

Université d'Antananarivo
 Domaines: Sciences et Technologies
 Mention: Mathématiques-Informatique
 Semestre 4

EXERCICE I

Série n°01

Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$.

- 1) Déterminer la densité de probabilité g de la variable aléatoire $Y = X^2$.
- 2) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$ (Indication: Utiliser une intégration par partie afin de trouver une relation entre $E(Y)$ et $E(Y^2)$ pour le calcul de la variance.)
- 3) En remarquant que la densité g est la densité d'une variable aléatoire suivant la loi Gamma $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, montrer que la densité de variable aléatoire $Y_n = X_1^2 + \dots + X_n^2$ suit la loi de Gamma $\left(\frac{1}{2}, \frac{n}{2}\right)$, qu'on la note loi de Khi-deux à n -degré de liberté, déduire $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.

EXERCICE II

Une population P est formée par $\frac{1}{40}$ Malagasy et les autres étrangers. On choisit 100 personnes de P d'une manière non exhaustive au hasard. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de Malagasy parmi les personnes choisies.

- 1) Quelle est la loi de probabilité de X ?
- 2) Quelle autre loi de probabilité peut-on dire suivre X ? Préciser votre réponse.

Soit la série statistiques suivante

x_i	0	1	2	3	4
n_i	14	24	28	24	10

- 3) On suppose que la variable aléatoire X suit la loi de probabilité de la question 2, donner les effectifs théoriques.
- 4) A l'aide du test de χ^2 au seuil de signification 5%, tester l'hypothèse $H_0 : X$ suit cette loi de probabilité de la question 2.