UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
Domaine Sciences et Technologies
Mention Mathématiques et Informatique

Année universitaire 2021-2022

Parcours : Mathématiques **Grade : Licence** **Semestre : S4**

EXAMEN DE MECANIQUE GENERALE

Durée : 3 heures

On considère un rectangle MNPQ de longueur $2b$ et de largeur $2a$, avec O le milieu de MN. Ce rectangle, noté (S), est homogène de masse m et situé dans le plan $(O,\vec{x},\vec{y})$ du repère $S=(O,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ lié à (S) et tel que $\overrightarrow{MN}=2b\vec{x}$. On note G son centre de masse (voir figure 2).

Il est en mouvement par rapport au repère galiléen $R_0=(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0},\overrightarrow{z_0})$, d'axe vertical ascendant $(O,\vec{z}_o)$, de façon que sa longueur MN reste en contact avec le plan $\pi_0=(O,\overrightarrow{x_0},\overrightarrow{y_0})$ (voir figure 1). Au cours de son mouvement, il est repéré par les angles d'Euler (ψ,θ). On note $R_1=(O,\vec{x},\vec{v},\overrightarrow{z_0})$ le repère intermédiaire.

Au cours de ce mouvement, il est soumis à son poids et à une liaison au point O dont le torseur en ce point O, $[liaison]_O=\left[\vec{L},\overrightarrow{M}(O)\right]$, a pour vecteur $\vec{L}=(X,Y,Z)_{/R1}$ et pour moment $\overrightarrow{M}(O)=(L,M,N)_{/R1}$.

Dans tout le problème, on suppose que la liaison en O est parfaite et **on prendra** $R_1=(O,\vec{x},\vec{v},\overrightarrow{z_0})$ **comme repère de projection.**

Partie 1 :

Dans le mouvement du solide (S) par rapport au repère galiléen R_0 :

1) a) Déterminer l'axe (ligne) des nœuds et en déduire que la rotation propre ϕ est nulle ($\phi=0$). Préciser les paramètres de mouvement.

   b) Déterminer les éléments de réduction au point O du torseur cinématique.

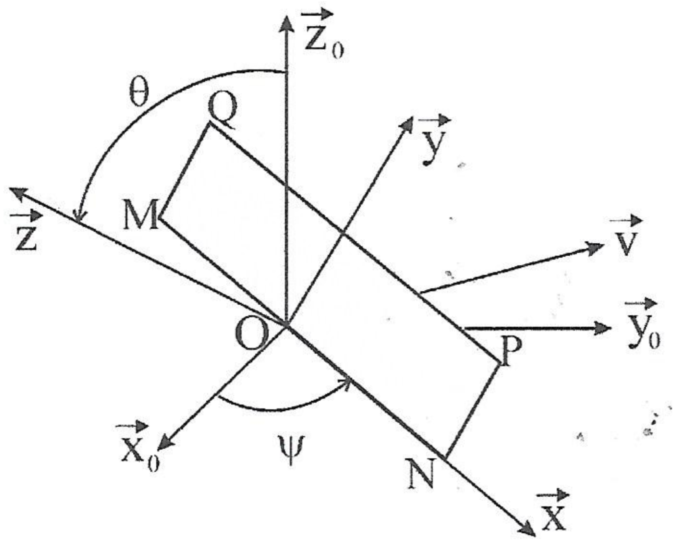

Figure 1

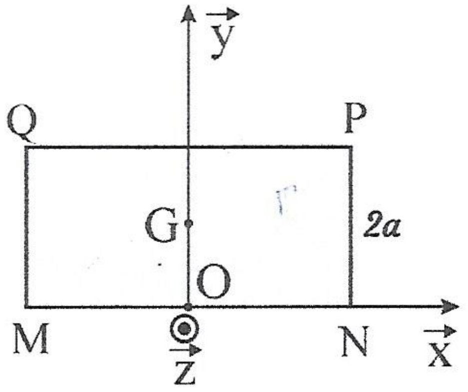

Figure 2

2) a) Déterminer l'opérateur d'inertie au point O de (S) noté $J(O,S)_{/S}$.

b) Déterminer l'opérateur d'inertie au point O de (S) noté $J(G,S)_{/S_G}$ avec $S_G = (G,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$ en utilisant le théorème de HUYGENS.

Pour une valeur particulière de b $(b=2a)$, l'opérateur d'inertie $J(O,S)_{/S}$ est de la forme :

$$J(O,S)_{/S} = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 2I \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour la suite du problème, on prendra cette expression de $J(O,S)_{/S}$.

3) Déterminer les éléments de réduction au point O du torseur cinétique.

4) Déterminer les éléments de réduction au point O du torseur dynamique.

5) Déterminer également son énergie cinétique.

Partie 2 :

6) a) En analysant la liaison parfaite au point O, montrer que le torseur de liaison au point O se réduit à la forme $[liaison]_O = \left[\vec{L}, \vec{M}(O) = M\vec{v}\right]$.

b) En déduire les éléments de réduction au point O du torseur des efforts appliqués au solide (S).

7) En projetant le théorème du moment cinétique au point O sur les axes respectifs $(O,\vec{x})$ et $(O,\vec{z}_o)$ montrer qu'on obtient deux équations différentielles du second ordre notées respectivement équation 1 et équation 2.

8) En déduire une intégrale première de mouvement notée équation 3.

9) a) En déduire également des équations 1 et 3 une équation différentielle en θ notée équation 4.

b) Intégrer cette équation 4 pour obtenir une équation différentielle du premier ordre en θ notée équation 5 sachant que $\ddot{\theta}d\theta = d\left(\dot{\theta}^2/2\right)$ où $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2$.

10) Montrer que l'intégrale première de l'énergie existe et donner son expression notée équation 6.

11) A l'aide des équations 3 et 6, retrouver l'équation 5.