| = \lambda_p \left|\vec{N}\right| \quad \text{et} \quad \left|\overrightarrow{M}_{Ir}\right| = \lambda_r \left|\vec{N}\right|$$

λ_p et λ_r : sont appelés coefficient de résistance au pivotement et au roulement.

Ils ont les mêmes dimensions que les longueurs et sont de valeurs très faibles devant les coefficients de frottement statique et dynamique.

7.4. Travail des actions de contact

Nous avons montré précédemment que les points de contact ont respectivement des vitesses $\vec{V}^0(I_2)$ et $\vec{V}^0(I_1)$, donc des déplacements élémentaires : $dI_{S2} = \vec{V}^0(I_2)dt$ et $dI_{S1} = \vec{V}^0(I_1)dt$

Le travail de la résultante $\vec{R}$ est donné par :

$$dW_{S2} = \vec{R}\bullet dI_{S2} = \vec{R}\bullet\vec{V}^0(I_2)dt$$

$$dW_{S1} = -\vec{R}\bullet dI_{S1} = -\vec{R}\bullet\vec{V}^0(I_1)dt$$

Le travail total sera :

$$dW_{S1} + dW_{S1} = \vec{R}\bullet\vec{V}^0(I_2)dt - \vec{R}\bullet\vec{V}^0(I_1)dt = \vec{R}\bullet\left(\vec{V}^0(I_2)dt - \vec{V}^0(I_1)dt\right) = \vec{R}\bullet\vec{V}_g(I)$$

Or nous savons que $\vec{N} \perp \vec{V}_g(I)$ et que $\vec{T} \,//\, \vec{V}_g(I)$ alors :

$$dW = \vec{R}\bullet\vec{V}_g(I) = \left(\vec{N}+\vec{T}\right)\bullet\vec{V}_g(I) = \vec{T}\bullet\vec{V}_g(I)$$

Comme $\vec{T}$ et $\vec{V}_g(I)$ sont de sens contraires, alors le travail des actions de contact est toujours négatif : $dW = \vec{T}\bullet\vec{V}_g(I) \leq 0$

C'est une énergie dissipée souvent sous forme de chaleur

Le travail peut être nul si :

- il n'y a pas de frottement $\vec{T} = \vec{0}$;
- il n'y a pas de glissement $\vec{V}_g(I) = \vec{0}$