Chapitre 2

Dérivation numérique

2.1 Position du problème

Comme pour l'intégrale, on voudrait être en mesure d'évaluer numériquement la dérivée d'une fonction lourde à manipuler ou qui n'est connue que en un certain nombre de points. Ce problème de dérivation numérique est très commun en ingénierie et en analyse numérique (c'est la base des méthodes de différences finies).

On considère une fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe suffisamment élevée, $x \in]a,b[$ fixé.
On veut approcher (au mieux !) les dérivées de la fonction f au point x.
Or

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

avec $h > 0$ (petit), on obtient

$$f'(x) \simeq \frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Nous constatons que cette approximation de $f'(x)$ fait intervenir la valeur de f en x et $x+h$, ce qui nous conduit à approcher les nombres $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(n)}(x)$ en utilisant un ensemble discret de points.

Une des méthodes les plus anciennes utilisées pour obtenir des formules de dérivation numérique consiste à construire des quotients différentiels à l'aide des développements de Taylor [1].

2.2 Approximation de la dérivée première

Fixons $h > 0$ (petit) et introduisons les notations :

$$\begin{array}{rcl} \Delta_h f(x) & = & f(x+h) - f(x), \\ \nabla_h f(x) & = & f(x) - f(x-h), \\ \delta_{2h} f(x) & = & f(x+h) - f(x-h). \end{array}$$

2.2.1 Formules à deux points

Effectuons un premier développement de Taylor d'ordre 1 de f autour de x :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(\xi),\ \xi \in [x, x+h].$$

On obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(x) \simeq f'_{hd}(x) = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\Delta f(x)}{h},\ \text{c'est la formule de différences finies progressives } (\mathbf{DFP}) \\ \\ E = -\frac{h}{2} f''(\xi),\ \xi \in [x, x+h] \text{ c'est l'erreur commise} \end{array} \right.$$

1. Brook Taylor, anglais, 1685-1731

Effectuons un deuxième développement de Taylor d'ordre 1 de f autour de x :

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(\xi),\ \xi \in [x-h, x].$$

On obtient

$$\begin{cases} f'(x) \simeq f'_{hg}(x) = \frac{f(x)-f(x-h)}{h} = \frac{\nabla f(x)}{h}, \text{ c'est la formule de différences finies régressive (}\mathbf{DFR}\text{)}, \\ \\ E = \frac{h}{2}f''(\xi),\ \xi \in [x-h, x] \text{ c'est l'erreur commise.} \end{cases}$$

Les formules obtenues sont donc deux approximations d'ordre 1 de la dérivée première et l'erreur à chaque fois tend vers 0 quand h tend vers 0.

Augmentons l'ordre du développement de Taylor de f autour de x :

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) + \tfrac{h^3}{6}f'''(\xi_1),\ \xi_1 \in [x, x+h], \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) - \tfrac{h^3}{6}f'''(\xi_2),\ \xi_2 \in [x-h, x]. \end{aligned}$$

En soustrayant membre à membre, on obtient

$$f(x+h) - f(x-h) = 2hf'(x) + \frac{h^3}{6}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)).$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} f'(x) \simeq f'_{hc}(x) = \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = \frac{\delta_{2h}f(x)}{2h}, \text{ c'est la formule de différences finies centrées (}\mathbf{DFC}\text{)}, \\ \\ E = -\frac{h^2}{12}(f'''(\xi_1) + f'''(\xi_2)) = -\frac{h^2}{6}(f'''(\xi),\ \xi \in [x-h, x+h], \text{ c'est l'erreur commise.} \end{cases}$$

La formule centrée (symétrique) est une formule d'approximation d'ordre 2 et donc plus précise que les deux premières formules, même si elle nécessite la connaissance de f au même nombre de points. Il faut cependant noter que les points utilisés sont disposés symétriquement par rapport à celui où l'on calcule la dérivée.

Remarque 2.1. *Supposons que l'intervalle $[a, b]$ est découpé en N intervalles, on pose $h = \frac{b-a}{N}$ et on introduit* ***les points de grille*** *x_i de sorte que $x_i = a + ih, i = 0, \dots, N$. Supposons que f est connue uniquement en les points de grille x_i. Alors pour approcher $f'(x_i),\ i = 0, \dots, N$:*

1. *La formule de différences finies progressive donne :*

$$f'(x_i) \simeq f'_{hd}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h},\ i = 0, \dots, N-1. \tag{2.1}$$

   On remarque que la relation (2.1) n'est pas définie pour $i = N$, on perd donc le dernier point de grille quand on utilise cette relation pour approcher $f'(x_i)$.

2. *La formule de différences finies régressive donne :*

$$f'(x_i) \simeq f'_{hg}(x_i) = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h},\ i = 1, \dots, N. \tag{2.2}$$

   On remarque que la relation (2.2) n'est pas définie pour $i = 0$, on perd donc le premier point de grille quand on utilise cette relation pour approcher $f'(x_i)$.

3. *La formule de différences finies centrées donne :*

$$f'(x_i) \simeq f'_{hc}(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}, \; i = 1, \ldots, N-1. \tag{2.3}$$

On remarque que la relation (2.3) n'est pas définie pour $i = 0$ et $i = N$, on perd donc le premier et le dernier point de grille quand on utilise cette relation pour approcher $f'(x_i)$. Constatons aussi que

$$f'_{hc}(x_i) = \frac{f'_{hg}(x_i) + f'_{hd}(x_i)}{2}, \; i = 1, \ldots, N-1.$$

Exemple 2.1. *Pour illustrer les trois formules précédentes, considérons la fonction $x \mapsto f(x) = 2^x,; x \in [1,5]$ passant par les points $(x_0, y_0) = (1,2)$, $(x_1, y_1) = (2,4)$, $(x_2, y_2) = (3,8)$, $(x_3, y_3) = (4,16)$ et $(x_4, y_4) = (5,32)$.*

Nous voulons approcher le nombre $f'(x_2)$:

1. *La formule de DFP : $f'(x_2) \simeq f'_{hd}(x_2) = \frac{f(x_3)-f(x_2)}{h} = y_3 - y_2 = 8$.*
2. *La formule de DFR :$f'(x_2) \simeq f'_{hg}(x_2) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{h} = y_2 - y_1 = 4$.*
3. *La formule de DFC :$f'(x_2) \simeq f'_{hc}(x_2) = \frac{f(x_3)-f(x_1)}{2h} = \frac{y_3-y_1}{2} = 6$.*

Evaluons les erreurs d'approximation sachant que $f'(x) = \ln 2 \; 2^x, x \in [1,5]$:

$$\begin{aligned} E_1 &= |f'(x_2) - f'_{hd}(x_2)| = |8\ln 2 - 8| \simeq 2,454. \\ E_2 &= |f'(x_2) - f'_{hg}(x_2)| = |8\ln 2 - 4| \simeq 1,545. \\ E_3 &= |f'(x_2) - f'_{hc}(x_2)| = |8\ln 2 - 6| \simeq 0,454. \end{aligned}$$

D'où, la meilleure formule pour approcher $f'(3)$ est celle de DFC.

2.2.2 Formules à trois points

Il est possible de développer d'autres formules, pour cela il suffit d'effectuer un développement de Taylor de f autour de x avec un pas $2h$ par exemple :

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2 f''(x) + \frac{4h^3}{3} f'''(\xi_1), \; \xi_1 \in [x, x+2h].$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \frac{h^3}{6} f'''(\xi_2), \; \xi_2 \in [x, x+h].$$

En combinant ces deux équations de façon à faire disparaître la dérivée seconde, on obtient

$$\begin{cases} f'_{hd}(x) &= \frac{4f(x+h) - 3f(x) - f(x+2h)}{2h} \text{ est une approximation de la dérivée première de } f \text{ en } x; \\ \\ E &= \frac{h^2}{3} f''(\xi), \; \xi \in [x, x+2h] \text{ c'est l'erreur commise.} \end{cases}$$

Remarque 2.2. *La dérivation numérique est une opération très instable, c'est à dire très sensible aux erreurs d'arrondi (soustraction entre termes voisins). Prenons par exemple*

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2),$$

où $f(x-h) = f^*(x-h) \pm e_1$ et $f(x+h) = f^*(x+h) \pm e_2$, alors

$$f'(x) = \frac{f^*(x+h) - f^*(x-h)}{2h} \pm \frac{e_2 + e_1}{2h} + O(h^2).$$

Si le pas h est trop réduit il y'aura beaucoup d'erreurs d'arrondi.

2.3 Approximation des dérivées d'ordre supérieur

2.3.1 Approximation de la dérivée seconde

Pour obtenir une approximation de la dérivée seconde, nous procédons de la même façon, mais à partir de développements de Taylor d'ordre 4 :

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_1),\ \xi_1 \in [x, x+h].$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(\xi_2),\ \xi_2 \in [x-h, x].$$

Après addition, on obtient

$$\begin{cases} f''_{hc}(x) &= \frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = \frac{\delta_h^2 f(x)}{h^2} \text{ est une approximation de la dérivée seconde de } f \text{ en } x; \\ E &= -\frac{h^2}{12}f^{(4)}(\xi),\ \xi \in [x-h, x+h] \text{ c'est l'erreur commise.} \end{cases}$$

Cette formule est appelée formule de différences finies centrées (ou symétrique). Elle est d'ordre 2 et est très importante dans la pratique.

2.3.2 Approximation des dérivées d'ordre ≥ 2

On peut évidemment généraliser cette approche et déterminer des approximations des dérivées d'ordre supérieur ou égal à deux.

On a déja vu que $\frac{\Delta_h f}{h}$, $\frac{\nabla_h f}{h}$ et $\frac{\delta_{2h} f}{2h}$ approximent la dérivée première de f (en x) avec une précision proportionnelle à h, h et h^2 respectivement. Ces trois opérateurs sont linéaires par rapport à f et sont appelés **opérateurs aux différences finies**. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on peut généraliser ces concepts d'opérateurs pour approximer la dérivée d'ordre n de f en un point $x \in]a, b[$. Pour cela, on va définir récursivement :

$$\Delta_h^n f(x) = \Delta_h(\Delta_h^{n-1} f)(x),\ \ \nabla_h^n f(x) = \nabla_h(\nabla_h^{n-1} f)(x),\ \ \delta_h^n f(x) = \delta_h(\delta_h^{n-1} f)(x).$$

De manière analogue au cas où $n = 1$, on peut montrer que

$$\frac{\Delta_h^n f}{h^n},\quad \frac{\nabla_h^n f}{h^n} \quad \text{et} \quad \frac{\delta_h^n f}{h^n} \text{ (ou } \frac{\delta_{2h}^n f}{(2h)^n})$$

sont des approximations de $f^{(n)}$ (en x) avec une erreur proportionnelle à h, h et h^2, respectivement, dès que f est de classe C^{n+1}, C^{n+1} et C^{n+2}, respectivement.

2.4 Exercices

Exercice :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^5 sur l'intervalle $[a, b]$. On se fixe un nombre $(h > 0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a, b[$. Soit le rapport

$$A = \frac{f(x+3h) - 3f(x+h) + 3f(x-h) - f(x-3h)}{8h^3}.$$

1. Montrer que le rapport A approche une dérivée de f que l'on déterminera.
   Donner l'ordre de précision de cette approximation.
2. Vérifier que A coïncide avec une formule de dérivation numérique que l'on donnera.

Solution :

1. Effectuons les développements de Taylor de f au voisinage de x jusqu'à l'ordre 4 avec un reste en $O(h^5)$:

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2} f''(x) + \tfrac{h^3}{6} f'''(x) + \tfrac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + O(h^5), && (1)\\
f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \tfrac{h^2}{2} f''(x) - \tfrac{h^3}{6} f'''(x) + \tfrac{h^4}{24} f^{(4)}(x) + O(h^5), && (2)\\
f(x+3h) &= f(x) + 3hf'(x) + \tfrac{9h^2}{2} f''(x) + \tfrac{9h^3}{2} f'''(x) + \tfrac{27h^4}{8} f^{(4)}(x) + O(h^5), && (3)\\
f(x-3h) &= f(x) - 3hf'(x) + \tfrac{9h^2}{2} f''(x) - \tfrac{9h^3}{2} f'''(x) + \tfrac{27h^4}{8} f^{(4)}(x) + O(h^5). && (4)
\end{aligned}$$

   Le numérateur du rapport A s'écrit alors :

$$(3) - 3 \times (1) + 3 \times (2) - (4) = 8h^3 f'''(x) + O(h^5).$$

   Autrement dit, $A = f'''(x) + O(h^2)$.
   D'où, A approxime la dérivée troisième de f en x, avec une erreur en $O(h^2)$.
2. On a $\delta^3 f(x) = f(x+3h) - 3f(x+h) + 3f(x-h) - f(x-3h)$. Alors

$$A = \frac{\delta^3_{2h} f(x)}{(2h)^3}.$$

   D'où, le rapport R n'est autre que la formule des différences finies centrées (symétriques) d'ordre 3 qui approxime $f'''(x)$ par $\frac{\delta^3_{2h} f(x)}{(2h)^3}$ avec une erreur en $O(h^2)$.

Exercice :

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^6 sur l'intervalle $[a, b]$. On se fixe un nombre $(h > 0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a, b[$.

1. Montrer que le rapport

$$B = \frac{-2f(x+2h) + 32f(x+h) - 60f(x) + 32f(x-h) - 2f(x-2h)}{24h^2}$$

   approche une dérivée de f que l'on déterminera. Donner l'ordre de précision de cette approximation.
2. Commenter les résultats obtenus.

Solution :

1. Effectuons les développements de Taylor de f au voisinage de x jusqu'à l'ordre 5 avec un reste en $O(h^6)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) + \tfrac{h^3}{6}f'''(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \tfrac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6), \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) - \tfrac{h^3}{6}f'''(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \tfrac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6), \quad (2)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \tfrac{4h^3}{3}f'''(x) + \tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}(x) + O(h^6), \quad (3)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \tfrac{4h^3}{3}f'''(x) + \tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) - \tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}(x) + O(h^6). \quad (4)$$

Le numérateur du rapport B s'écrit alors :

$$32 \times [(1)+(2)] - 2 \times [(3)+(4)] - 60f(x) = 24h^2f''(x) + O(h^6).$$

Autrement dit, $B = f''(x) + O(h^4)$.
D'où, B approxime la dérivée seconde de f en x, avec une erreur en $O(h^4)$.

2. Rappelons que $\frac{\Delta_h^2 f}{h^2}$, $\frac{\nabla_h^2 f}{h^2}$ et $\frac{\delta_h^2 f}{(h)^2}$ approximent f'' en x avec une erreur proportionnelle à h, h et h^2 (respectivement). Donc le rapport B est beaucoup plus précis.

Exercice :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^6 sur l'intervalle $[a,b]$. On se fixe un nombre $(h>0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a,b[$.

1. Montrer que le rapport

$$C = \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^4}$$

approche une dérivée de f que l'on déterminera.
Donner l'ordre de précision de cette approximation.

Solution :

1. Effectuons les développements de Taylor de f au voisinage de x jusqu'à l'ordre 5 avec un reste en $O(h^6)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) + \tfrac{h^3}{6}f'''(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \tfrac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6), \quad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) - \tfrac{h^3}{6}f'''(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \tfrac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6), \quad (2)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \tfrac{4h^3}{3}f'''(x) + \tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}(x) + O(h^6), \quad (3)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \tfrac{4h^3}{3}f'''(x) + \tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) - \tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}(x) + O(h^6). \quad (4)$$

En combinant ces quatre équations, on obtient

$$[(3)+(4)] - 4 \times [(1)+(2)] + 6f(x) = h^4f^{(4)}(x) + O(h^6).$$

Donc, $C = f^{(4)}(x) + O(h^2)$.
D'où, C est une approximation de la dérivée seconde de f en x, avec une précision en $O(h^2)$.

Série de T.D. N°2

Exercice 2.1.

1. *Soit données trois méthodes de dérivation numérique* (M_1, M_2, M_3) *d'une fonction* f *définie et suffisamment dérivable sur* $[a, b]$*, de pas de discrétisation* h*.*
   Comparer la précision de ces trois méthodes sachant que les erreurs absolues respectives sont de la forme :
   $$E_1 = O(h^2), \quad E_2 = O(h), \quad E_3 = O(h^4).$$
   Réponse : ....

2. *Soient* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction suffisamment dérivable,* $z \in]a, b[$ *et* $h > 0$*, deux nombres donnés.*

   i) *Approximer* $f'(z)$ *avec une erreur en* $O(h)$*.*
   Réponse : ....

   ii) *Approximer* $f'(z)$ *avec une erreur en* $O(h^2)$*.*
   Réponse : ....

   ii) *Approximer* $f''(z)$ *avec une erreur en* $O(h^2)$*.*
   Réponse : ....

3. *Considérons la fonction* f *passant par les points*
   $$(x_0, y_0) = (1, 2),\ (x_1, y_1) = (2, 4),\ (x_2, y_2) = (3, 8),\ (x_3, y_3) = (4, 16).$$

   i) *Approximer le nombre* $f'(3)$ *avec une erreur en* $O(h)$*.*
   Réponse : ....

   ....

   ii) *Approximer le nombre* $f'(3)$ *avec une erreur en* $O(h^2)$*.*
   Réponse : ....

   ....

   ii) *Approximer le nombre* $f''(3)$ *avec une erreur en* $O(h^2)$*.*
   Réponse : ....

   ....

Exercice 2.2.

On a mesuré toutes les 10 secondes la vitesse (en m/s) d'écoulement de l'eau dans une conduite cylindrique. On a calculé à l'aide de ces données la table de différences divisées suivante :

t_i	$V(t_i)$	*DD1*	*DD2*	*DD3*
$t_0 = 0$	$V(t_0) = 2,00$			
$t_1 = 10$	$V(t_1) = 1,89$	$\delta[t_0, t_1] =$		
$t_2 = 20$	$V(t_2) = 1,72$	$\delta[t_1, t_2] =$?		
$t_3 = 30$	$V(t_3) = 1,44$	$\delta[t_2, t_3] =$?	?	

1. *Compléter la table.*
2. *Trouver l'approximation de la vitesse V (en m/s) à $\bar{t} = 15s$ avec un polynôme de Newton de degré 2.*
3. *Estimer l'erreur commise sur la vitesse calculée en (2) sachant que $\delta^4[t_0, t_1, t_2, \bar{t}\,] \approx \delta^4[t_0, t_1, t_2, t_3]$.*
4. *En utilisant la formule des différences finies centrées trouver une approximation de l'accélération d'écoulement de l'eau γ à $t = 20s$.*

Exercice 2.3.

1. *Rappeler les formules de dérivation numériques de différences finies progressives, de différences finies régressives et celle de de différences finies centrées ainsi que les erreurs d'approximation commises, respectivement.*
2. *Considérons la fonction $x \mapsto f(x) = x^2,\ x \in \mathbb{R}$ et soit $x_0 = 7$.*

   a) i) *Approximer $f'(x_0)$, à l'aide de la formule de différences finies progressives pour $h = 0,06$ puis pour $h = 0,01$, en faisant les calculs avec 3 chiffres significatifs.*

   ii) *Calculer les erreurs d'approximation commises dans les deux cas.*
   Commenter les résultats obtenus.

   b) i) *Approximer $f'(x_0)$, à l'aide de la formule de différences finies progressives pour $h = 0,06$ puis pour $h = 0,01$, en faisant les calculs avec 6 chiffres significatifs.*

   ii) *Calculer les erreurs d'approximation commises dans les deux cas.*
   Commenter les résultats obtenus.

   c) *Conclure*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^5 sur l'intervalle $[a, b]$. On se fixe un nombre $(h > 0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a, b[$.

1. Montrer que le rapport

$$D = \frac{8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h) - f(x+2h)}{12h}$$

   approche numériquement une dérivée de f que l'on déterminera. Donner l'ordre de précision de cette approximation.
2. Commenter les résultats obtenus.

Corrigé série de T.D. N°2

Solution 2.1.

1. *Soit données trois méthodes de dérivation numériques* (M_1, M_2, M_3) *d'une fonction* f *définie et suffisamment dérivable sur* $[a,b]$, *de pas de discrétisation* h.
Comparer la précision de ces trois méthodes sachant que les erreurs absolues respectives sont de la forme :
$$E_1 = O(h^2), \quad E_2 = O(h), \quad E_3 = O(h^4).$$
Réponse : *La méthode la plus précise est* M_3, *ensuite* M_1 *et la moins précise est* M_2.

2. *Soient* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction suffisamment dérivable,* $z \in]a,b[$ *et* $h > 0$, *deux nombres donnés.*

   i) *Approximer* $f'(z)$ *avec une erreur en* $O(h)$.
   Réponse : $f'(z) \approx \frac{\Delta_h f(z)}{h} = \frac{f(z+h)-f(x)}{h}$ *ou* $f'(z) \approx \frac{\nabla_h f(z)}{h} = \frac{f(z)-f(z-h)}{h}$.

   ii) *Approximer* $f'(z)$ *avec une erreur en* $O(h^2)$.
   Réponse : $f'(z) \approx \frac{\delta_{2h} f(x)}{2h} = \frac{f(z+h)-f(z-h)}{2h}$.

   ii) *Approximer* $f''(z)$ *avec une erreur en* $O(h^2)$.
   Réponse :
$$f''(z) \approx \frac{\delta_h^2 f(z)}{h^2} = \frac{f(z+h) - 2f(z) + f(z-h)}{h^2}.$$

3. *Considérons la fonction* f *passant par les points*

$$(x_0, y_0) = (1,2),\ (x_1, y_1) = (2,4),\ (x_2, y_2) = (3,8),\ (x_3, y_3) = (4,16),\ (h = x_{i+1} - x_i = 1, i = 0,1,2).$$

   i) *Approximer le nombre* $f'(3)$ *avec une erreur en* $O(h)$.
   Réponse : *La formule de DFP donne :*
$$f'(3) = f'(x_2) \approx \frac{f(x_3) - f(x_2)}{h} = y_3 - y_2 = 8.$$
   La formule de DFR donne :
$$f'(3) = f'(x_2) \approx \frac{f(x_2) - f(x_1)}{h} = y_2 - y_1 = 4.$$

   ii) *Approximer le nombre* $f'(3)$ *avec une erreur en* $O(h^2)$.
   Réponse : *La formule de DFC donne :*
$$f'(3) = f'(x_2) \approx \frac{f(x_3) - f(x_1)}{2h} = \frac{y_3 - y_1}{2} = 6.$$

   iii) *Approximer le nombre* $f''(3)$ *avec une erreur en* $O(h^2)$.
   Réponse : *La formule de DFC donne :*
$$f''(3) = f''(x_2) \approx \frac{f(x_3) - 2f(x_2) + f(x_1)}{h^2} = \frac{y_3 - 2y_2 + y_1}{1} = 4.$$

Solution 2.2.

1. *La table des différences divisées :*

t_i	$V(t_i)$	*DD1*	*DD2*	*DD3*
$t_0 = 0$	$V(t_0) = 2,00$			
$t_1 = 10$	$V(t_1) = 1,89$	$\delta[t_0, t_1] = -1,1 \times 10^{-2}$		
$t_2 = 20$	$V(t_2) = 1,72$	$\delta[t_1, t_2] = -1,7 \times 10^{-2}$	$\delta^2[t_0, t_1, t_2] = -3,0 \times 10^{-4}$	
$t_3 = 30$	$V(t_3) = 1,44$	$\delta[t_2, t_3] = -1,8 \times 10^{-2}$	$\delta^2[t_1, t_2, t_3] = -5,5 \times 10^{-4}$	$\delta^3[t_0, t_1, t_2, t_3] = -8,3333 \times 10^{-6}$

2. *D'après la table de différences divisées on a le polynôme de degré 2 :*

$$P_2(t) = 2 - 1,1 \times 10^{-2} t - 3 \times 10^{-4} t(t - 10),$$

ce qui donne l'approximation :

$$V(15) \approx P_2(15) = 1,8125.$$

3. *On a*

$$\begin{aligned} |V(15) - P_2(15)| &= \left|\delta^4[t_0, t_1, t_2, \bar{t}\,](15 - t_0)(15 - t_1)(15 - t_2))\right| \\ &\approx |\delta^4[t_0, t_1, t_2, t_3](15 - 0)(15 - 10)(15 - 20)| = 3,12374 \times 10^{-3}. \end{aligned}$$

4. *On a*

$$\gamma(20) = V'(20) \approx \frac{V(20 + 10) - V(20 - 10)}{20} = -2,25 \times 10^{-2} m/s^2.$$