UNIVERSITE D'ANTANANARIVO
FACULTE DES SCIENCES
Mention : Physique et chimie

Année universitaire 2023-2024

L3 PAAC
TD 2
METHODE NUMERIQUE

Exercice 1 :

Considérons une fonction $f(x)=e^x$. Estimer la dérivée de $f(x)$ en $x=1$ avec un pas de $h=0.1$.

Programme en Maple

```
# Définir la fonction f(x) = e^x
f := x → exp(x);

# Valeur de x
x0 := 1;

# Pas
h := 0.1;

# Approximation de la dérivée
derivative_approx := (f(x0 + h) - f(x0)) / h;

# Afficher le résultat
evalf(derivative_approx);
```

$$x \rightarrow e^x$$

$$1$$

$$0.1$$

$$30.04166024 - 10.\, e$$

$$2.85884196$$

Exercice 2 :

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^5 sur l'intervalle $[a,b]$. On se fixe un nombre $(h > 0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x \in]a,b[$. Soit le rapport

$$A = \frac{f(x+3h) - 3f(x+h) + 3f(x-h) - f(x-3h)}{8h^3}.$$

1. *Montrer que le rapport A approche une dérivée de f que l'on déterminera. Donner l'ordre de précision de cette approximation.*
2. *Vérifier que A coïncide avec une formule de dérivation numérique que l'on donnera.*

Réponse

1. *Effectuons les développements de Taylor de f au voisinage de x jusqu'à l'ordre 4 avec un reste en $O(h^5)$:*

$$\begin{aligned}
f(x+h) &= f(x)+hf'(x)+\tfrac{h^2}{2}f''(x)+\tfrac{h^3}{6}f'''(x)+\tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+O(h^5), && (1)\\
f(x-h) &= f(x)-hf'(x)+\tfrac{h^2}{2}f''(x)-\tfrac{h^3}{6}f'''(x)+\tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+O(h^5), && (2)\\
f(x+3h) &= f(x)+3hf'(x)+\tfrac{9h^2}{2}f''(x)+\tfrac{9h^3}{2}f'''(x)+\tfrac{9h^4}{8}f^{(4)}(x)+O(h^5), && (3)\\
f(x-3h) &= f(x)-3hf'(x)+\tfrac{9h^2}{2}f''(x)-\tfrac{9h^3}{2}f'''(x)+\tfrac{9h^4}{8}f^{(4)}(x)+O(h^5). && (4)
\end{aligned}$$

   Le numérateur du rapport A s'écrit alors :

$$(3)-3\times(1)+3\times(2)-(4)=8h^3f'''(x)+O(h^5).$$

   Autrement dit, $A=f'''(x)+O(h^2)$.
   D'où, A approxime la dérivée troisième de f en x, avec une erreur en $O(h^2)$.
2. *On a* $\delta^3 f(x)=f(x+3h)-3f(x+h)+3f(x-h)-f(x-3h)$. *Alors*

$$A=\frac{\delta^3_{2h}f(x)}{(2h)^3}.$$

   D'où, le rapport R n'est autre que la formule des différences finies centrées (symétriques) d'ordre 3 qui approxime $f'''(x)$ par $\frac{\delta^3_{2h}f(x)}{(2h)^3}$ avec une erreur en $O(h^2)$.

Exercice 3 :

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^6 sur l'intervalle $[a,b]$. On se fixe un nombre $(h>0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x\in]a,b[$.

1. *Montrer que le rapport*

$$B=\frac{-2f(x+2h)+32f(x+h)-60f(x)+32f(x-h)-2f(x-2h)}{24h^2}$$

   approche une dérivée de f que l'on déterminera. Donner l'ordre de précision de cette approximation.
2. *Commenter les résultats obtenus.*

Réponse

1. *Effectuons les développements de Taylor de f au voisinage de x jusqu'à l'ordre 5 avec un reste en $O(h^6)$:*

$$\begin{aligned}
&f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\tfrac{h^2}{2}f''(x)+\tfrac{h^3}{6}f'''(x)+\tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x)+\tfrac{h^5}{120}f^{(5)}(x)+O(h^6), && (1)\\
&f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\tfrac{h^2}{2}f''(x)-\tfrac{h^3}{6}f'''(x)+\tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x)-\tfrac{h^5}{120}f^{(5)}(x)+O(h^6), && (2)\\
&f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(x)+\tfrac{4h^3}{3}f'''(x)+\tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}(x)+\tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}(x)+O(h^6), && (3)\\
&f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+2h^2f''(x)-\tfrac{4h^3}{3}f'''(x)+\tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}(x)-\tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}(x)+O(h^6). && (4)
\end{aligned}$$

   Le numérateur du rapport B s'écrit alors :

$$32\times[(1)+(2)]-2\times[(3)+(4)]-60f(x)=24h^2f''(x)+O(h^6).$$

   Autrement dit, $B=f''(x)+O(h^4)$.
   D'où, B approxime la dérivée seconde de f en x, avec une erreur en $O(h^4)$.
2. *Rappelons que $\frac{\Delta^n_h f}{h^n}$, $\frac{\nabla^n_h f}{h^n}$ et $\frac{\delta^n_h f}{(h)^n}$ approximent f'' en x avec une erreur proportionnelle à h, h et h^2 (respectivement). Donc le rapport B est beaucoup plus précis.*

Exercice 4 :

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ une fonction de classe au moins C^6 sur l'intervalle $[a,b]$. On se fixe un nombre $(h>0)$ "petit" ainsi qu'un point quelconque $x\in]a,b[$.

1. *Montrer que le rapport*

$$C=\frac{f(x+2h)-4f(x+h)+6f(x)-4f(x-h)+f(x-2h)}{h^4}$$

   approche une dérivée de f que l'on déterminera. Donner l'ordre de précision de cette approximation.

Réponse

1. *Effectuons les développements de Taylor de* f *au voisinage de* x *jusqu'à l'ordre* 5 *avec un reste en* $O(h^6)$:

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) + \tfrac{h^3}{6}f'''(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \tfrac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6), \qquad (1)$$

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \tfrac{h^2}{2}f''(x) - \tfrac{h^3}{6}f'''(x) + \tfrac{h^4}{24}f^{(4)}(x) - \tfrac{h^5}{120}f^{(5)}(x) + O(h^6), \qquad (2)$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \tfrac{4h^3}{3}f'''(x) + \tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}(x) + O(h^6), \quad (3)$$

$$f(x-2h) = f(x) - 2hf'(x) + 2h^2f''(x) - \tfrac{4h^3}{3}f'''(x) + \tfrac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) - \tfrac{4h^5}{15}f^{(5)}(x) + O(h^6). \quad (4)$$

En combinant ces quatre équations, on obtient

$$[(3)+(4)] - 4\times[(1)+(2)] + 6f(x) = h^4 f^{(4)}(x) + O(h^6).$$

Donc, $C = f^{(4)}(x) + O(h^2)$.
D'où, C *est une approximation de la dérivée seconde de* f *en* x, *avec une précision en* $O(h^2)$.