ANALYSE REELLE

Harinaivo ANDRIATAHINY

Table des matières

Chapitre 1

Structures topologiques

A - Notions topologiques fondamentales

1.1 Ensembles ouverts

1- Définition On appelle **structure topologique** (ou simplement **topologie**) sur un ensemble X une structure constituée par la donnée d'un ensemble $\mathcal{O}$ des parties de X possédant les propriétés suivantes :
$(\mathcal{O}_1)$ Toute réunion d'ensemble de $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.
$(\mathcal{O}_2)$ Toute intersection finie d'ensemble de $\mathcal{O}$ est un ensemble de $\mathcal{O}$.
$(\mathcal{O}_3)$ $X \in \mathcal{O}$ et $\emptyset \in \mathcal{O}$.
Les ensembles de $\mathcal{O}$ sont appelés **ensembles ouverts** (ou simplement **ouverts**).

2- Définition On appelle **espace topologique** (e.t) un ensemble muni d'une structure topologique $(X, \mathcal{O})$. Les éléments de X sont appelés **points**.

Exemples

1. Soit X un ensemble quelconque. On peut munir X de plusieurs topologies différentes :
   - $\mathcal{O} = \{\emptyset, X\}$ est une topologie sur X qui est appelée **topologie grossière** sur X.
   - $\mathcal{O} = \mathcal{P}(X)$=l'ensemble de toutes les parties de X est une topologie sur X appelée **topologie discrète** sur X. Dans cette topologie, tout sous ensemble de X est ouvert.
2. Soit E un ensemble quelconque et soit $d : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ une distance sur E, i.e. une application vérifiant les propriétés suivantes :

- $d(x,y) = d(y,x)$, $\forall x, y \in E$.
- $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$, $\forall x, y, z \in E$.
- $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$.

(E,d) est un **espace métrique** (e.m.). On appelle **boule ouverte** de centre $x_0 \in E$ et de rayon $r > 0$ l'ensemble

$$B_o(x_0, r) = \{x/\ x \in E, d(x, x_0) < r\}.$$

Une partie A de E est ouverte si et seulement si $\forall x \in A, \exists r > 0$ tel que $B_o(x,r) \subseteq A$. La famille $\mathcal{O}$ des parties A ainsi définies est une topologie sur E. $\mathcal{O}$ est appelée **topologie associée à la distance** d. Une partie $A \subseteq E$ est ouverte si et seulement si A est réunion quelconque de boules ouvertes.

3. Sur l'ensemble $\mathbb{R}$, on pose $d(x,y) = |x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. C'est une distance sur $\mathbb{R}$. La topologie associée à cette distance est appelée **topologie usuelle** (ou **topologie naturelle**) de $\mathbb{R}$.
4. Soit $X = \{a, b\}$, $\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{a\}\}$. $\mathcal{O}$ est une topologie sur X appelée **couple de points connexes**.

1.2 Voisinages

1- Définition Dans un e.t. X, on appelle **voisinage d'une partie** $A \subseteq X$ tout ensemble qui contient un ouvert contenant A. Les voisinages d'une partie $\{x\}$ réduit à un seul point s'appellent **voisinages du point** x. L'ensemble des voisinages de x est noté $\mathcal{V}(x)$ (pour $A \subseteq X$, c'est $\mathcal{V}(A)$), i.e.

$$\mathcal{V}(x) = \{V \subseteq X/\ \exists O \text{ ouvert tel que } x \in O \subseteq V\}.$$

2- Théorème Pour qu'une partie A d'un e.t. X soit ouverte, il faut et il suffit qu'elle soit voisinage de chacun de ses points, i.e.

$$A \subseteq X \text{ est ouverte } \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ A \in \mathcal{V}(x).$$

Preuve
($\Rightarrow$) Si A est ouverte, il est clair que $\forall x \in A$, $A \in \mathcal{V}(x)$.
($\Leftarrow$) Supposons que A est voisinage de chacun de ses points. $\forall x \in A, \exists\, O_x$ ouvert de X tel que $x \in O_x \subseteq A$. On a

$$A = \bigcup_{x \in A} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in A} O_x \subseteq A.$$

D'où on a $A = \cup_{x \in A} O_x$. Ainsi A est ouvert.

□

3- Proposition Les ensembles de $\mathcal{V}(x)$ possèdent les propriétés suivantes :

(i) $\forall x \in A, \mathcal{V}(x) \neq \emptyset$ et $x \in V, \forall V \in \mathcal{V}(x)$.

(ii) Si $V \in \mathcal{V}(x)$ et $V \subseteq U$, alors $U \in \mathcal{V}(x)$.

(iii) Si $V_1, V_2 \in \mathcal{V}(x)$, alors $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{V}(x)$.

(iv) $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $\exists W \in \mathcal{V}(x)$ tel que $\forall y \in W, V \in \mathcal{V}(y)$.

4- Définition Dans un e.t. X, on appelle **système fondamental de voisinages** (ou **base de voisinages**) d'un point x tout ensemble noté $\mathcal{B}$ de voisinages de x tel que

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), \exists\, U \in \mathcal{B}(x) \text{ vérifiant } U \subseteq V.$$

Exemples

1. Dans un espace discret, $\{x\}$ constitue une base de voisinages du point x.
2. Dans un e.t. quelconque, l'ensemble de tous les ouverts contenant x est une base de voisinages de x.
3. Dans un e.m., la famille $B_o(x, r)$, $r > 0$ est une base de voisinages de x.

1.3 Base d'une topologie

1- Définition On appelle **base de la topologie** (ou **base des ouverts**) d'un e.t. $(X, \mathcal{O})$, toute famille $\mathcal{B}$ de parties ouvertes de X telle que tout ouvert de X est réunion d'ensembles appartenant à $\mathcal{B}$, i.e.

$$\forall O \in \mathcal{O}, \exists (B_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{B} \text{ tel que } O = \bigcup_{i\in I} B_i.$$

Exemples

1. Pour $(X, \mathcal{P}(X))$, $\{\{x\}\}_{x\in X}$ est une base de la topologie de cet espace.
2. Pour un e.m. (X, d) quelconque, $\{B_o(x, r)\}_{x\in X, r>0}$ est une base des ouverts de cet espace.

2- Théorème Une famille $\mathcal{B}$ d'ensembles ouverts est une base d'un e.t. $(X, \mathcal{O})$ si et seulement si $\forall O \in \mathcal{O}, \forall x \in O, \exists B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B \subseteq O$.
Preuve
$(\Rightarrow)$ Soit $\mathcal{B}$ une base d'un e.t. $(X, \mathcal{O})$. Soit $O \in \mathcal{O}$, alors $\exists (B_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{B}$ tel que $O = \bigcup_{i \in I} B_i$. $\forall x \in O$, $\exists B_j, j \in I$ tel que $x \in B_j \subseteq O$.
$(\Leftarrow)$ Si $\forall O \in \mathcal{O}, \forall x \in O, \exists B_x \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_x \subseteq O$, alors $O = \bigcup_{x \in O} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in O} B_x \subseteq O$. Alors, on a $O = \bigcup_{x \in O} B_x$. Ainsi $\mathcal{B}$ est une base de la topologie $\mathcal{O}$.

□

3- Théorème Pour qu'une famille $\mathcal{B}$ de parties d'un ensemble X soit la base d'une topologie sur X, il faut et il suffit que $\mathcal{B}$ possède les propriétés suivantes :

(i) Tout élément $x \in X$ appartient à un ensemble $B \in \mathcal{B}$.
(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.

Preuve
$(\Rightarrow)$ Soit $\mathcal{B}$ une base d'une topologie $\mathcal{T}$ sur X.
(i) Comme $X \in \mathcal{T}$, alors $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
(ii) $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, B_1 \cap B_2 \in \mathcal{T}$. Ainsi, $\forall x \in B_1 \cap B_2$, d'après le Théorème 2 précédent, $\exists B_3 \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$.
$(\Leftarrow)$ Soit X un ensemble quelconque, $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ vérifiant (i) et (ii). Considérons l'ensemble
$\mathcal{T} = \{\emptyset\} \cup \big\{O \subseteq X /\ O = \bigcup_{i \in I} B_i, B_i \in \mathcal{B}, i \in I\big\}$.
On peut montrer facilement que $\mathcal{T}$ est une topologie sur X. Et on voit, par la construction même de $\mathcal{T}$ que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathcal{T}$.

□

1.4 Ensembles fermés

1- Définition Dans un e.t. X, on appelle **ensembles fermés** (ou simplement **fermés**) les complémentaires des ensembles ouverts de X. On note $\mathcal{F}$ la famille des fermés de X. On a donc

$$f \in \mathcal{F} \Longleftrightarrow \exists\ O \text{ ouvert de } X \text{ tel que } F = C_X^O.$$

2- Propriétés Par passage aux complémentaires, les axiomes $(\mathcal{O}_1)$, $(\mathcal{O}_2)$, $(\mathcal{O}_3)$ deviennent :
$(\mathcal{F}_1)$ Toute intersection de fermés est fermée.
$(\mathcal{F}_2)$ Toute réunion finie de fermés est fermée.
$(\mathcal{F}_3)$ X et $\emptyset$ sont fermés.

3- Remarque X et $\emptyset$ sont à la fois ouverts et fermés dans un e.t. quelconque.

Exemples

1. Dans la topologie discrète, toute partie de X est fermée (donc toute partie de X est à la fois ouverte et fermée).
2. Dans la topologie grossière, les seuls ensembles fermés sont X et $\emptyset$.
3. Dans un e.m. (E, d), les boules fermées sont des fermées.
4. Dans $\mathbb{R}$, les intervalles fermés $[a, b]$ et les singletons $\{x\}$ sont des fermés.

1.5 Fermeture - Intérieur - Adhérence

Un ensemble A d'un e.t. X n'est, en général, ni ouvert ni fermé, mais il est possible de lui associer canoniquement un fermé qui le contient et un ouvert qu'il contient.

1- Définition Grâce à l'axiome $(\mathcal{F}_1)$, la famille des fermés contenant A a pour intersection un fermé contenant A. On l'appelle **fermeture** de A et on la note $\overline{A}$, c'est le plus petit fermé contenant A i.e.

$\overline{A}$ est fermé, $A \subseteq \overline{A}$ et si B est un fermé contenant A, alors $\overline{A} \subseteq B$.

2- Définition Grâce à l'axiome $(\mathcal{O}_1)$, la réunion des ouverts contenus dans A est un ouvert contenu dans A. On l'appelle **intérieur** de A et on la note $\overset{\circ}{A}$, c'est le plus grand ouvert contenu dans A i.e.

$\overset{\circ}{A}$ est ouvert, $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ et si O est un ouvert contenu dans A, alors $O \subseteq \overset{\circ}{A}$.

3- Propriété On a

$$C_X^{\overset{\circ}{A}} = \overline{C_X^A}$$

et

$$C_X^{\overline{A}} = \overset{\circ}{\overbrace{C_X^A}}.$$

4- Définition L'intérieur du complémentaire de A s'appelle **extérieur** de A.

5- Proposition $\overset{\circ}{A}$ est l'ensemble des éléments de l'e.t. dont A est voisinage, i.e.

$$\overset{\circ}{A}= \{x \in X/\ A \in \mathcal{V}(x)\}\,.$$

Preuve
Si $x \in \overset{\circ}{A}$ $(\subseteq A)$, alors $A \in \mathcal{V}(x)$.
Réciproqument, si A est voisinage de x, alors il existe un ouvert O tel que $x \in O \subseteq A$. Comme $O \subseteq \overset{\circ}{A}$, on a $x \in \overset{\circ}{A}$.

□

6- Remarque La proposition précédente est équivalente à l'énoncé suivant :
pour toute partie $A \subseteq X$, $\overset{\circ}{A}$ est l'ensemble de tous les points $x \in X$ tels que il existe un ouvert O vérifiant $x \in O \subseteq A$. (un tel point est appelé **intérieur à** A).

7- Proposition Pour qu'une partie A d'un e.t. X soit ouverte, il faut et il suffit que $\overset{\circ}{A}= A$.
Preuve
Si A est ouvert, alors A est le plus grand ouvert inclus dans A. D'où $\overset{\circ}{A}= A$.
Inversement, si $\overset{\circ}{A}= A$, comme $\overset{\circ}{A}$ est ouvert, alors A est ouvert.

□

8- Remarque L'intérieur d'un ensemble non vide peut être vide.
Par exemple, $\{x\}$ s'il n'est pas ouvert.

9- Propriétés Soient X un e.t. et $A, B \subseteq X$. On a

(i) $\overset{\circ}{X}= X$.

(ii) $\overset{\circ}{A}\subseteq A$.

(iii) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}}=\overset{\circ}{A}$.

(iv) $\overset{\circ}{\overbrace{A \cap B}} =\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

10- Définition Soient X un e.t. et $A \subseteq X$. Un point $a \in X$ est dit **adhérent** à A si

$$\forall V \in \mathcal{V}(a), V \cap A \neq \emptyset.$$

Il suffit que cette propriété soit vérifiée pour une base de voisinages de a.

Exemple

1. Si X est muni de la topologie grossière, alors tout $x \in X$ est adhérent à tout $A \subseteq X$ avec $A \neq \emptyset$.
2. Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, 0 est adhérent à $A = \left\{\frac{1}{n}/n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

11- Définition Soient X un e.t. et $A \subseteq X$. On appelle **adhérence** de A l'ensemble de ses points adhérents et on la note $adh(A)$.

12- Proposition L'adhérence d'un fermé F est F lui-même.
Preuve
Si $x \notin F$, alors $x \in C_X^F$ qui est ouvert. D'où $C_X^F \in \mathcal{V}(x)$ et $C_X^F \cap F = \emptyset$. Ainsi $x \notin F$ implque x n'est pas adhérent à F. On a alors $C_X^F \subseteq C_X^{adh(F)}$. Ceci est équivalent à $adh(F) \subseteq F$.
D'autre part, il est clair que tout point d'un ensemble y est adhérent i.e. $A \subseteq adh(A), \forall A$. En particulier, on a $F \subseteq adh(F)$.

$\square$

13- Proposition Un ensemble qui coincide avec son adhérence est fermé.
Preuve
Supposons que $adh(F) = F$. Soit $x \in C_X^F$, alors x n'est pas adhérent à F. Ainsi, $\exists V \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap F = \emptyset$. D'où $V \subseteq C_X^F$, et il s'ensuit que $C_X^F \in \mathcal{V}(x)$. En résumé, C_X^F est voisinage de tous ses points. Alors C_X^F est ouvert, i.e. F est fermé.

$\square$

14- Corollaire F est fermé $\Longleftrightarrow adh(F) = F$.

15- Proposition Si $A \subseteq B$, alors $adh(A) \subseteq adh(B)$.
Preuve
Immédiate.

$\square$

16- Proposition L'adhérence d'un ensemble coincide avec sa fermeture.
Preuve
Comme $A \subseteq \overline{A}$, alors $adh(A) \subseteq adh(\overline{A}) = \overline{A}$.

D'autre part, on peut montrer que $adh(adh(A)) = adh(A)$.
En effet, soit $x \in adh(adh(A))$, alors $\forall V \in \mathcal{V}(x)$, $V \cap adh(A) \neq \emptyset$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe un ouvert O tel que $x \in O \subseteq V$, i.e. $O \in \mathcal{V}(x)$. On a $O \cap adh(A) \neq \emptyset$. Cela signifie qu'il existe un élément a tel que $a \in O$ et $a \in adh(A)$. Ceci implique $O \in \mathcal{V}(a)$ et $O \cap A \neq \emptyset$ ($\Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$). En résumé, $\forall V \in \mathcal{V}(x), V \cap A \neq \emptyset$. D'où $x \in adh(A)$. On a alors $adh(adh(A)) \subseteq adh(A)$.
D'autre part, il est clair que $adh(A) \subseteq adh(adh(A))$. On a alors l'égalité $adh(adh(A)) = adh(A)$.
Ainsi, $adh(A)$ est fermé. Comme $A \subseteq adh(A)$, alors $\overline{A} \subseteq adh(A)$.
Finalement, on a $\overline{A} = adh(A)$

$\square$

17- Corollaire F est fermé $\Longleftrightarrow \overline{F} = F$.

18- Notation Dans la suite, on utilisera $\overline{A}$ au lieu de $adh(A)$.

19- Propriétés

(i) On a $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

(ii) On a $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

Preuve
(i) Comme $A \subseteq \overline{A}$ et $B \subseteq \overline{B}$, alors $A \cup B \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$(fermé). D'où $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$.
D'autre part, $A \subseteq \overline{A \cup B}$(fermé), de même $B \subseteq \overline{A \cup B}$(fermé), alors on a $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$, de même $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$, donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$.
(ii) comme $A \cap B \subseteq A \subseteq \overline{A}$ et $A \cap B \subseteq B \subseteq \overline{B}$, alors $A \cap B \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$(fermé). D'où $\overline{A \cap B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$.

$\square$

20- Remarque Pour la relation (ii), l'inclusion inverse n'est pas vraie. En effet, on a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$, $\overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$, alors $\overline{\mathbb{Q}} \cap \overline{\mathbb{I}} = \mathbb{R}$. Il est clair d'autre part que $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$.

1.6 Points d'accumulation

1- Définition Soient X un e.t. et $A \subseteq X$. On dit qu'un point $x \in X$ est un **point d'accumulation** de A si tout voisinage de x contient au moins un point de A autre que x , i.e.

$$\forall V \in \mathcal{V}(x), (V - \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

L'ensemble de tous les points d'accumulation de A est appelé **ensemble dérivé** de A et se note A'.

2- Définition x est un **point isolé** de A si $x \in A$ mais n'est pas un point d'accumulation de A, i.e.

$$\exists V \in \mathcal{V}(x) \text{ tel que } V \cap A = \{x\}.$$

Ainsi, x est adhérent à A signifie ou bien x est un point d'accumulation de A ou bien x est un point isolé de A.

3- Proposition On a $\overline{A} = A \cup A'$.

4- Remarque Un point d'accumulation de A est adhérent à A, il peut appartenir ou non à A.

Exemple Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, on a $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$.

5- Proposition A est fermé $\Longleftrightarrow A' \subseteq A$.

Preuve

A fermé $\Longleftrightarrow A = \overline{A} \Longleftrightarrow A = A \cup A' \Longleftrightarrow A' \subseteq A$.

$\square$

6- Définition Soit A une partie d'un espace topologique X, on appelle **frontière** de A l'ensemble noté $Fr(A)$ des points de X qui n'appartient ni à l'intérieur de A ni à l'extérieur de A, i.e.

$$Fr(A) = C_X^{(\mathring{A} \cup \overbrace{C_X^A}^{\circ})}.$$

7- Remarque $Fr(A)$ est fermé.

8- Remarques On a

$$Fr(A) = C_X^{\mathring{A}} \cap C_X^{\overbrace{C_X^A}^{\circ}} = \overline{C_X^A} \cap \overline{A}.$$

D'où , on a

$$Fr(A) = \overline{A} \cap C_X^{\mathring{A}} = \overline{A} - \mathring{A}.$$

9- Remarque On a $Fr(A) = Fr(C_X^A)$.

1.7 Ensembles denses, rares, espaces séparables

1- Définition Dans un e.t. X, un ensemble A est dit **dense par rapport à un ensemble** B si tout point de B est adhérent à A ($B \subseteq \overline{A}$), i.e.

$$\forall x \in B, \forall V \in \mathcal{V}(x), \text{ on a } V \cap A \neq \emptyset.$$

2- Définition Un ensemble dense par rapport à X (i.e. $X = \overline{A}$) est dit **partout dense** dans X. Cela est équivalent au fait que tout ouvert non vide de X rencontre A.

Exemple Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $\mathbb{Q}$ est dense par rapport à $\mathbb{I}$, de même $\mathbb{I}$ est dense par rapport à $\mathbb{Q}$.

3- Définition Un e.t. X est dit **séparable** s'il est fini ou s'il existe une partie dénombrable partout dense.

Exemple Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $\mathbb{Q}$ est partout dense, et comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable, alors $\mathbb{R}$ est séparable.

4- Définition Un ensemble A d'un e.t. X est dit **rare** ou **nulle part dense** s'il n'est pas dense dans aucun ouvert non vide, i.e. si tout ouvert non vide $B \subseteq X$ contient un autre ouvert non vide C disjoint de A :

$$\forall B \neq \emptyset \text{ ouvert de } X, \exists\, C \neq \emptyset \text{ ouvert tel que } C \subseteq B \text{ et } C \cap A = \emptyset.$$

5- Proposition on a

$$A \text{ rare} \Longleftrightarrow \overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset.$$

Exemple Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $\mathbb{Z}$ est nulle part dense .

6- Définition Un e.t. X est dit à base dénombrable s'il possède une base d'ouverts comportant un nombre au plus dénombrable d'ensembles.

7- Théorème Tout espace à base dénombrable est séparable.

B - Quelques constructions de topologies

1.8 Comparaison des topologies

1- Définition Soient E un ensemble et τ_1, τ_2 deux topologies sur E. On dit que τ_1 est **moins fine** que τ_2 si τ_1 est inclus dans τ_2, c- à -d $\forall\ O \in \tau_1$, $O \in \tau_2$. On note alors $\tau_1 \leq \tau_2$. On dit aussi que la topologie τ_1 est **plus grossière** que la topologie τ_2. La relation $\leq$ est une relation d'ordre.
L'ensemble des topologies sur E possède pour l'ordre ainsi défini un plus petit élément c- à -d une topologie moins fine que toutes les autres ; c'est la topologie grossière $\{\emptyset, E\}$, et cet ensemble possède un plus grand élément c- à -d une topologie plus fine que toutes les autres ; c'est la topologie discrète $\mathcal{P}(E)$.

2- Remarque Deux topologies τ_1 et τ_2 sur un e.t. E ne sont pas nécéssairement comparables. Pour $E = \{a, b\}$, les topologies $\tau_1 = \{\emptyset, E, \{a\}\}$ et $\tau_2 = \{\emptyset, E, \{b\}\}$ ne sont pas comparables.

3- Théorème Soient τ_1 et τ_2 deux topologies sur un e.t. X. Les propositions suivantes sont équivalentes :

(i) τ_1 est plus fine que τ_2, c- à -d $\tau_1 \geq \tau_2$.

(ii) Pour tout $x \in X$, tout voisinage de x pour τ_2 est voisinage de x pour τ_1.

(iii) Pour toute partie $A \subseteq X$, l'adhérence de A pour τ_1 est contenue dans l'adhérence de A pour τ_2, c- à -d

$$(\overline{A})_{\tau_1} \subseteq (\overline{A})_{\tau_2}.$$

(iv) Pour toute partie $A \subseteq X$, l'intérieur de A pour τ_1 contient l'intérieur de A pour τ_2, c- à -d

$$(\mathring{A})_{\tau_1} \supseteq (\mathring{A})_{\tau_2}.$$

(v) Toute partie fermée pour τ_2 est fermée pour τ_1.

1.9 Topologie induite - sous espace

1- Théorème et définition Soient (X, τ) un e.t. et $A \subseteq X$. On appelle **trace de la topologie** τ sur le sous ensemble A la famille

$$\tau_A = \{O \cap A \ / \ O \in \tau\}.$$

τ_A est une topologie sur A appelée **topologie induite** sur A par la topologie τ de X. L'ensemble A muni de cette topologie est appelé **sous espace** de X.

Exemples Dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, la topologie induite sur $\mathbb{Z}$ est la topologie discrète car $\forall n \in \mathbb{Z}$, $\{n\} =]n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}[\cap \mathbb{Z}$.

2- Théorème Soit A un sous espace d'un e.t. X.

(i) Un ensemble $B \subseteq A$ est fermé dans A si et seulement si il existe un ensemble fermé F dans X tel que $B = F \cap A$.

(ii) Un ensemble $V \subseteq A$ est un voisinage d'un point $x \in A$ si et seulement si il existe un voisinage W de x dans X tel que $V = W \cap A$.

3- Remarque Un ouvert (resp. fermé) d'un sous espace A d'un e.t. X n'est pas nécéssairement un ouvert (resp. fermé) dans X.

4- Théorème Pour que tout ouvert (resp. fermé) du sous espace A de X soit un ouvert (resp. fermé) de X, il faut et il suffit que A soit ouvert (resp. fermé) dans X.

5- Théorème Soit X un e.t. et $A, B \in \mathcal{P}(X)$ tel que $B \subseteq A \subseteq X$. Alors les topologies induites sur B par la topologie de X et par la topologie induite sur A sont identiques.

1.10 Topologie engendrée par une famille d'ensembles

1- Théorème Soit $\mathcal{M}$ une famille quelconque de parties d'un ensemble X, il existe alors une topologie sur X qui contient $\mathcal{M}$ et qui est moins fine que toutes les topologies sur X contenant $\mathcal{M}$ et qu'on note $\tau(\mathcal{M})$.
$\mathcal{M}$ est appelé **système de générateur** de la topologie $\tau(\mathcal{M})$. $\tau(\mathcal{M})$ est appelé la **topologie engendrée par la famille** $\mathcal{M}$.

Chapitre 2

Continuité - Homomorphisme - Suite

2.1 Continuité en un point

1- Définition On dit qu'une application $f : X \longrightarrow X'$ d'un e.t. X dans un e.t. X' est **continue en un point** $x_0 \in X$ si quel que soit le voisinage V' de $f(x_0)$ dans X', il existe un voisinage V de x_0 dans X tel que pour tout $x \in V$, $f(x) \in V'$.

2- Remarque La proposition "$\forall x \in V \, , \, f(x) \in V'$" est équivalente à "$f(V) \subseteq V'$" ou encore "$V \subseteq f^{-1}(V')$".
La définition précédente est alors équivalente à la définition suivante.

3- Définition On dit que l'application $f : X \longrightarrow X'$ est **continue en un point** $x_0 \in X$ si pour tout $V' \in \mathcal{V}(f(x_0))$, $f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(x_0)$.

4- Théorème Soit $f : X \longrightarrow X'$ une application d'un e.t. X dans un e.t. X'. Si f est continue au point $x \in X$ et si x est adhérent à une partie $A \subseteq X$, alors $f(x)$ est adhérent à $f(A)$, c- à -d

$$f \text{ continue en } x \text{ et } x \in \overline{A} \Longrightarrow f(x) \in \overline{f(A)}.$$

Preuve
Si $V' \in \mathcal{V}(f(x))$ dans X', $f^{-1}(V') \in \mathcal{V}(x)$ dans X et $x \in \overline{A}$, il existe $y \in A \cap f^{-1}(V') \neq \emptyset$. D'où $f(y) \in f(A) \cap V'$, c- à -d $f(A) \cap V' \neq \emptyset$. Ainsi, on a $f(x) \in \overline{f(A)}$.

□

5- Théorème Soient X, X', X'' trois e.t. et $f : X \longrightarrow X'$ une application continue en $x \in X$ et $g : X' \longrightarrow X''$ une application continue en $f(x) \in X'$, alors $h = g \circ f : X \longrightarrow X''$ est continue en x.
Preuve
Soit V'' un voisinage de $h(x) = g(f(x))$ dans X'', comme g est continue en $f(x)$, alors $g^{-1}(V'') \in \mathcal{V}(f(x))$ dans X'. Et puisque f est continue en x, alors $f^{-1}(g^{-1}(V'')) = (f^{-1} \circ g^{-1})(V'') \in \mathcal{V}(x)$ dans x.

$\square$

6- Définition On dit qu'une application d'un e.t. X dans un e.t. X' est **continue sur** X (ou simplement **continue**) si elle est continue en tout point de X.

7- Théorème Soit $f : X \longrightarrow X'$ une application d'un e.t. X dans un e.t. X'. Les proposition suivantes sont équivalentes :

(i) f est continue sur X.

(ii) Pour toute partie A de X, on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

(iii) L'image réciproque par f de toute partie fermée de X' est une partie fermée de X.

(iv) L'image réciproque par f de toute partie ouverte de X' est une partie ouverte de X.

Exemples 1- L'application identité d'un e.t. X sur lui-même est continue.
2- Une application constante d'un e.t. X dans un e.t. X' est continue.
3- Toute application d'un e.t. discret dans un e.t. quelconque est continue.

8- Remarques

1. Soit $\mathcal{B}$ une base de la topologie de X'. Pour que l'application $f : X \longrightarrow X'$ soit continue, il faut et il suffit que $f^{-1}(U')$ soit ouvert dans X pour tout $U' \in \mathcal{B}$.
2. L'image directe d'un ouvert (resp. fermé) de X par une application continue $f : X \longrightarrow X'$ n'est pas nécéssairement un ouvert (resp. fermé) dans X'.

Exemple Soit

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

On sait que f est continue sur $\mathbb{R}$, mais $f(\mathbb{R}) =]0,1]$ qui n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

9- Corollaire Etant données deux topologies τ_1 et τ_2 sur un même ensemble X, en désignant par X_i l'ensemble X muni de la topologie τ_i ($i = 1, 2$), alors $\tau_1 \geq \tau_2$ si et seulement si $id : X_1 \longrightarrow X_2$ est continue.

10- Corollaire Si une application d'un e.t. X dans un e.t. X' est continue en un point $x \in X$, elle le reste à fortiori si on remplace la topologie de X par une plus fine et celle de X' par une moins fine.

11- Corollaire Si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue d'un e.t. X dans $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in X / f(x) = 0\}$ est un fermé de X.

Preuve $\{0\}$ est un fermé dans $\mathbb{R}$. $\{x \in X / f(x) = 0\} = f^{-1}(\{0\})$ est alors fermé dans X.

□

12- Théorème Soient X, X', X'' trois e.t. . Si $f : X \longrightarrow X'$ et $g : X' \longrightarrow X''$ sont des applications continues, alors $g \circ f : X \longrightarrow X''$ est continue.

13- Théorème

(i) Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application d'un e.t. X dans un sous espace Y d'un e.t. X', alors f est continue en un point $a \in X$ si et seulement si f considérée comme application de X dans X' est continue en a.

(ii) Si $f : X \longrightarrow X'$ est une application continue en $a \in X$ et A un sous espace de X contenant a, alors la restriction de f à A $f|_A$ est continue en a.

14- Remarque La restriction $f|_A$ peut être continue sans que f le soit.

Exemple

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

$g = f|_{\mathbb{Q}} = 0$ est continue

2.2 Homéomorphisme

1- Définition Une application $f : X \longrightarrow X'$ d'un e.t. X dans un e.t. X' est appelée **homéomorphisme** si

1. f est une bijection.
2. f et son application inverse f^{-1} sont continues.

On dit que f est **bicontinue**. f^{-1} est alors un homéomorphisme de X' dans X.

2- Propriété Si $f : X \longrightarrow Y$ est un homéomorphisme et $g : Y \longrightarrow Z$ est aussi un homéomorphisme, alors $g \circ f : X \longrightarrow Z$ est aussi un homéomorphisme.

3- Définition Deux e.t. X et X' sont dits **homéomorphes** si il existe un homéomorphisme de X dans X'.

4- Remarque Deux espaces topologiques homéomorphes à un troisième sont homéomorphes. La relation d'être homéomorphes est réfléxive, symétrique et transitive, c- à -d c'est une relation d'équivalence.

5- Remarque Deux espaces topologiques homéomorphes ont les même propriétés topologiques.

6- Remarque Une bijection continue n'est pas nécéssairement bicontinue. L'application identique de $\mathbb{R}$ muni de la topologie discrète dans $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle est une bijection continue mais pas bicontinue.

2.3 Limite

1- Définition Soient X et E deux espaces topologiques, $A \subseteq X$ et $a \in X$ un point adhérent à A. Soit $f : A \longrightarrow E$ une application, on dit que

$f(x)$ **tend vers la limite** l lorsque x tend vers a par valeurs dans A si quel que soit le voisinage V de l dans E, il existe un voisinage U de a dans X tel que $f(U \cap A) \subseteq V$. Il est clair que X ne joue aucun rôle et l'on peut se restreindre à la partie $A \cup \{a\}$ munie de la topologie induite par celle de X.

2- Remarque Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ est une application, $f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers a par valeurs supérieures (resp. strictement supérieures) signifie que
$\forall V \in \mathcal{V}(l)$ dans E, $\exists \eta > 0$ tel que $|x - a| \leq \eta$, $x \geq a$ (resp. $x > a$)$\Longrightarrow$ $f(x) \in V$. Dans ce cas, on a $X = \mathbb{R}$, $A = [a, \infty[$ (resp. $]a, \infty[$).

3- Remarque Le fait qu'un application $f : X \longrightarrow Y$ d'un e.t. X dans un e.t. Y est continue en un point $a \in X$ est alors équivalent au fait que $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a.

2.4 Applications aux suites

1- Introduction Soit $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ une suite de points d'un e.t. E. C'est une application de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels dans E. On pourra définir la convergence de cette suite en prenant $X = \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $A = \mathbb{N}$ et $a = +\infty$. Cela revient à dire que l'application $f : \overline{\mathbb{N}} \longrightarrow E$ définie par $f(n) = x_n$, $f(+\infty) = l$ est continue au point $+\infty$.

2- Définition La suite x_n est **convergente vers un poin**t $l \in E$ si $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, $\forall n \geq n_0$, $x_n \in V$ ou encore $\forall V \in \mathcal{V}(l)$, tous les x_n appartiennent à V sauf au plus pour un nombre fini de valeurs de l'entier n.

3- Remarque Si E est un espace métrique, une suite dans E est convergente vers un point $l \in E$ ou a pour limite l si la suite des nombres réels $d(l, x_n)$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

4- Remarque Si une suite est convergente dans un e.t. E, elle le reste à fortiori si l'on remplace la topologie de E une moins fine.

5- Définition Un e.t. E est dit **séparé** si pour tout couple de points distincts (a, b) de E, il existe deux voisinages contenant respectivement a et b d'intersection vide. (C'est l'axiome de séparation de Hausdorff).

6- Théorème Si une suite dans un e.t. E admet une limite et si E est séparé, cette limite est nécéssairement unique.

Preuve

Soit une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans E telle que x_n tend vers a quand n tend vers $+\infty$ et x_n tend vers b quand n tend vers $+\infty$ avec $a \neq b$. Alors $\exists\, U \in \mathcal{V}(a)$ et $V \in \mathcal{V}(b)$ tels que $U \cap V = \emptyset$.

$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_0, x_n \in U$.

$\exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \forall\, n \geq n_1, x_n \in V$.

Soit $n^* = max(n_0, n_1)$. Alors, $\forall\, n \geq n^*, x_n \in U$ et $x_n \in V$. Ce qui est absurde.

□

7- Définition Un e.t. X est dit **métrisable** si sa topologie peut être définie à l'aide d'une métrique.

8- Théorème Pour qu'un point a d'un e.t. E soit adhérent à une partie A de E, il suffit qu'il existe une suite d'éléments de A qui converge vers a et si E est métrisable ou plus généralement si tout point de E possède une base dénombrable de voisinages, cette condition est également nécéssaire.

Preuve

(Condition suffisante) : Supposons qu'il existe une telle suite. Alors, $\forall V \in \mathcal{V}(a)$, il existe un point x_n de la suite tel que $x_n \in V$, or $x_n \in A$, d'où $V \bigcap A \neq \emptyset$, c- à -d $a \in \overline{A}$.

(Condition nécéssaire) : Si a possède une base dénombrable de voisinages $V_0, V_1, \ldots, V_n, \ldots$ et $a \in \overline{A}$, alors $\forall n$, $V_n \bigcap A \neq \emptyset$ c- à -d $\exists x_n \in A, x_n \in V_n$. D'où $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a.

□

9- Corollaire Pour qu'une partie d'un espace topologique métrisable soit fermé, il faut et il suffit qu'elle contient toutes les limites de ses suites convergentes dans E.

Chapitre 3

Espace produit - Espace quotient

3.1 Espace produit

1- Définition Soit X un ensemble et $(X_i, \tau_i)_{i\in I}$ une famille d'e.t., et pour chaque $i \in I$, soit $f_i : X \longrightarrow X_i$ une application. on appelle **topologie initiale** sur X définie par les f_i, $i \in I$, la topologie la moins fine sur X rendant continues les applications f_i.

2- Définition Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'e.t.. On appelle **espace produit** de cette famille l'ensemble produit

$$X = \prod_{i\in I} X_i = \{x = (x_i)_{i\in I} \ / \ x_i \in X_i, \forall i \in I\}$$

muni de la topologie produit de celle des X_i, c- à -d la topologie la moins fine rendant continues les projections canoniques

$$pr_i : X \longrightarrow X_i.$$

On dit que les X_i sont les espaces facteurs de X.

3- Remarque La topologie produit sur X a pour base l'ensemble noté $\mathcal{B}$ des intersections finies d'ensemble de la forme $pr_j^{-1}(U_j) = U_j \times \prod_{i\in I-\{j\}} X_i$ où U_j est un ouvert dans X_j. On a alors

$$\mathcal{B} = \{\prod_{j\in J} U_j \times \prod_{i\in I-J} X_i \ / \ J \subseteq I, J \text{ fini}, U_j \text{ ouvert dans } X_j\}.$$

Les éléments de $\mathcal{B}$ sont appelés **ouverts élémentaires** ou **rectangles ouverts** de la topologie produit.

4- Remarque Un ouvert de cette topologie est une réunion quelconque d'ouverts élémentaires.

5- Remarque Un voisinage d'un point $x = (x_i)_{i\in I}$ est le produit $\prod_{i\in I} V_i$ où $V_i \in \mathcal{V}(x_i)$ dans X_i, $\forall i \in I$, avec $V_i = X_i$ $\forall i$ sauf pour un nombre fini de valeurs de i

$$V = \prod_{j\in J} V_j \times \prod_{i\in I-J} X_i = \{x = (x_i)_{i\in I} \ / \ x_j \in V_j, j \in J\}$$

où $J \subseteq I$ tel que J est fini.

6- Remarque En général, un produit quelconque d'ouverts $\prod_{i\in I} A_i$ où les A_i sont ouverts dans X_i, n'est pas ouvert dans la topologie produit. En effet, il n'existe pas d'élément $B \in \mathcal{B}$ tel que $B \subseteq \prod_{i\in I} A_i$ si il y a un nombre infini de A_i différents de X_i.
Par contre, un produit quelconque $F = \prod_{i\in I} F_i$ où les F_i sont fermés dans X_i est toujours fermé.

Exemples Sur $\mathbb{R}$ muni de la topologie usuelle, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n-fois}$. La topologie sur $\mathbb{R}^n$ est la topologie produit. En effet, la topologie usuelle sur $\mathbb{R}^n$ est engendré par la distance d définie par

$$d(x, y) = sup_{1\leq i\leq n} |x_i - y_i|$$

où $x = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et $y = (y_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$.

7- Définition Soient X et X' deux e.t. . L'application $f : X \longrightarrow X'$ est une **application ouverte** (resp. **application fermée**) si pour tout ouvert O (resp. fermé F) dans X, $f(O)$ (resp. $f(F)$) est ouvert (resp. fermé) dans X'.

8- Théorème Les projections canoniques $pr_i : X \longrightarrow X_i$ de l'espace produit $X = \prod_{i\in I} X_i$ sur les espaces facteurs X_i sont des applications ouvertes.

9- Remarque Les projections canoniques ne sont pas, en général, des applications fermées. Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, soit
$G = f^{-1}(\{1\}) = \{(x, y)/xy = 1\}$ où

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto xy \end{aligned}$$

f est continue , $\{1\}$ est fermé dans $\mathbb{R}$, alors G est fermé dans $\mathbb{R}^2$. Mais $pr_1(G) = \mathbb{R} - \{0\}$ n'est pas fermé. Il en est de même pour $pr_2(G)$.

10- Théorème Soit $f = (f_i)_{i \in I}$ une application d'un e.t. Y dans un e.t. produit $X = \prod_{i \in I} X_i$. f est continue en un point $a \in Y$ si et seulement si pour tout $i \in I$, f_i est continue en a.
Preuve
On a $f_i = pr_i \circ f$.

□

3.2 Espace quotient

1- Définition Soient X un e.t., $(X_i, \tau_i)_{i \in I}$ une famille d'e.t. et $f_i : X_i \longrightarrow X$ $(i \in I)$ une famille d'applications. On appelle **topologie finale** sur X définie par les f_i, $i \in I$, la topologie la plus fine sur X rendant continues les f_i.

2- Définition Soient X un e.t. et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur X. L'**espace quotient** de X par $\mathcal{R}$ est l'ensemble quotient $X/\mathcal{R}$ muni de la topologie quotient, c- à -d la topologie la plus fine sur $X/\mathcal{R}$ rendant continue l'application canonique

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow X/\mathcal{R} \\ x &\longmapsto \dot{x} \end{aligned}$$

Les ensembles ouverts (resp. fermés) dans $X/\mathcal{R}$ sont les ensembles A tels que $\pi^{-1}(A)$ sont ouverts (resp. fermés) dans X.

3- Remarque Un ensemble $A \subseteq X/\mathcal{R}$ est ouvert pour la topologie quotient si et seulement si $\pi^{-1}(A)$ est ouvert dans X.
Mais si O est ouvert dans X, $\pi(O)$ n'est pas nécéssairement ouvert dans $X/\mathcal{R}$, c- à -d l'application $\pi : X \longrightarrow X/\mathcal{R}$ est continue mais elle n'est pas ouvert ou fermé.

4- Remarque Soit Z un e.t. et $f : X \longrightarrow Z$ une application. On définit la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur X par $x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow f(x) = f(y)$. Alors, f se factorise de manière unique en $f = g \circ \pi$ où $g : X/\mathcal{R} \longrightarrow Z$ est une application définie par $g(\dot{x}) = f(x)$.

5- Théorème L'application $f : X \longrightarrow Z$ ci-dessus est continue si et seulement si l'application $g : X/\mathcal{R} \longrightarrow Z$ est continue.

Chapitre 4

Espace compact - Espace connexe

4.1 Espace quasi-compact et espace compact

1- Définition Soit E un espace topologique. On appelle **recouvrement** d'un partie A de E toute famille $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(E)$ telle que

$$A \subseteq \bigcup_{C \in \mathcal{R}} C.$$

$\mathcal{R}$ peut êre fini ou infini.
Si un recouvrement est formé d'ensembles ouverts, alors c'est un **recouvrement ouvert**.

2- Théorème et Définition On dit qu'un e.t. X est **quasi-compact** s'il satisfait à l'une des deux axiomes équivalents suivants ;
(C_1) **Axiome de Borel-Lebesgue** :
Tout recouvrement ouvert de X contient un recouvrement ouvert fini.
(C_2) Toute famille de fermés d'intersection vide contient une sous famille finie d'intersection vide.
Preuve
(C_1) est équivalent à(C_2) par passage au complémentaire.

$\square$

3- Remarque L'axiome (C_2) est équivalent à l'axiome (C_2') suivant :
(C_2') Si une famille de fermés est telle que toute intersection finie d'éléments de la famille est non vide, alors l'intersection de la famille est non vide.

4- Définition On dit qu'un e.t. X est **compact** s'il est quasi-compact et séparé.

Exemples 1- Tout espace séparé fini est compact.
2- Tout espace séparé dans lequel il n'y a qu'un nombre fini d'ensembles ouverts est compact.
3- $\mathbb{R}$ n'est pas compact. En effet, $\{]-n-1, n+1[\ /\ n \in \mathbb{N}\}$ est un recouvrement ouvert de $\mathbb{R}$.

5- Remarque Certains auteurs anglo saxons ne font pas entrer la séparation dans la définition des espaces compacts.

4.2 Théorème de Bolzano-Weierstrass

1- Théorème (Bolzano-Weierstrass) Soit X un espace topologique quasi-compact, alors

(i) Toute partie infinie A de X possède au moins un point d'accumulation dans X.

(ii) Toute partie A de X qui n'a aucun point d'accumulation dans X est finie.

Preuve

Il est évident que $(i) \Leftrightarrow (ii)$.
Montrons (ii)
Soit A une partie de X qui n'a aucun point d'accumulation. Soit $x \in X$, comme $x \notin A'$, alors il existe un voisinage $V_x \in \mathcal{V}(x)$ ouvert et contenant au plus un point de A, à savoir x lui-même. On a $X = \bigcup_{x \in X} V_x$. Par hypothèse, on a alors $X = \bigcup_{i=1}^{n} V_{x_i}$. Ainsi, A contient au plus les n points $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

□

4.3 Ensembles quasi-compact, compact et relativement compact

1- Définition Soient X un espace topologique et $A \subseteq X$. L'**ensemble** A est dit **quasi-compact** (resp. **compact**) si le sous espace topologique A est quasi-compact (resp. compact).

2- Remarque Pour qu'une partie A d'un e.t. X soit un ensemble quasi-compact, il faut et il suffit que tout recouvrement de A par des ouverts de X contient un recouvrement fini de A.

3- Remarque Dans un e.t. séparé, tout ensemble quasi-compact est un ensemble compact.

Exemples 1- Dans un e.t. X, tout ensemble fini est quasi-compact. L'ensemble $\emptyset$ et tout singleton sont compacts.
2- Dans un e.t. X, soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de X telle que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x quand n tend vers l'infini, alors l'ensemble $A = \{x_n/n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est quasi-compact.

4- Théorème Dans un espace quasi-compact (resp. compact), tout ensemble fermé est quasi-compact (resp. compact).

5- Théorème Soient X un espace topologique séparé, A et B deux parties compactes de X sans points communs. Alors, il existe un voisinage $V \in \mathcal{V}(A)$ et un voisinage $W \in \mathcal{V}(B)$ tels que $V \cap W = \emptyset$.

6- Théorème Dans un espace topologique séparé X, tout ensemble compact est fermé dans X.
Preuve
Soit A un ensemble compact dans un e.t. séparé X et soit $x \in C_X^A$. Comme $\{x\}$ est compact, d'après le Théorème 4, il existe $V \in \mathcal{V}(x)$ tel que $V \cap A = \emptyset$. Alors, $V \subseteq C_X^A$. Ainsi C_X^A est ouvert car il est voisinage de chacun de ses points. Par conséquent A est fermé.

7- Corollaire Dans un espace topologique compact X, pour qu'un ensemble A soit compact, il faut et il suffit que A soit fermé dans X.

8- Définition Une partie A d'un espace topologique X est dit **relativement quasi-compact** (resp. **relativement compact**) dans X si A est contenu dans une partie quasi-compact (resp. compact) de X.

9- Remarque Dans un espace topologique séparé, un ensemble relativement quasi-compact est un ensemble relativement compact.

10- Théorème 6 Si f est une application continue d'un e.t. quasi-compact X dans un e.t. X', alors l'ensemble $f(X)$ est quasi-compact.

11- Corollaire Soit f est une application continue d'un e.t. X dans un e.t. séparé X'. L'image par f de tout ensemble quasi-compact (resp. relativement compact) de X est un ensemble compact (resp. relativement compact) dans X'.

4.4 Produit d'espaces compacts

1- Théorème(Tychonoff)

(i) Tout produit d'espaces quasi-compacts (resp. compacts) est quasi-compact (resp. compact).

(ii) Si un produit d'espaces non vide est quasi-compact (resp. compact), chacun des espaces facteurs est quasi-compact (resp. compact).

2- Corollaire Pour qu'une partie d'un produit d'e.t. soit relativement quasi-compact, il faut et il suffit que chacun de ses projections soit relativement quasi-compact dans l'espace facteur correspondant.

4.5 Espace localement compact

1- Définition Un e.t. X est **localement compact** s'il est séparé et si tout point de X possède un voisinage compact.

2- Remarque Tout e.t. compact X est localement compact. La réciproque est fausse.

Exemples 1- Tout espace discret est localement compact mais non compact s'il est infini.
2- $\mathbb{R}$ est localement compact mais non compact.

3- Remarque Soit f une application continue d' e.t. localement compact X vers un e.t. séparé Y, $f(X)$ n'est pas nécéssairement localement compact.

4.6 Espace et ensemble connexe

1- Définition Un e.t. X est **connexe** s'il n'est pas réunion disjointe de deux ensembles ouverts non vides.

2- Remarque X est non connexe si il existe deux ouverts non vides A et B tels que $X = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$. A et B sont aussi, dans ce cas, fermés.

3- Remarque La définition est équivalente à
1)- X n'est pas réunion de deux ensembles fermés disjoints non vides.
ou bien
2)- Les seules parties de X qui soient à la fois ouvertes et fermées sont $\emptyset$ et X.

Exemples 1- $\mathbb{R}$ est connexe.
2- Tout espace discret contenant plus d'un point est non connexe.

4- Définition Toute partie A d'un espace topologique X est un **ensemble connexe** si le sous espace A de X est connexe.

5- Proposition Un ensemble A dans un e.t. X est un ensemble connexe si et seulement si si $A \subseteq B \cup C$ où B et C sont des ouverts (ou fermés) tels que $A \cap B \neq \emptyset$ et $A \cap C \neq \emptyset$, alors on ait $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.

Exemples 1- Soit X un e.t., alors $\emptyset$ et, pour tout $x \in X$, $\{x\}$ sont connexes.
2- Dans un e.t. séparé X, tout ensemble fini plus d'un point et généralement, tout ensemble non réduit à un point et possédant au moins un point isolé est non connexe.

6- Théorème 8 Si A est un ensemble connexe, alors tout ensemble B tel que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ est connexe.

7- Théorème 9 La réunion d'une famille d'ensembles connexes dont l'intersection n'est pas vide est un ensemble connexe.