UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
FACULTE DES SCIENCES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

Année universitaire 2016-2017

Parcours : Mathématiques **Grade : Licence** **Semestre : S4**

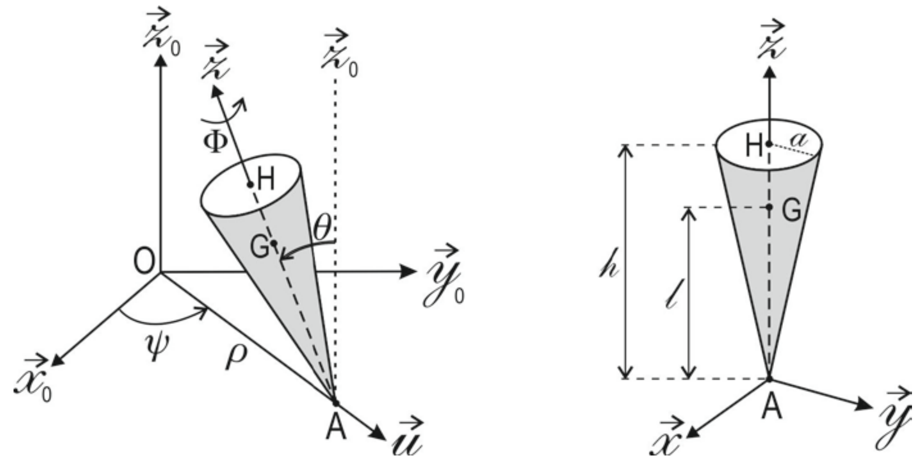
EXAMEN DE RATTRAPAGE DE MECANIQUE GENERALE

Durée : 3 heures

L'espace est rapporté au repère galiléen $R_0 = (O,\overrightarrow{x_o},\overrightarrow{y_o},\overrightarrow{z_o})$, l'axe $(O,\overrightarrow{z_o})$ étant vertical ascendant. On étudiera, par rapport au repère $R_0 = (O,\overrightarrow{x_o},\overrightarrow{y_o},\overrightarrow{z_o})$, le mouvement d'un solide de révolution (S), qui est un cône homogène de sommet O, de masse m, de hauteur h et dont la base circulaire a pour centre H et rayon a. On note $(A,\vec{z})$ l'axe de révolution de (S) et G son centre d'inertie tel que $\overrightarrow{AG} = \ell\vec{z}$. Le repère orthonormé lié à (S) est $S = (A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$.

Le mouvement du solides (S) s'effectue dans un champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g\vec{z}_o$ et de la façon suivante : son sommet A se déplace sur le plan horizontal $P_0 = (O,\overrightarrow{x_o},\overrightarrow{y_o})$ tel que $\overrightarrow{OA} = \rho(t)\vec{u}$. A tout instant t, sa position est repérée par les angles d'Euler habituels $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, $\Phi = \Phi(t)$ et le rayon polaire $\rho = \rho(t)$. On note $R_1 = (O,\vec{u},\vec{v},\overrightarrow{z_o})$ et $R_2 = (O,\vec{u},\vec{\tau},\vec{z})$ les deux repères intermédiaires entre les repères $R_0 = (O,\overrightarrow{x_o},\overrightarrow{y_o},\overrightarrow{z_o})$ et $S = (A,\vec{x},\vec{y},\vec{z})$. On suppose que la liaison en A entre (S) et le plan P_O est parfaite et schématisée par le torseur $[liaison]_A = \left[\vec{L},\overrightarrow{M}(A)\right]$, et ayant pour vecteur $\vec{L} = (X,Y,Z)_{/R_2}$ et pour moment $\overrightarrow{M}(A) = (L,M,N)_{/R_2}$.

On prendra le repère $R_2 = (O,\vec{u},\vec{\tau},\vec{z})$ comme repère de projection.



PARTIE A – CINEMATIQUE

1. a) En exprimant $\overrightarrow{OA}$ dans R_0, montrer que $\overrightarrow{OA}$ est fonction de ρ et ψ.

   b) Paramétrer le mouvement du solide (S) par rapport à R_0. Quel est alors le nombre de degrés de liberté du solide (S) ?

   c) Donner l'expression du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}_{S/R_0}$.

2. Calculer la vitesse $\vec{V}_{R_O}(G \in S)$.

3. Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}_{R_O}(G \in S)$.

PARTIE B - GEOMETRIE DES MASSES

On note que l'élément de volume en coordonnées cylindriques est $dv = \rho.d\rho.d\theta.dz$ et le volume du cône $V = \dfrac{\pi h a^2}{3}$.

4. Déterminer la position du centre d'inertie G du solide (S), en exprimant ℓ en fonction de h.

5. Déterminer la matrice d'inertie au point A du solide (S) notée $J(A,S)_{/S} = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}$ en fonction de m, a et h.

6. Déterminer a en fonction de h pour que $A{=}B{=}C$.

7. On note I cette valeur commune de A, B et C. Montrer que $I = \dfrac{6mh^2}{5}$.

Dans la suite du problème, on considère que le point A de (S) est confondu avec l'origine O du repère R_0 (donc ρ ne varie plus ; $\rho = 0$). On étudiera donc le mouvement de (S) autour du point fixe A (confondu avec O). De plus, on se mettra dans le cas où les éléments de $J(A,S)_{/S}$ sont tels que $A = B = C = I = \dfrac{6mh^2}{5}$; $D = E = F = 0$ et que $\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{AG} = \ell \vec{z}$ (on ne remplacera pas ℓ par la valeur obtenue à la question 4).

PARTIE C – CINETIQUE

Le solide (S) ayant un axe de révolution $(\mathrm{A},\vec{\mathrm{z}})$, on a $J(A,S)_{/R_2} = J(A,S)_{/S}$.

8. Déterminer le torseur cinétique en A de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0). (utilisez l'expression de $\vec{V}_{R_O}(G \in S)$ calculée à la question 2).

9. Déterminer le torseur dynamique en A de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0). (utilisez l'expression de $\vec{\Gamma}_{R_O}(G \in S)$ calculée à la question 3).

10. Déterminer l'énergie cinétique de (S) par rapport à (R_0).

PARTIE D – DYNAMIQUE

11. En analysant la liaison parfaite en A, montrer que le torseur de liaison en ce point se réduit à

$$\left[liaison\right]_A = \left[\vec{L}, \overrightarrow{M}(A) = \vec{0}\right]$$

12. Déterminer les éléments de réduction au point A du torseur des efforts appliqués au solide (S).

13. En utilisant la forme différentielle du théorème de l'énergie cinétique, donner l'expression de l'intégrale première de l'énergie.

14. a) Donner les équations scalaires déduites des théorèmes généraux au point A.
    b) Préciser les équations de mouvement.

15. En projetant sur l'axe $(A, \vec{z}_0)$ le théorème du moment dynamique au point A, montrer que l'on obtient une intégrale première du mouvement.

16. En projetant sur l'axe $(A, \vec{z})$ le théorème du moment dynamique au point A, montrer que l'on obtient une autre intégrale première du mouvement.