T

Année universitaire: 2021-2022

Université d'Antananarivo
Domaine: Sciences et Technologies
Mention: Mathématiques-Informatiques

EXERCICE 1 (Table de quantiles $N(0,1)$)

On suppose que le poids d'un nouveau né est une variable aléatoire normale d'écart-type égal à 0,5 kg. Le poids moyen des 49 enfants nés au mois de janvier 2004 dans un hôpital a été de 3,6 kg.

1) Déterminer un intervalle de confiance à 95% pour le poids moyen d'un nouveau né dans cet hôpital.

2) Quel serait le niveau de confiance d'un intervalle de longueur 0,1 kg centré en 3,6 pour ce poids moyen?

EXERCICE 2 (Table de quantiles de Student $\mathcal{S}(n-1)$ ou $\mathcal{T}(n-1)$ dans le cours)

Puisque la densité de la loi de Student $\mathcal{S}(n-1)$ est une fonction paire, si on note $W \xrightarrow{loi} \mathcal{S}(n-1)$

$$P\{|W| \leq t\} = 1-\alpha \Leftrightarrow 2P\{W \leq t\} - 1 = 1-\alpha \Leftrightarrow P\{W \leq t\} \;=\; 1-\alpha/2$$

La valeur de t vérifiant cette égalité est appelée aussi le *quantile* d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi $\mathcal{S}(n-1)$ et est notée $\mathcal{S}^{n-1}_{1-\alpha/2}$ (ou $t_{1-\frac{\alpha}{2}}$ dans le cours).

$$P\{|W| \leq \mathcal{S}^{n-1}_{1-\alpha/2}\} = 1-\alpha$$

La table des quantiles des loi $\mathcal{S}(n)$ pour les différentes valeurs de n est donnée dans la Table 2. Construire un intervalle de confiance de la moyenne μ de niveau de confiance 0.95 si $n = 25$. Indication on écrit:

$$P\left\{\left|\frac{\sqrt{n}}{S_n}(\bar{X}_n - \mu)\right| \leq \mathcal{S}^{n-1}_{0.975}\right\} = 0.95$$

Année universitaire: 2021-2022

Université d'Antananarivo
Domaine: Sciences et Technologies
Mention: Mathématiques-Informatiques

TABLES STATISTIQUES

Table 1: Table des quantiles de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

	0	0.001	0.002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0.009
0	$-\infty$	-3.090	-2.878	-2.748	-2.652	-2.576	-2.512	-2.457	-2.409	-2.366
0.01	-2.326	-2.290	-2.257	-2.226	-2.197	-2.170	-2.144	-2.120	-2.097	-2.075
0.02	-2.054	-2.034	-2.014	-1.995	-1.977	-1.960	-1.943	-1.927	-1.911	-1.896
0.03	-1.881	-1.866	-1.852	-1.838	-1.825	-1.812	-1.799	-1.787	-1.774	-1.762
0.04	-1.751	-1.739	-1.728	-1.717	-1.706	-1.695	-1.685	-1.675	-1.665	-1.655
0.05	-1.645	-1.635	-1.626	-1.616	-1.607	-1.598	-1.589	-1.581	-1.572	-1.563
0.06	-1.555	-1.546	-1.538	-1.530	-1.522	-1.514	-1.506	-1.498	-1.491	-1.483
0.07	-1.476	-1.468	-1.461	-1.454	-1.447	-1.440	-1.433	-1.425	-1.419	-1.412
0.08	-1.405	-1.398	-1.392	-1.385	-1.379	-1.372	-1.366	-1.359	-1.353	-1.347
0.09	-1.341	-1.335	-1.329	-1.323	-1.316	-1.311	-1.305	-1.299	-1.293	-1.287
0.9	1.282	1.287	1.293	1.299	1.305	1.311	1.316	1.323	1.329	1.335
0.91	1.341	1.347	1.353	1.359	1.366	1.372	1.379	1.385	1.392	1.398
0.92	1.405	1.412	1.419	1.425	1.433	1.440	1.447	1.454	1.461	1.468
0.93	1.476	1.483	1.491	1.498	1.506	1.514	1.522	1.530	1.538	1.546
0.94	1.555	1.563	1.572	1.581	1.589	1.598	1.607	1.616	1.626	1.635
0.95	1.645	1.655	1.665	1.675	1.685	1.695	1.706	1.717	1.728	1.739
0.96	1.751	1.762	1.774	1.787	1.799	1.812	1.825	1.838	1.852	1.866
0.97	1.881	1.896	1.911	1.927	1.943	1.960	1.977	1.995	2.014	2.034
0.98	2.054	2.075	2.097	2.120	2.144	2.170	2.197	2.226	2.257	2.290
0.99	2.326	2.366	2.409	2.457	2.512	2.576	2.652	2.748	2.878	3.090

La première ligne et la première colonne fournissent la valeur de α quand on cherche t tel que $P\{N \leq t\} = \alpha$ lorsque $N \xrightarrow{loi} \mathcal{N}(0,1)$. Ainsi, lorsque l'on cherche t tel que $P\{N \leq t\} = 0.975$, on regarde la ligne correspondant à 0.97 et la colonne correspondant à 0.005, on trouve alors à l'intersection la valeur $t = 1.960$.

TEST DE KHI-DEUX

Les tests de conformité sont destinés à vérifier si un échantillon peut être considéré comme extrait d'une population donnée ou représentatif de cette population, vis-à-vis d'un paramètre comme la moyenne, la variance ou la fréquence observée. Ceci implique que la loi théorique du paramètre est connue avec niveau de la population.

PRINCIPE DU TEST

On connait une distribution observée (résultat d'une expérience)

Valeur du caractère:	C_1	...	C_n
Effectifs observés:	O_1	...	O_n

On veut comparer cette distribution à une loi connue (binomiale, poisson, gaussienne, etc ...) qui donnerait les effectifs théoriques suivantes :

Valeur du caractère:	C_1	...	C_n
Effectifs observés:	T_1	...	T_n

Pour faire un test, il faut passer par les étapes suivantes :

Première étape :

Soit H_0 l'hypothèse nulle « les observation suivent la loi théorique » et H_1 l'hypothèse alternative contre.

Deuxième étape :

On doit calculer les effectifs théorique par la relation suivante $T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{O_i}{N}$ telle que N est le nombre totale des classes et O_i est l'effectif observé.

Troisième étape : On mesure l'écart entre la distribution théorique et la distribution observée, on calcule pour chaque classe, le nombre $\frac{(O_i-T_i)^2}{T_i}$. Ce nombre est appelé écart quadratique relatif.

On définit alors la variable aléatoire S telle que : $S = \sum_{i=1}^{n} \frac{(O_i-T_i)^2}{T_i}$ cette somme sera faible si les écarts entre les valeurs théoriques et les valeurs observées sont petits, telle sera grande dans le cas contraire.

On fait la comparaison et on déduit la décision.

Table 2: Table des quantiles de la loi de Student $\mathcal{S}(n)$

	0.75	0.8	0.85	0.9	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9995
1	1	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.92	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.765	0.978	1.25	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.741	0.941	1.19	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.61
5	0.727	0.92	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.44	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.86	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.703	0.883	1.1	1.383	1.833	2.262	2.821	3.25	4.781
10	0.7	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.694	0.87	1.079	1.35	1.771	2.16	2.65	3.012	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.14
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.69	0.865	1.071	1.337	1.746	2.12	2.583	2.921	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.74	2.11	2.567	2.898	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.33	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.687	0.86	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.85
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.08	2.518	2.831	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.685	0.858	1.06	1.319	1.714	2.069	2.5	2.807	3.768
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.06	2.485	2.787	3.725

La première colonne donne la valeur de n et la première ligne fournit la valeur de α quand on cherche t tel que $P\{W \leq t\} = \alpha$ lorsque $W \xrightarrow{loi} \mathcal{S}(n)$. Ainsi, lorsque l'on cherche t tel que $P\{W \leq t\} = 0.975$ lorsque $W \xrightarrow{loi} \mathcal{S}(10)$, on regarde la ligne correspondant à $n = 10$ et la colonne correspondant à 0.975, on trouve alors à l'intersection la valeur $t = 2.228$.

Loi du khi-deux avec k degrés de liberté
Quantiles d'ordre $1 - \gamma$

k	γ = 0.995	0.990	0.975	0.950	0.900	0.500	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	3.36	7.78	9.94	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.81	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

Si k est entre 30 et 100 mais n'est pas un multiple de 10, on utilise la table ci-haut et on fait une interpolation linéaire. Si $k > 100$ on peut, grâce au théorème limite central, approximer la loi $\chi^2(k)$ par la loi $N(k, 2k)$.