**Mention de MATHEMATIQUES ET INFORMATIQUE**
**Domaine : SCIENCES ET TECHNOLOGIE**
**UNIVERSITE D'ANTANANARIVO**

*TD* **GEOMETRIE DES SU**

**Conseil du jour** : *"Celui qui aime la mathématique pourrait devenir un bon mathématicien."* .

**EXERCICE I**( **Formes différentielles et Produit extérieur**)

Sur $\mathbb{R}^4$, on définit les formes différentielles $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$ suivantes : quel que soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ on a $\alpha(x, y, z, t) = x^2 e^{x+y} dx - (4x^3 + y^3)\, dy$, $\beta(x, y, z, t) = x^2 y dx + y^3 dy$, $\gamma(x, y, z, t) = x^2 y e^{z+t} dz + (xyz - yzt)\, dt$.
Calculer $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \wedge \alpha$, $d(\beta) \wedge \gamma$, $d^2(\beta)$, $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma$, $d(\beta) \wedge d(\gamma)$, $\alpha.\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)$ ainsi que $\gamma.\left(2xy\frac{\partial}{\partial x} - z^2\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + yz^2\frac{\partial}{\partial t}\right)$

**EXERCICE II**( **Forme différentielle, Fermeture et Produits**)

Soit $\omega$ la forme différentielle définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par :
$\omega = (x^2 + y^2 + z^2)^r (xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy)$.

1. Pour quelle valeur de $r$ la forme $\omega$ est-elle fermée $(d\omega = 0)$ ?
2. Pour $r = 1$, calculer $\omega.\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} + z\frac{\partial}{\partial z} + t\frac{\partial}{\partial t}\right)$.
3. Pour $r = 1$, calculer $d\omega$ et $\omega \wedge d\omega$.

**EXERCICE III**( **Forme différentielle, Fermeture, Exactitude, Primitives et Facteur intégrant**)

1. Considérons la forme différentielle $\omega(x, y) = (2xy - y^2)\, dx + (x^2 - 2xy)\, dx$.
   - a) La forme $\omega$ est-elle fermée ? exacte ? justifiez votre réponse.
   - b) Trouver une primitive $F$ de $\omega$.
2. On consid'ere la forme différentielle $\omega = (x^2 + y^2 + 2x)\, dx + 2ydy$.
   - a) Montrer que $\omega$ n'est pas exacte.
   - b) Trouver une fonction $\varphi(x)$, non nulle, telle que $\omega_1 = \varphi(x)\, \omega$ soit exacte.
   - c) Trouver alors une fonction $f$ telle que $df = \omega_1$. (On dit que $\varphi$ est un facteur intégrant.)
3. Même question sur $\omega = (x^2 + 3y)\, dx + (-y^3)\, dy$.
4. Même question sur $\omega = x^2 dx + 2xydy + z^2 dx$.
5. On considère la forme différentielle $\omega = (y^3 - 6xy^2)\, dx + (3xy^2 - 6x^2 y)\, dy$.
   - a) Montrer que $\omega$ est exacte sur $\mathbb{R}^2$.
   - b) Calculer l'intégrale de $\omega$ sur le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, allant de $A = (1, 2)$ vers $B = (3, 4)$.

**EXERCICE IV**( **Champ gradient, Potentiel et Circulation**)

On donne le champ vectoriel $\vec{V}(x, y, z) = (y^2 cos(x), 2ysin(x) + e^2 z, 2ye^2 z)$.

1. Montrer que ce champ est un champ de gradient.
2. Déterminer le potentiel $U(x, y, z)$ dont dérive ce champ sachant qu'il vaut 1 à l'origine.

3. Quelle est la circulation de ce champ de $A\,(0,1,0)$ à $B\left(\frac{\pi}{2},3,0\right)$ ?

**<u>EXERCICE V</u>( Aire d'une surface définie par son équation explicite )**

On veut calculer l'aire de $S$ définie par $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3/z=x^2+y^2 \text{ et } z\leq 4\}$.

1. Quel est le domaine $D$ ?
2. Calculer $\sigma\,(x,y)$.
3. Calculer l'aire de $S$ (il est conseillé d'utiliser les coordonnées polaires pour calculer l'intégrale double).

**<u>EXERCICE VI</u>( Intégrale de surface-application)**

On définit la surface $S$ par $z=2x+2y,\ x>0,\ y>0,\ x+2y<4$.

1. Calculer $\sigma\,(x,y)$.
2. Faire une figure représentant $D$.
3. Que vaut l'aire de $D$ ? En déduire l'aire de $S$
4. On suppose que $S$ est homogène (c'est-à-dire sa masse surfacique est constante), calculer les coordonnées du centre de gravité de $S$.

**Indication :**

On utilise les notations du **théorème** suivant :

Etant données une fonction $f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ et une surface $S$ dont l'équation cartésienne explicite est $z=\varphi\,(x,y)\,,\ ((x,y)\in D)$, où $\varphi$ est différentiable. On pose : $p\,(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial x}\,(x,y)\,,\ q\,(x,y)=\frac{\partial\varphi}{\partial y}\,(x,y)\,,\ \sigma\,(x,y)=\sqrt{1+p^2\,(x,y)+q^2\,(x,y)}$ alors : $\int\int_S f d\sigma=\int\int_D f\,(x,y,\varphi\,(x,y))\,\sigma\,(x,y)\,dxdy$.

**<u>EXERCICE VII</u> (Orientation d'une surface)**

1. $S$ est la demi-sphère de centre $O$ et de rayon $R$, située dans le demi-espace $x\geq 0$, on oriente la surface par les normales unitaires qui font un angle obtus avec $Ox$, déterminer le champ de vecteurs unitaires correspondant.
2. $S$ est la surface d'équation $z=x^2+y^2$, on oriente la surface par les normales unitaires qui font un angle obtus avec $Oz$, déterminer le champ de vecteurs unitaires correspondant.
3. $S$ est le plan d'équation $2x3y+5z=8$, on oriente la surface par les normales unitaires qui font un angle aigu avec $Oy$, déterminer le champ de vecteurs unitaires correspondant.
4. $S$ est la surface d'équation $x^2+y^2+2z^2=1$, on oriente la surface vers l'intérieur, déterminer le champ de vecteurs unitaires correspondant.

**<u>EXERCICE VIII</u> ( Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface orientée)**

Soit la surface $S$ d'équation $z=x^2+y^2$ avec $(z\leq 1)$ et le champ de vecteurs $\vec{V}$ de composantes $\left(xz,z,-\frac{z^2}{2}\right)$. On oriente $S$ par les normales qui font un angle aigu avec $Oz$.

(a) Faire une figure représentant $S$ et $D$.

(b) Calculer $p\,(x,y)\,,\ q\,(x,y)\,,\ \tilde{V_1}\,(x,y)\,,\tilde{V_2}\,(x,y)\,,\ \tilde{V_3}\,(x,y)$, que vaut $\epsilon$ ?

(c) Calculer le flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers $S$.

**Indication :**

On reprend les notations de la **proposition** suivante :

La surface $S$ est définie par l'équation $(z = \varphi(x,y)\,,\ (x,y) \in D)$, on suppose que $\varphi$ est différentiable. La surface est orientée, $\epsilon = 1$ si le champ de normales fait un angle aigu avec $Oz$, $\epsilon = -1$ sinon . On note $p(x,y) = \dfrac{\partial \phi}{\partial x}(x,y)\,, q(x,y) = \dfrac{\partial \phi}{\partial y}(x,y)$.

Le champ de vecteurs $\vec{V}$ a pour composantes $V_1,\ V_2,\ V_3$, on note $\tilde{V_1}(x,y) = V_1(x,y,\varphi(x,y)),\ \tilde{V_2}(x,y) = V_2(x,y,\varphi(x,y)),\ \tilde{V_3}(x,y) = V_3(x,y,\varphi(x,y))$.

On a alors l'expression du flux du champ de vecteurs $\vec{V}$ à travers la surface $S$ orientée :

$\phi_S\left(\vec{V}\right) = \int\int_S \vec{V}.\vec{n}d\sigma = \epsilon \int\int_D \left(-p(x,y)\tilde{V_1}(x,y) - q(x,y)\tilde{V_2}(x,y) + \tilde{V_3}(x,y)\right) dxdy$