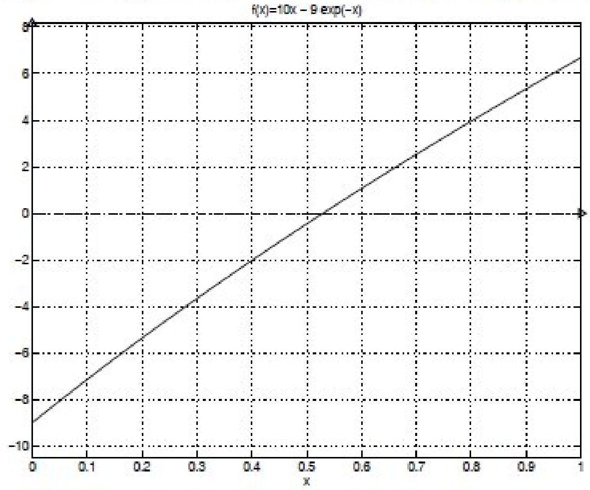
Approximation de racines d'équations

C'est seulement pour certaines équations bien particulières que les procédés classiques de résolution permettent d'exprimer les solutions exactes. Un exemple typique est celui des équations du second degré, en utilisant le discriminant. Dans de nombreux cas, on peut seulement localiser les solutions, et en calculer des valeurs numériques approchées.

Considérons par exemple, l'équation

$$10x - 9e^{-x} = 0.$$

Les méthodes usuelles de transformation (transposition, utilisation de la fonction logartihme, ...) ne permettent pas de résoudre algébriquement cette équation. Pourtant, on observe graphiquement qu'elle admet une solution unique sur $[0, 1]$.



Dans ce chapitre, on va exposer les principales méthodes itératives de résolution d'une équation de la forme

$$f(x) = 0,$$

où f est une fonction continue définie sur un intervalle $[a, b]$. On se placera dans le cas où, localement, il y a une unique racine, pour en donner un algorithme d'approximation.

.1. Méthode de la dichotomie

Cette méthode consiste en une succession de divisions par deux de l'intervalle pour approcher de plus en plus la racine de l'équation $f(x) = 0$, jusqu'à ce qu'une précision ε soit atteinte.

.1.1. *Hypothèses sur la fonction f*

vérifie les hypothèses :

$$\left\| \begin{array}{ll} (D1) & f \text{ est continue sur } [a, b], \\ (D2) & f \text{ est strictement monotone sur } [a, b], \\ (D3) & f(a).f(b) < 0, \end{array} \right.$$

ce qui assure l'existence et l'unicité de la racine $c \in [a, b]$.

.1.2. *Algorithme de la méthode*

On partage $[a, b]$ en deux intervalles égaux $[a, \frac{a+b}{2}]$ et $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Si le signe de $f((a + b)/2)$ est le même que celui de $f(a)$, la racine c appartient à l'intervalle $[\frac{a+b}{2}, b]$.

Sinon, elle appartient à l'intervalle $[a, \frac{a+b}{2}]$.

On réitère le procédé avec l'intervalle obtenu contenant c .

On arrête l'itération lorsque la longueur de l'intervalle devient inférieure à un nombre ε fixé au départ.

Remarque

A l'étape n, c appartient à l'intervalle de travail, qui a pour longueur

$$\frac{b-a}{2^n}.$$

D'une itération à la suivante, l'erreur est donc multipliée par $1/2$.

.1.3. *Exemple*

On considère l'équation $10x - 9e^{-x} = 0$. La fonction f définie sur $[0, 1]$ par

$$f(x) = 10x - 9e^{-x}$$

est continue, dérivable, et sa dérivée f' vérifie

$$f'(x) = 10 + 9e^{-x} > 0,$$

donc f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

De plus $f(0) = -9$ et $f(1) = 10 - 9/e \simeq 6,69$ sont de signes contraires.

On peut donc utiliser la méthode de dichotomie pour calculer à 10^{-6} près la solution de l'équation proposée.

Le nombre n de termes à calculer doit vérifier :

$$\frac{1-0}{2^n} \leqslant 10^{-6},$$

soit

$$n \geqslant \frac{\ln(10^6)}{\ln(2)}.$$

On crée le fichier *f1.m*

```
function y=f1(x)
y=10*x-9*exp(-x);
```

On évalue le nombre n_0 de termes à calculer (sous *Matlab*, **ceil(x)** donne le plus petit entier supérieur ou égal à x)

```
» n0=ceil(log(1e6)/log(2))
n0 = 20
```

D'où

```
» a = 0 ; b = 1 ;
» for i = 1 :20
   m=(a+b)/2 ;
   f1DeM = f1(m) ;
   if (f1DeM >0) b = m ; else a = m ; end
end
```

On affiche l'intervalle obtenu

```
» format long
» [a b]
ans = 0.52983283996582    0.52983379364014
```

A 10^{-6} près, la solution est 0.529833.

.1.4. *En conclusion*

La méthode de dichotomie a l'avantage d'exiger peu d'hypothèses sur la fonction. Elle sert parfois de moyen de calcul d'une initialisation pour les algorithmes des autres méthodes. L'inconvénient majeur de cette méthode est la lenteur de convergence de son algorithme.

.2. Méthode des approximations successives (ou du point fixe)

Parmi les méthodes de résolution de l'équation

$$f(x) = 0,$$

la méthode dite des approximations successives (ou du point fixe) est la plus importante. Son principe est basé sur la construction d'une suite itérative approchant de plus en plus la racine exacte, son premier élément (appelé initialisation) pouvant être n'importe quel point de l'intervalle de travail $[a, b]$.

La méthode du point fixe s'applique à des équations de la forme

$$\varphi(x) = x.$$

On peut toujours écrire l'équation $f(x) = 0$ sous une forme équivalente de ce type.

Par exemple, l'équation $10x - 9e^{-x} = 0$ est équivalente à

$$x = \frac{9}{10}e^{-x}.$$

On prendra garde de ne pas confondre la fonction f et la fonction φ.

.2.1. *Hypothèses sur la fonction* φ

On se place dans le cas où la fonction

$$\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$$

vérifie les hypothèses :

$$\left\|\begin{array}{ll} (F1) & \varphi \textit{ est continue et dérivable sur } [a,b], \\ (F2) & \varphi \textit{ prend ses valeurs dans } [a,b], \\ (F3) & \exists M \in]0,1[: \forall x \in [a,b] \quad |\varphi'(x)| \leqslant M. \end{array}\right.$$

On dira que φ est une contraction stricte.

2.2. *Théorème du point fixe*

Lorsque φ vérifie les trois hypothèses $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$, il existe une unique racine c de l'équation $\varphi(x) = x$, appelée point fixe de φ.

Considérons en effet la fonction définie par

$$g(x) = \varphi(x) - x,$$

qui est strictement décroissante puisque

$$g'(x) = \varphi'(x) - 1 < 0$$

grâce à $(F3)$. Alors, d'après l'hypothèse $(F2)$, on a

$$\begin{cases} g(a) = \varphi(a) - a \geqslant 0 \\ g(b) = \varphi(b) - b \leqslant 0. \end{cases}$$

Le théorème des valeurs intermédiaires donne alors l'existence d'un unique point c appartenant à $[a, b]$ tel que

$$g(c) = 0.$$

.2.3. *Algorithme et estimation d'erreur*

.2.3.1. *Algorithme*

On construit la suite des itérés de la manière suivante :

– on fixe un point x_0 quelconque de $[a, b]$,

– puis on définit

$$\begin{cases} x_1 = \varphi(x_0) \\ x_2 = \varphi(x_1) \\ \vdots \\ x_{n+1} = \varphi(x_n). \end{cases}$$

2.3.2. *Majoration d'erreur*

Si c est le point fixe de φ, on a

$$\begin{aligned} |x_1 - c| &= |\varphi(x_0) - \varphi(c)| \leqslant M\,|x_0 - c| < |x_0 - c| \\ |x_2 - c| &= |\varphi(x_1) - \varphi(c)| \leqslant M\,|x_1 - c| < |x_1 - c|\,. \end{aligned}$$

En réitérant, on voit bien qu'on s'approche de plus en plus de la racine : c'est le principe des approximations successives. Plus précisément, on démontre par récurrence la **majoration d'erreur**

$$\| \forall n \geqslant 0 \quad |x_n - c| \leqslant M^n\,|x_0 - c| \leqslant M^n\,|b-a|\,.$$

En effet, la propriété est évidemment vérifiée pour $n=0$, et si on la suppose vérifiée à un rang $n-1$ donné, le théorème des accroissements finis implique l'existence d'un $\xi \in]a,b[$ tel que :

$$\begin{aligned} |x_n - c| &= |\varphi(x_{n-1}) - \varphi(c)| \\ &= |\varphi'(\xi)(x_{n-1} - c)| \\ &\leqslant M\,|x_{n-1} - c| \\ &\leqslant M.M^{n-1}\,|x_0 - c| \\ &\leqslant M^n\,|x_0 - c| \\ &\leqslant M^n\,|b-a|\,. \end{aligned}$$

Ainsi, la suite (x_n) converge vers c puisque, M appartenant à $]0,1[$, on a

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} M^n = 0.$$

2.3.3. *Test d'arrêt*

Fixons $\varepsilon > 0$. Pour que x_n soit une valeur approchée de c à ε près, il suffit que :

$$M^n\,|b-a| \leqslant \varepsilon$$

soit

$$n \geqslant \frac{\ln \varepsilon - \ln |b-a|}{\ln M}.$$

D'où l'algorithme de la méthode du point fixe :

> *Etant donné une fonction φ vérifiant les hypothèses $(F1)$, $(F2)$, $(F3)$ sur un intervalle $[a,\ b]$, et un nombre positif ε :*
> - *on calcule $n_0 = E\left(\frac{\ln \varepsilon - \ln|b-a|}{\ln M}\right) + 1,$*
> - *on choisit $x_0 \in [a,\ b]$,*
> - *pour n de 1 à n_0, on calcule $x_n = \varphi(x_{n-1})$.*

Une valeur approchée à ε près de la racine c est x_{n_0}.

.2.3.4. *Remarque*

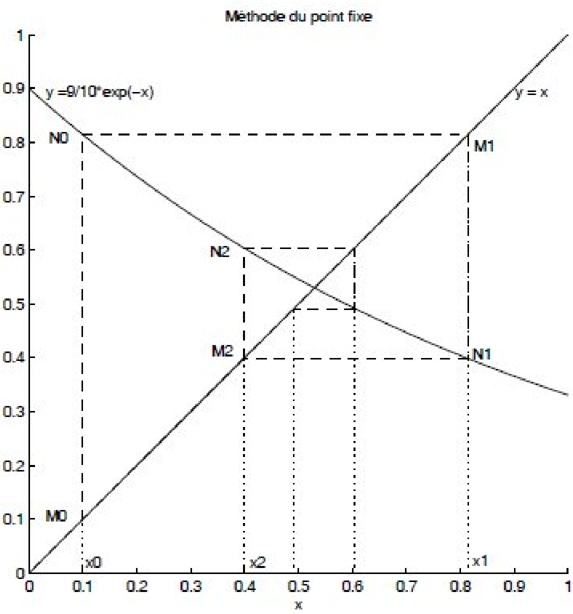
On peut construire graphiquement la suite des itérés (x_i), à l'aide de la ligne polygonale $[M_0 N_0 M_1 N_1 M_2 N_2 ...]$, où M_i a pour coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_i \\ x_i \end{pmatrix}$$

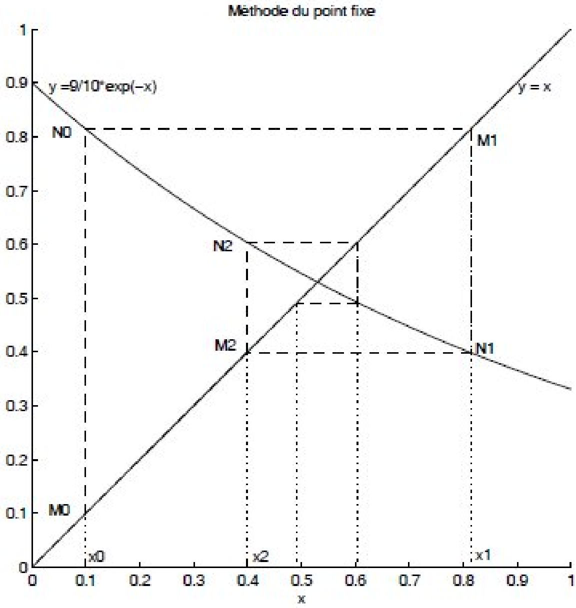
et N_i a pour coordonnées

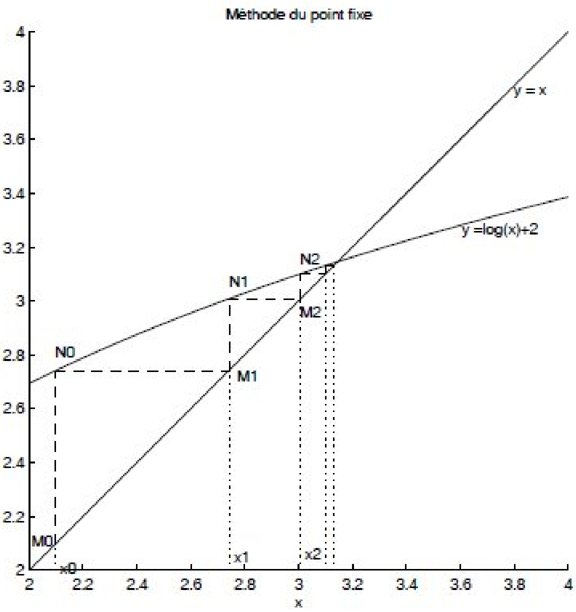
$$\begin{pmatrix} x_i \\ \varphi(x_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_i \\ x_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $[M_i N_i]$ est le segment "vertical" joignant les points d'abscisse x_i de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe d'équation $y = \varphi(x)$, et $[N_i M_{i+1}]$ est le segment "horizontal" joignant les points d'ordonnée x_{i+1} de ces deux mêmes figures (voir exercice 6.5.4).



Ainsi, $[M_i N_i]$ est le segment "vertical" joignant les points d'abscisse x_i de la droite d'équation $y = x$ et de la courbe d'équation $y = \varphi(x)$, et $[N_i M_{i+1}]$ est le segment "horizontal" joignant les points d'ordonnée x_{i+1} de ces deux mêmes figures (voir exercice 6.5.4).





.2.4. *Exemple*

Pour calculer à 10^{-6} près la solution, dans l'intervalle $[0, 1]$, de l'équation

$$x = \frac{9}{10}e^{-x}$$

par la méthode du point fixe, on procède comme suit :

– On définit la fonction φ, telle que

$$\varphi\left(x\right) = \frac{9}{10}e^{-x}.$$

Cette fonction est continue et dérivable sur $[0,\ 1]$.

– Pour vérifier l'hypothèse $(F2)$, on étudie les variations de φ, en calculant φ' :

```
» syms x ;
» phiDeX = 9/10*exp(-x) ;
» phiPrimeDeX = diff( phiDeX )
  phiPrimeDeX = -9/10*exp(-x)
```

Comme $\varphi'(x) < 0$, φ décroît de $\varphi(1)$ à $\varphi(0)$

```
» phiDe1= subs( phiDeX ,1)
  phiDe1 = 0.3311
» phiDe0= subs( phiDeX ,0)
  phiDe0 = 0.9000)
```

Donc, $\varphi(x)$ prend ses valeurs dans l'intervalle

$$[0,3311...,\ 0,9000...] \subset [0,1],$$

et $(F2)$ est vérifiée.

– Pour vérifier $(F3)$, il faut en général étudier les variations de φ', donc calculer φ'', mais ici

$$|\varphi'(x)| = \varphi(x),$$

donc $|\varphi'(x)|$ a pour maximum $M = 0,9$.

– Le nombre n_0 de termes à calculer pour obtenir une valeur approchée de la solution à 10^{-6} près est donné par :

```
» n0=ceil ((log(10^(-6))-log(1-0))/log(9/10))
  n0 = 132
```

d'où $n_0 = 132$.

– On calcule les itérés successifs :

d'où $n_0 = 132$.

– On calcule les itérés successifs :

```
» X(1) = 0 ;
» for i = 1 :132 X(i+1) = 9/10*exp(-X(i)) ; end
» format short
» X(1 :6)
   ans =
   0 0.9000 0.3659 0.6242 0.4821 0.5557
» format long
» X(133)
   ans = 0.52983296563343
```

On retrouve la valeur approchée 0.529833 à 10^{-6} près.

.2.5. *Vitesse de convergence*

Elle dépend de la valeur de M (voir hypothèse $F3$) :

– Si M est proche de 1, la convergence est lente. On a vu dans l'exemple précédent, où $M = 0,9$ qu'il fallait 132 termes pour obtenir une précision de $\varepsilon = 10^{-6}$.

– Si $M = 0.5$, on retrouve la vitesse de convergence de la méthode de dichotomie.

– Si M est proche de 0, on a une convergence rapide.

3.1. *Hypothèses et algorithme de Newton*

3.1.1. *Hypothèses*

On revient à la résolution de l'équation

$$f(x) = 0,$$

et on suppose que la fonction f vérifie les hypothèses suivantes :

$$\left\| \begin{array}{ll} (N1) & f \textit{ est continue sur } [a,b], \\ (N2) & f \textit{ est strictement monotone sur } [a,b], \\ (N3) & f(a).f(b) < 0, \\ (N4) & f \textit{ est dérivable sur } [a,b] \text{ et } f'(x) \neq 0 \textit{ sur } [a,b]. \end{array} \right.$$

Les trois premières hypothèses garantissent l'existence et l'unicité d'une racine c de l'équation

$$f(x) = 0.$$

u.3.1.2. *Construction de l'algorithme*

L'idée principale de la méthode de Newton est de dire qu'au voisinage de la racine c la courbe représentative de la fonction peut être confondue avec la tangente en un point x_0 proche de c. Cela revient à confondre f avec son développement limité à l'ordre 1 en x_0 :

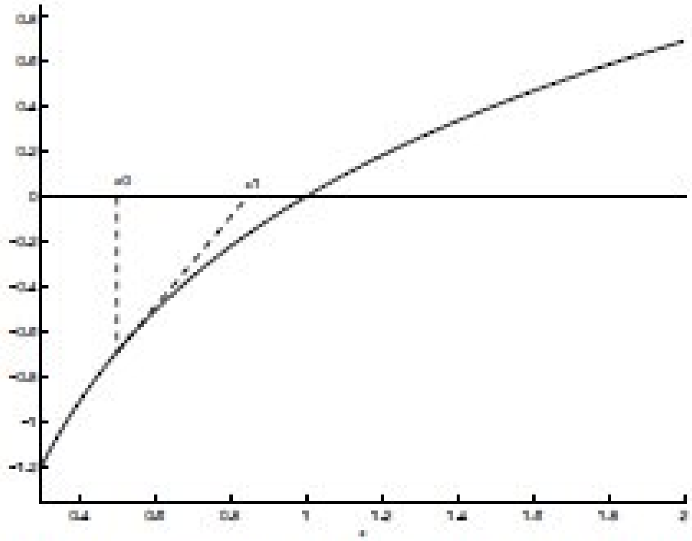
$$f(x) \simeq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (x \to x_0).$$

La solution de l'équation $f(x) = 0$ peut donc être approchée par la résolution de

$$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = 0,$$

dont la solution est

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$



x_1 est une première approximation de c. En réitérant le procédé ci-dessus, on construit la suite définie par :

$$\begin{cases} x_0 \text{ fixé proche de } c \\ x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n \geqslant 0, \end{cases}$$

appelée suite des itérés de l'algorithme de Newton.

3.1.3. *Remarque*

Cette suite est celle permettant de chercher le point fixe de la fonction

$$\varphi : x \mapsto \varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

(voir § 2.1).

φ est dérivable si, et seulement si, f' l'est. Cela conduit à ajouter l'hypothèse suivante sur f

$(N5)$ $\quad$ *f est deux fois dérivable sur $[a, b]$.*

3.1.4. *Théorème*

On a le

Théorème
Sous les hypothèses $(N1), ..., (N5)$, et pour x_0 choisi suffisamment proche de l'unique racine c, la suite des itérés de Newton converge vers c.

On admettra ce théorème dont l'idée de démonstration repose sur le fait que la fonction φ vérifie toutes les hypothèses du point fixe dans un voisinage de c.