# Solutions exercices sur Chap. II

**Exercice 1.** Si $a + b \leqslant n$, alors il existe $x \in \mathbb{N}$ tel que $n = (a + b) + x$. Alors $n = a + (b + x)$, ce qui montre que $a \leqslant n$ ; de même, $n = b + (a + x)$, donc $b \leqslant n$.

**Exercice 2.** Posons $x = n - (a + b)$ et $y = (n - a) - b$ (il est possible de calculer $x$ et $y$ car $a + b \leqslant n$ et $a \leqslant n$ par l'exercice 1). Par définition de la soustraction, les entiers $x$ et $y$ vérifient

$$n = (a + b) + x \quad \text{et} \quad n - a = y + b. \tag{1}$$

Par définition de $n - a$, on a $(n - a) + a = n$. En ajoutant $a$ aux deux membres de la deuxième de équation (1), nous avons donc $n = (y + b) + a$. En comparant avec l'expression de $n$ dans la première équation de (1), on a $(a + b) + x = (y + b) + a$. En simplifiant par $a + b$, on a $x = y$, i.e. $n - (a + b) = (n - a) - b$.

**Exercice 3.** (1) Pour $p$ fixé, soit la propriété $P(k) : \mathrm{succ}^k(p) = p + k$.
• $P(0)$ est vraie car $\mathrm{succ}^0(p) = p = p + 0$.
• Supposons $P(k)$ vraie : $\mathrm{succ}^k(p) = p + k$ (HR). Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathrm{succ}^{k+1}(p) &= \mathrm{succ}(\mathrm{succ}^k(p)) \\
&= \mathrm{succ}(p + k) \quad \text{par (HR)} \\
&= (p + k) + 1 = p + (k + 1).
\end{aligned}$$

Ainsi, $P(k + 1)$ est vraie et par récurrence sur $k$, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque $p$ et quelconque, la propriété est vraie pour tout $k$ et $p \in \mathbb{N}$.
(2) On a donc $\mathrm{succ}^p(0) = 0 + p = p$ ; on retrouve ainsi le résultat du cours

$$\underbrace{\mathrm{succ}(\mathrm{succ}(\cdots \mathrm{succ}(0) \cdots))}_{p \text{ fois}} = p. \tag{2}$$

**Exercice 4.** (1) Pour $p \in \mathbb{N}$ fixé, soit la propriété $P(k)$ : $\mathrm{prec}^k(p) = p - k$ pour $0 \leqslant k \leqslant p$. On va montrer par récurrence sur $k$ (donc $k$ entre $0$ et $p$) que $P(k)$ est vraie.

• $P(0)$ est vraie car $\mathrm{prec}^0(p) = p = p - 0$.

• Supposons $P(k)$ vraie (pour $k < p - 1$). Alors

$$\begin{aligned} \mathrm{prec}^{k+1}(p) &= \mathrm{prec}(\mathrm{prec}^k(p)) \\ &= \mathrm{prec}(p-k) \quad \text{par (HR)} \\ &= (p-k) - 1 \\ &= p - (k+1) \quad \text{par l'Exercice 1 avec } n = p, a = k \text{ et } b = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $P(k+1)$ est vraie, donc, par récurrence sur $k = 0, \ldots, p$, $P(k)$ est vraie. Puisque $p$ est quelconque, $P(k)$ est vraie pour tout $k$ et $p \in \mathbb{N}$.

(2) On a donc $\mathrm{prec}^p(p) = p - p = 0$ et on retrouve ainsi le résultat du cours

$$\underbrace{\mathrm{prec}(\mathrm{prec}(\cdots \mathrm{prec}(p) \cdots))}_{p \text{ fois}} = 0. \tag{3}$$

**Exercice 5.** Supposons qu'il existe un entier $a$ te que $n < a < n + 1$. On sait que $n < a$ implique $n + 1 \leqslant a$, ce qui donne $n + 1 \leqslant a < n + 1$. Par la transitivité de la relation $\leqslant$, on a $n + 1 < n + 1$, ce qui est absurde. Donc un tel $a$ n'existe pas.

**Exercice 6.** Démontrons par récurrence : soit $P(n)$ : $p(q + n) = pq + pn$ et $(p + q)n = pq + pn$

*Initialisation* : $P(0)$ s'écrit : $p(q + 0) = pq + p \times 0$

vraie puisque $p(q + 0) = pq$ et $p \times 0 = 0 \Rightarrow pq + p \times 0 = pq$

et de plus, $(p + q) \times 0 = 0$ de même que $p \times 0 + q \times 0 = 0 + 0 = 0$

*Hérédité* : supposons que $P(n)$ est vérifiée

c'est à dire d'une part $p(q + n) = pq + pn$ et d'autre part : $(p + q)n = pq + pn$

$$\begin{aligned}
\text{Alors, } p(q+(n+1)) &= ((q+n)+1) \text{ d'après l'associativité de } + \\
&= p\times(q+n)+p \text{ d'après la définition de } \times \\
&= pq+pn+p \text{ hypothèse de récurrence} \\
&= pq+p(n+1) \text{ d'après la définition de } \times \\
\text{De même } (p+q)(n+1) &= (p+q)n+(p+q) \text{ d'après la définition de } \times \\
&= pn+qn+p+q \text{ hypothèse de récurrence} \\
&= pn+p+qn+q \text{ commutativité de } + \\
&= p(n+1)+q(n+1) \text{ d'après la définition de } \times
\end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence sur $n$, $P(n)$ est vraie pour tout $n$.

**Exercice 7.** En effet soit $(Pn)$ : $(np)q = n(pq)$

*Initialisation* : $(0\times p)q = 0\times q = 0$ et $0\times(pq) = 0$

*Hérédité* : Supposons $(np)q = n(pq)$ Alors

$$\begin{aligned}
((n+1)p)q &= (np+p)q \text{ (distributivité)} \\
&= (np)q+pq \text{ (distributivité)} \\
&= n(pq)+pq \text{ (hypothèse de récurrenc} \\
&= (n+1)(pq) \text{ (distributivité)}
\end{aligned}$$

**Exercice 8.** Soit $m \in \mathbb{N}$ ; on a

$$\begin{aligned}
\text{mult}(m,1) &= \text{add}(\text{mult}(m,0),m) \\
&= \text{add}(0,m) = m,
\end{aligned}$$

donc 1 est neutre à droite. Montrons que 1 est neutre à gauche. Soit la propriété $P(n) : 1\cdot n = n$.

- $P(0)$ est vraie car $1\cdot 0 = 0$.
- Supposons $P(n)$ vraie, i.e. $1\cdot n = n$. On a

$$\begin{aligned}
1\cdot(n+1) &= 1\cdot n + 1\cdot 1 \quad \text{(ditributivité)} \\
&= n+1 \quad \text{((HR) et 1 neutre à droite)},
\end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vraie. Par récurrence sur $n$, $P(n)$ est donc vraie pour tour entier $n$ et 1 est neutre à gauche. Il est donc neutre pour la multiplication dans $\mathbb{N}$.

**Exercice 9.** $P(n) : mn = nm$ ($m$ fixé).

- $P(0)$ est vraie car $m0 = 0 = 0m$.

• Supposons $P(n)$ vraie, i.e. $mn = nm$ (HR). On a

$$\begin{aligned} m(n+1) &= mn + m \text{ (distributivité à gauche et 1 neutre)} \\ &= nm + m \quad \text{(par (HR))} \\ &= (n+1)m \quad \text{(distributivité à droite et 1 neutre)}. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie. Par réccurence sur $n$, $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Puisque $m$ est quelconque, on a la commutativité.

**Exercice 10.** Si $a = 0$, alors $n = 1$ convient. D'où son existence.

Si $a \neq 0$, alors $n = a$ convient puisque $b \geqslant 1 \Longrightarrow nb \geqslant a$.

**Exercice 11.** D'après l'exercice 8, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $a \leqslant nb$. Soit $A$ l'ensemble de ces entiers ; alors $A$ est non vide, donc admet un plus petit élément $r$. On a alors $(r-1)b < a \leqslant rb$. En posant $q = r - 1$, on a $qb < a \leqslant (q+1)b$.

**Exercice 12.** Il suffit d'appliquer deux fois la compatibilité de l'ordre et de la multiplication

$$a \leqslant b \Rightarrow a + c \leqslant b + c \text{ et } c \leqslant d \Rightarrow c + b \leqslant d + b.$$

On en déduit, l'addition étant commutative dans $\mathbb{N}$ et par transitivité de $\leqslant$ que $a + c \leqslant b + d$.