Universite d'Antananarivo — *Annee U* $2023 - 2024$

Domaine Sciences et Technologies — $PAAC - S6$

Mention Maths $-$ *Info* — **TD INTÉGRATION**

I-INTEGRATION

Exercice 1
Soit $1_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ la fonction définie par $1_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}(x) = 1$ si $x \in [a,b]$ et 0 sinon.
Montrer que $1_{\mathbb{Q}\cap[a,b]}$ n'est pas une fonction en escalier sur $[a,b]$.

Exercice 2
Montrer que si $f_1,\ f_2 \in \mathcal{E}sc([a,b],E)$, alors les deux fonctions $\max(f_1,f_2)$ et $\min(f_1,f_2)$ appartiennent aussi à $\mathcal{E}sc([a,b],E)$.

Exercice 3
Soient a et b des réels tels que $a < b$. Soit $m \in \mathbb{N}$. On note $S(m)$ l'ensemble des subdivisions d'ordre m de $[a,b]$ et on pose $S = \cup_{m\in\mathbb{N}} S(m)$. Un élément de S est appelé une subdivision de $[a,b]$. On définit sur S la "*relation d'inclusion de subdivisions*" par

$$\alpha \preceq \beta \quad \text{si et seulement si} \quad <\alpha> \subseteq <\beta> .$$

1)- Montrer que $\preceq$ une relation d'ordre sur S.
2)- Soient α une subdivision adaptée à φ, et β une subdivision telle que $\alpha \preceq \beta$. Montrer que β est aussi adaptée à φ.
3)- Soient $\varphi, \psi \in \mathcal{E}sc$ et deux subdivisions α et β adaptées respectivement à φ et à ψ. Montrer que la subdivision $\alpha \vee \beta$ est adaptée à la fois à φ et à ψ.

Exercice 4
Soient $\varphi \in \mathcal{E}sc$ et $\alpha = (\alpha_i)_{0\leq i\leq m}$ et $\gamma = (\gamma_j)_{0\leq j\leq p}$ deux subdivisions adaptées à φ vérifiant $\alpha \preceq \gamma$.
1)- Montrer que $I_\gamma(\varphi) = I_\alpha(\varphi)$.
2)- En déduire que si β est une subdivision quelconque adaptée à φ, alors on a l'égalité $I_\beta(\varphi) = I_\alpha(\varphi)$.

Exercice 5(**Relation Chasles**) Soit φ une fonction en escalier sur $[a,b]$.
Montrer que, pour tout $c \in [a,b]$, φ est en escalier sur $[a,c]$ et sur $[c.b]$ et que l'on a

$$\int_a^b \varphi(t)dt = \int_a^c \varphi(t)dt + \int_c^b \varphi(t)dt.$$

Exercice 6
1)- Montrer que l'application $\varphi \mapsto P_E(\varphi) = \int_a^b ||\varphi(t)||_E dt$ est une semi-norme sur $\mathcal{E}sc([a,b],E)$.
2)- Montrer que son noyau est l'espace $\mathcal{K}$ des fonctions en escalier de $[a,b]$ dans E qui sont identiquement nulles sauf peut-être sur une partie finie de $[a,b]$.

Exercice 7

1)- Montrer que si $\varphi \in \mathcal{E}sc([a,b],\mathbb{R})$ est à valeurs positives ou nulles, alors on a $\int_a^b \varphi(t)dt \geq 0$.
2)- En déduire que: si $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{E}sc([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $\psi_1 \leq \psi_2$, alors

$$\int_a^b \psi_1(t)dt \leq \int_a^b \psi_2(t)dt$$

.

Exercice 8
1− Montrer que si $f \in \mathcal{E}sc([a,b],E)$, alors $|| \int_a^b f(t)||_E dt \leq \int_a^b ||f(t)||_E dt \leq (b-a)||f||_\infty$.
2− Montrer que si $f : [a,b] \to E$ est réglée, alors $||f||_E : [a,b] \to \mathbb{R}$ est réglée.
3− Montrer que $\mathcal{I}_{\mathcal{R}eg} : (\mathcal{R}eg, ||\cdot||_\infty) \to (E, ||\cdot||_E)$ est une application linéaire continue et que, plus précisément, pour tout $f \in \mathcal{R}eg$, on a

$$|| \int_a^b f(t)dt|| \leq \int_a^b ||f(t)||dt \leq (b-a)\ ||f||_\infty$$

Exercice 9
Soient $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ deux fonctions réglées telles que $f(t) \leq g(t)\ , \forall t \in [a,b]$.
Montrer que l'on a

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt.$$

Exercice 10 Soit $f \in \mathcal{RI}([a,b],\mathbb{R})$ vérifiant $f(t) \geq 0\ \forall t \in [a,b]$.
1)- Montrer que $\int_a^b f(t)dt \geq 0$.
2)- En déduire que: si $g \leq h$ sur $[a,b]$ avec $g, h \in \mathcal{RI}([a,b],\mathbb{R})$, alors

$$\int_a^b g(t)dt \leq \int_a^b h(t)dt.$$

Exercice 11
Montrer que si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fonctions Riemann-intégrables sur $[a,b]$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$, alors f est Riemann - intégrable et $\int_a^b f(t)dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)dt$.

II-MESURE DE LEBESGUE SUR $\mathbb{R}^n$

Exercice 12 Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$.

1)− Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, le translaté de E, $x + E = \{x + y | y \in E\}$ est mesurable et de mesure $\lambda_n(x + E) = \lambda_n(E)$.
2)− Montrer que, le symétrique de E à l'origine noté $-E = \{-x | x \in E\}$ est mesurable et de mesure $\lambda_n(-E) = \lambda_n(E)$.

Exercice 13 Soit E un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$.

1)− Soit $\alpha > 0$. Montrer que, le dilaté de E par α, $\alpha E = \{\alpha x | x \in E\}$ est mesurable et de mesure $\lambda_n(\alpha E) = \alpha^n \lambda_n(E)$.

2)− Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ un n-uplet des réels strictement positifs. On pose $\alpha E = \{(\alpha_1 x_1, \ldots, \alpha_n x_n) | (x_1, \ldots, x_n) \in E\}$ le dilaté de E par α.
Montrer que αE est mesurable et de mesure $\lambda_n(\alpha E) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \lambda_n(E)$.

Exercice 14 Soit $E \subseteq \mathbb{R}^n$ et $\mathcal{O}_k = \{x \in \mathbb{R} \,|\, d(x, E) < \frac{1}{k}\}$.
Montrer que si E est compact, alors $\lambda_n(E) = \lim_{k \to +\infty} \lambda_n(\mathcal{O}_k)$.
Exhiber un ensemble E fermé et non borné tel que cette conclusion soit fausse.

Exercice 15 Dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$, exhiber des exemples de fermés A et B tels que $\lambda_n(A) = \lambda_n(B) = 0$ mais $\lambda_n(A + B) > 0$ $(n = 1, 2)$.
Indication : dans $\mathbb{R}$ penser à l'ensemble triadique de Cantor et dans $\mathbb{R}^2$ au carré $[0, 1] \times [0, 1]$.

III-ESPACES MESURABLES

Exercice 16 Soit X un ensemble et $\mathcal{M}$ un ensemble non vide de tribus sur X.
1)− Montrer que, l'intersection des éléments de $\mathcal{M}$ est encore une tribu sur X.
2)− Soit $\mathcal{A}$ une partie de $\mathcal{P}(X)$ et notons $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'ensemble de toutes les tribus qui contiennent $\mathcal{A}$.
a)− Montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est non vide.
b)− Montrer que l'intersection de deux éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est encore une tribu sur X qui contient $\mathcal{A}$.
3)− Montrer que l'intersection de tous les éléments de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est le plus petit élément de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ pour le relation d'inclusion.

Exercice 18 Soit $\mathcal{M}$ une tribu sur X.
1)- Montrer que $\emptyset \in \mathcal{M}$.
2)- Montrer que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.
3)- Montrer que la réunion et l'intersection d'une famille finie d'éléments de $\mathcal{M}$ sont dans $\mathcal{M}$.

Exercice 19 Soit X un ensemble. Déterminer la tribu engendrée par l'ensemble des singletons de X.
Exercice 20 Soit X un ensemble. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de X, on pose $\limsup A_n = \bigcap_{n=0}^{\infty}(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_n)$ et $\liminf A_n = \bigcup_{n=0}^{\infty}(\bigcap_{m=n}^{\infty} A_n)$. Décrire les ensembles $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$. Montrer que si $(X, \mathcal{M})$ est un espace mesurable, et si les parties A_n sont mesurables, les ensembles $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$ sont mesurables.