PROBLEME DE MECANIQUE DU SOLIDE

Soit $R_0 = (O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère orthonormé direct, avec $(O, \vec{z}_0)$ vertical ascendant, supposé galiléen.
Le système étudié est composé d'un demi-disque (S) homogène d'épaisseur négligeable, de masse m, de rayon a et d'une tige (T) infiniment mince de longueur ℓ et de masse négligeable. On désigne par G le centre de masse de (S) et par C le milieu de son diamètre AB.

Soient $S = (C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ le repère lié au solide (S) tel que $(C, \vec{y})$ soit porté par AB et $R_T = (O, \vec{x}, \vec{v}, \vec{z}_0)$ le repère lié à la tige (T). La tige (T) est soudée au demi-disque (S) au point C de telle sorte que la liaison en C est telle que le plan de (S) (plan $(C, \vec{y}, \vec{z})$) reste vertical et constamment perpendiculaire à la tige (T) au cours du mouvement. La tige (T) elle-même est confondue avec l'axe $(O, \vec{x})$ (voir figures). On désigne par g l'accélération de la pesanteur.
On note $\psi = (\vec{x}_0, \vec{x}) = (\vec{y}_0, \vec{v}) = \omega t$ avec ω constant et $\theta = (\vec{z}_0, \vec{z}) = (\vec{v}, \vec{y})$.
On admettra que le torseur des actions de contact (liaison) s'exerçant en C sur le solide (S) est :

$$[liaison]_C = \left[\vec{L}, \overrightarrow{M}(C)\right] \text{ avec } \vec{L} = (X, Y, Z)_{/S} \text{ et } \overrightarrow{M}(C) = (0, M, N)_{/S}$$

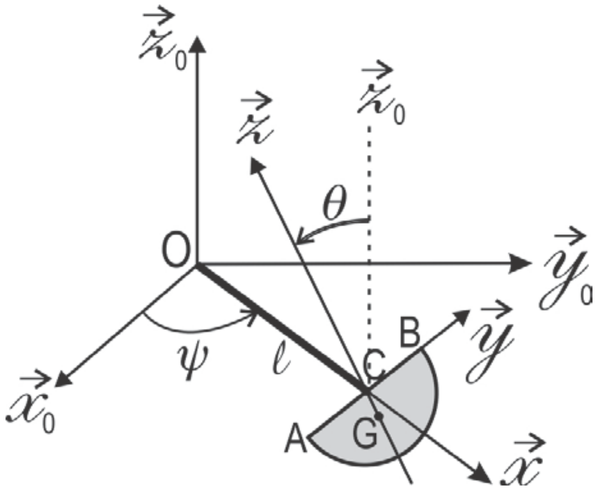

Figure 1 : description du système

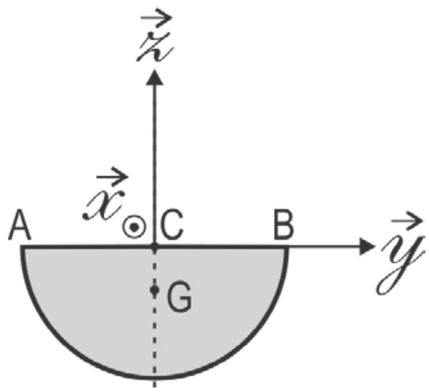

Figure 2 : vue de (S) dans le plan $(C, \vec{x}, \vec{y})$

On prendra le repère $S = (C, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ comme repère de projection.

PARTIE A : ***Géométrie des masses***

1. Déterminer la position du centre d'inertie G du solide (S) en calculant l'expression de $\overrightarrow{CG}$.

2. Déterminer la matrice d'inertie au point C du solide (S) notée $J(C, S)_{/S}$

3. Déterminer la matrice d'inertie au point G du solide (S) notée $J(G, S)_{/S}$

Pour la suite problème, on prendra $\overrightarrow{CG} = -h\vec{z}$ (avec $h > 0$) **et** $J(G,S)_{/S} = \begin{pmatrix} A_G & 0 & 0 \\ 0 & B_G & 0 \\ 0 & 0 & C_G \end{pmatrix}$

PARTIE B : *Cinématique*

4. a) Paramétrer le mouvement du solide (S) par rapport à R_0. Quel est alors le nombre de degrés de liberté du solide (S) ?

   b) Donner les expressions des vecteurs instantanés de rotation $\overrightarrow{\Omega}_{T/R_0}$ et $\overrightarrow{\Omega}_{S/R_0}$.

5. Calculer les vitesses $\vec{V}_{R_O}(C \in S)$ et $\vec{V}_{R_O}(G \in S)$.

6. Calculer l'accélération $\vec{\Gamma}_{R_O}(G \in S)$.

PARTIE C : *Cinétique*

7. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}_{R_0}(G,S)$ en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).

8. Déterminer le moment dynamique $\vec{\delta}_{R_0}(G,S)$ en G de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).

9. Déterminer l'énergie cinétique $Ec_{R_0}(S)$ de (S) dans son mouvement par rapport à (R_0).

PARTIE D : *Dynamique*

10. Déterminer les éléments de réduction au point G du torseur des efforts appliqués au solide (S).
(utiliser la relation d'antisymétrie pour calculer le moment $\overrightarrow{M}(G)$ en G à partir de $\overrightarrow{M}(C)$).

11. Donner les équations scalaires déduites du théorème du centre de masse (ou de la résultante dynamique).

12. Donner les équations scalaires déduites du théorème du moment dynamique en G.

13. Déduire des équations scalaires renfermant Y, l'équation de mouvement du solide (S) en notant que :

$$A_G + \frac{16ma^2}{9\pi^2} = A_G + mh^2 = \frac{ma^2}{2} \quad \text{et} \quad C_G - B_G - \frac{16ma^2}{9\pi^2} = C_G - B_G - mh^2 = 0$$

14. Déduire de cette équation de mouvement une intégrale première de mouvement de la forme $\dot{\theta}^2 = f(\theta)$ en notant que $2\dot{\theta}\ddot{\theta}dt = 2\ddot{\theta}d\theta = d\dot{\theta}^2$.