Université d’Antananarivo
Domaine Sciences et Technologies
Mention Mathématiques et Informatique

Grade : LICENCE
Niveau : L3
Parcours : Probabilité-Statistiques Algèbre-Algorithmique Calcul Numérique

NOTE DE COURS DE PROBABILITE

M. ANDRIATAHINA HAJANIAINA Jocelyn

Année Universitaire : 2023 - 2024

Table des matières

Chapitre I : ESPACES PROBABILISES

1. Rappels sur le dénombrement

1.1. Cardinaux

Définition 1.1.1 : Soit A un ensemble fini. Le cardinal de A noté Card(A) ou $|A|$ est le nombre d'éléments que contient A.

Proposition 1.1.2 (Additivité)

Soient A et B deux ensembles finis disjoints, c'est-à-dire $A \cap B = \emptyset$, alors

$$Card\ (A \cup B) = Card(A) + Card\ (B)$$

Preuve : TD

Proposition 1.1.3 (Inclusion et exclusion)

Soit A et B deux ensembles finis, alors $Card\ (A \cup B) = Card(A) + Card\ (B) - Card\ (A \cap B)$

Pour une valeur quelconque n, on obtient la formule de Crible suivante :

$$Card\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{i \le i_1 \le i_2 \le \cdots \le i_n \le n} Card(\bigcap_{j=1}^{k} A_{ij})$$

On remarque que les A_i sont des ensembles.

Preuve : TD

Proposition 1.1.4 (Multiplicativité)

Soit A et B deux ensembles finis, alors $Card\ (A \times B) = Card(A) \times Card\ (B)$

Preuve : TD

Corollaire 1.1.5 :

Soit A un ensemble fini de cardinal n. Le nombre de suites de longueur p constituées d'éléments de A est n^p.

1.2. Dénombrement

Théorème 1.2.1 (Principe de dénombrement)

On réalise deux expériences qui peuvent produire respectivement n et m résultats différents.

Au total, pour les deux expériences prises ensembles, il existe $n \times m$ résultats possibles.

Preuve : TD

Définition 1.2.2 :

Soit A un ensemble fini.

Une permutation de A est une manière d'ordonner, d'arranger des éléments de A.

Théorème 1.2.3 :

Il y a $n!$ permutations d'un ensemble de cardinal n.

Preuve : TD

Mini-exercice : Combien existe-t-il d'anagramme de PROBA ?

Théorème 1.2.4 :

Soit n des objets distinguables. Le nombre de permutation de r-objets pris parmi les n-objets est $A_n^r = \frac{n!}{(n-r)!}$

Preuve : TD

Théorème 1.2.5 :

Le nombre de manière de choisir p éléments parmi n (sans tenir compte de l'ordre) est $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$, c'est le nombre de parties à p-éléments pris par n-éléments. On appelle parfois la combinaison de p-éléments parmi n.

Preuve : TD

Proposition 1.2.6 :

On a les assertions suivantes :

a- $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$

b- $\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$

c- $(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} a^p b^{n-p}$

Preuve : TD

Corollaire 1.2.7 :

Soit Ω un ensemble fini de cardinal n. Le cardinal de $\mathcal{P}(\Omega)\ est\ Card\big(\mathcal{P}(\Omega)\big) = 2^n$.

Preuve : TD

Théorème 1.2.8 :

On considère n-objets parmi lesquels $n_1, n_2, \dots, n_r$ sont distinguables. Le nombre de permutations différentes est :

$$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_r!}$$

Preuve : TD

Quelques tirages possibles :

a- **Tirage avec remise :**

On dispose d'une population de n-objets, par exemple des boules numérotées de 1 à n dans une urne.
On effectue un tirage avec remise de r boules parmi les n-boules :
On pioche une boule, on note son numéro, on remet dans l'urne avant de piocher la boule suivante et ainsi de suite.
On a n possibilité pour la première boule tirée, n pour la seconde, …
Finalement, on a : n^r tirages différents.

b- **Tirage sans remise :**

- On tire toujours r boules parmi n mais sans remise : on ne remplace pas la boule dans l'urne avant de tirer la suivante.

Ainsi, on a n-possibilité pour la première boule tirée, (n-1) pour la seconde, …
Finalement, on a : A_n^r tirages différents (tirages exhaustifs)

- Cette fois, on tire r boules d'un coup et on se retrouve avec un ''tas'' de r-boules devant choix.

Le nombre de tirages différents est $\binom{n}{r}$.
Il faut remarquer que les deux derniers tirages sont équivalents : c'est juste une modélisation différente de la manipulation, une manière différente d'écrire le résultat de tirage.

2. Probabilité

2.1. Introduction :

Les probabilités vont nous servir à modéliser une expérience aléatoire, c'est-à-dire un phénomène dont on ne peut pas l'issu avec certitude et pour lequel on décide les deux moments sera l'effet de hasard.
La première tâche qui vous attend est d'écrire les différents issus possibles de cette expérience aléatoire. Puis, on cherche à associer à chacun des éventualités un nombre compris entre 0 et 1 qui mesure la chance qu'elles ont à réaliser.
Comment interpréter, fixer ce nombre, appelé probabilité ?

❖ ***Par proportion :***

On a un dé. Quelle est la probabilité de A : « Obtenir un chiffre pair » ?
Chaque face du dé a la même chance, il y en a 6. Quant aux chiffres pairs, ils sont 3, alors $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$

❖ ***Fréquence :***

Un enfant est attendu. Quelle est la probabilité que ce soit une fille ?

On a observé un grand nombre de naissance. Notons k_n le nombre des filles nées en observant n naissances.

Et d'où $\mathbb{P}(fille) = \lim_{n \to \infty} \frac{k_n}{n}$

❖ ***Opinion :***

Quelle est la probabilité pour que le BAREA gagne la CAN ? pour que le FOSA Junior soit champion de Madagascar ?

Dans ce cas, on ne peut pas résumer le même match dans la même condition plusieurs fois.

On peut considérer les qualités des joueurs, entraîneurs, le résultat de la saison, ...

Mais le choix de la probabilité est forcément subjectif.

Attention aux valeurs de probabilités. Elles sont choisies de manière arbitraire par le modélisateur et il faut manipuler avec choix.

Vocabulaire probabiliste :

Ω : événement certain

$\emptyset$: événement impossible

ω : événement élémentaire

A : événement

$\omega \in \mathrm{A}$: ω réalise A

$\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$: A implique B

$A \cup B$: A ou B

$A \cap B$: A et B

A^c ou $\bar{A}$: événement contraire de A

$A \cap B = \emptyset$: A et B sont incompatibles

2.2. Probabilité sur un ensemble fini ou dénombrable :

Définition 2.2.1 :

Une probabilité $\mathbb{P}$ est une application sur $\mathcal{P}(\Omega)$, l'ensemble des parties de Ω tel que :

i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, \forall A \subset \Omega$

ii) $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\omega)$

iii) $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbb{P}(\omega) = 1$

On peut en déduire de cette définition la proposition suivante :

Proposition 2.2.2 :

Soient A et B deux éléments

1) Si A et B sont incompatibles, alors $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$
2) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$
3) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$
4) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$

Preuve : TD

Mini-exercice : Trouver $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$, pour A, B et C des ensembles finis.

Définition 2.2.3 :

Soit une expérience aléatoire et Ω l'espace des possibles associés.

Une probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω est une application définie sur l'ensemble des événements qui vérifie :

i) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1, A \subset \Omega$

ii) Pour toutes suites d'événements $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ deux à deux incompatibles, $\mathbb{P}(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_i)$

iii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

Remarque 2.2.4 : Les événements $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont deux à deux incompatibles si pour tout $i \neq j$, $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Exemple : (Probabilité uniforme)

Soit Ω un ensemble fini. Il arrive quand on lance un dé équilibré, que les événements élémentaires ont tous la même probabilité.

On parle alors d'événement élémentaire équiprobable.

Notons p la probabilité des événements élémentaires, donc on sait que :

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega} p = p \times Card(\Omega)$$

D'où : $p = \frac{1}{Card(\Omega)} = \mathbb{P}(\omega)$ pour tout ω.

La probabilité ainsi définie sur l'ensemble Ω s'appelle la probabilité uniforme.

La probabilité d'un événement A se calcule facilement par $\mathbb{P}(A) = \frac{Card\ (A)}{Card\ (\Omega)}$

2.3. Probabilité conditionnelle et indépendance :

2.3.1. Probabilité conditionnelle :

Définition 2.3.1 :

Etant donné deux événements A et B avec $\mathbb{P}(A) > 0$, on appelle probabilité de A conditionnellement à B, ou probabilité de B sachant A, notée $\mathbb{P}_A(B)$ ou $\mathbb{P}(B|A)$ la probabilité définie par $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

On peut écrira aussi : $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A) . \mathbb{P}(A)$

De plus, la probabilité conditionnelle sachant A, $\mathbb{P}(.|A)$ possède donc toutes les propriétés de probabilité qu'on a déjà vues précédemment.

Mini-exercice : Une urne contient b boules blanches et n boules noires. On en tire 2 l'une après l'autre (sans remise). Quelle est la probabilité d'avoir deux boules blanches ?

Choisissons Ω qui décrit le résultat des expériences : $\Omega = \{(b,n)\} \times \{(b,n)\}$

Un événement est un couple (x, y) où x est la couleur de la première boule tirée et y est la couleur de la seconde.

Soit $A = "\ La\ première\ boule\ est\ blanche"$ et $B = "\ La\ seconde\ boule\ est\ noire"$

Proposition 2.3.2 (Formule de probabilité totale)

Soit A un événement tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$. Pour tous B, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B|A) . \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\bar{B}|\bar{A}) . \mathbb{P}(\bar{A})$$

Preuve : TD

Mini-exercice : Quelle est la probabilité pour que la seconde boule tirée soit blanche.

Définition 2.3.3 :

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille d'événements. On l'appelle partition de Ω si elle vérifie les deux conditions suivantes :

i) $\bigcup_{i\in I} A_i = \Omega$

ii) Les A_i sont deux à deux incompatibles (disjoints)

Proposition 2.3.4 (Formule de probabilité totale généralisée)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω, tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0, \forall i \in I$. Alors, pour tout événement B,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in \mathrm{I}} \mathbb{P}(B|A_i) . \mathbb{P}(A_i)$$

Preuve : TD

Proposition 2.3.5 (Formule de Bayes)

Soit A et B deux événements tel que $0 < \mathbb{P}(A) < 1$, $\mathbb{P}(B) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A).\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B|A).\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B|\bar{A}).\mathbb{P}(\bar{A})}$$

Preuve : TD

Proposition 2.3.6 (Formule de Bayes généralisées)

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition de Ω, tel que $\mathbb{P}(A_i) > 0, \forall i \in I$. Soit un événement B tel que $\mathbb{P}(B) > 0$, alors :

$$\forall i \in I, \mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i).\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i\in I} \mathbb{P}\,(B|A_i).\mathbb{P}(A_i)}$$

Preuve : TD

2.3.2. Indépendance :

Définition 2.3.2.

Deux événements A et B sont dits indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

De plus, s'ils ont des probabilités non nulles, on aura :

$$\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$$

Définition 2.3.3.

m événements $A_1, A_2, \dots, A_m$ sont dits indépendants si $\forall I \subset \{1,2,\dots,m\}$, $\mathbb{P}(\bigcap_{i\in I} A_i) = \prod_{i\in I} \mathbb{P}(A_i)$

TRAVAUX DIRIGES

Je

Exercice1 : Calculer la probabilité de l'union de trois événements X, Y et Z de deux manières différentes

1- Utiliser la formule $\mathbb{P}(X \cup Y) = \mathbb{P}(X) + \mathbb{P}(Y) - \mathbb{P}(X \cap Y)$
2- Appliquer la formule du Crible

Exercice2 : Soit n un entier naturel non nul, nous effectuons n-lancers d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1- Définir l'espace probabilisé associé à n-lancers ainsi que la probabilité associée
2- Calculer la probabilité de deux événements A_n et B_n suivants définis par :

$$A_n : "Nous\ obtenons\ 1\ pour\ la\ première\ fois\ au\ n - ième\ lancers"$$
$$B_n : "Nous\ n'obtenons\ aucun\ 1\ lors\ de\ n\ lancers"$$

Exercice3 : Soit X une variable aléatoire discrète prenant les valeurs 2,4,6 et 8

Déterminer la loi de probabilité de X sachant que $P(X < 6) = \frac{1}{3}$; $P(X > 6) = \frac{1}{2}$; $P(X = 2) = P(X = 4)$

Exercice4 : Soit $m \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire réelle à valeur dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{m}{2^n . n!}$$

Trouver m.

Exercice5 : Soit X une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, P(X = n) = \frac{m}{\sqrt{e} . 2^n . n!}$$

1- X admet-elle une espérance ? Si oui, déterminer.
2- X admet-elle une variance ? Si oui, déterminer.

Exercice6 : Soit X et Y une variable aléatoire discrète indépendantes telles que

$P(X = 0) = P(X = 1) = P(Y = 0) = P(Y = 1) = \frac{1}{2}$ et $P(X = x) = P(Y = x) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{0,1\}$

Posons Z la variable aléatoire qui prend pour valeur 1 si X=Y et la valeur 0 si X≠Y.

Montrer que les variables X, Y et Z sont deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes.

Exercice7 : Soit X une variable aléatoire discrète telle que

$P(X = -1) = P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{3}$ et $P(X = x) = 0 \ \forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1,0,1\}$

Soit $Y = X^2$.

Montrer que les variables aléatoires X et Y ne sont pas corrélées. Sont-elles indépendantes ?

Rappel : Deux variables aléatoires A et B sont dites corrélées si elles vérifient : Cov(A,B)=1

Exercice8 : Un candidat se présente.

Le jury qui l'a convoqué lui pose 20 questions. Pour chaque question, le même nombre $k \geq 2$ de réponses lui sont proposées dont une et une seule est la bonne.

Le candidat qui n'a pas travaillé son orale, choisit au hasard une des réponses proposées.

1- Le jury attribut un point par bonne réponse. Soit X le nombre de points obtenu à l'issu de l'orale.
   Quelle est la loi de la variable aléatoire X ?

Lorsque le candidat donne une mauvaise réponse, il peut choisir à nouveau une des autres réponses proposées.

2- Le jury lui attribue alors $\frac{1}{2}$ point par bonne réponse. Soit Y le nombre des $\frac{1}{2}$ points obtenu lors des es grandes tentatives.
   Quelle est la loi de Y ?
3- Soit T le nombre total de points obtenus. Déterminer k pour que le candidat obtienne en moyenne une note supérieure ou égale à $\frac{10}{20}$ afin qu'il soit admis.

Exercice9 : Soit f la fonction définie par $f(t) = \begin{cases} 0 \; si \; t \notin \; [0,1] \\ 2t \; sinon \end{cases}$

1- a) Démontrer que la fonction f est une densité de probabilité.

b) Démontrer que la loi de probabilité définie par f admet une espérance mathématique et une variance à préciser.

c) Déterminer la fonction de répartition associée à f.

2- Soit X une variable aléatoire de densité de probabilité f définie ci-dessus. Nous définissons $Y = 1 + X^2$

Déterminer la fonction de répartition de Y.

Exercice10 : Une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(5{,}2\;;0{,}8)$

1- Calculer $P(X \geq 4 | X \leq 5{,}2)$

2- Une variable aléatoire Y indépendante de la variable X suit la loi $\mathcal{N}(\mu\;;0{,}8)$

a) Quelle est la loi de Y-2X ?

b) Déterminer μ sachant que $P(Y \leq 2X) = 0{,}516$

Exercice11 : Deux variables aléatoires X et Y suivent respectivement les lois $\mathcal{N}(150\;;\;\sigma)$ et $\mathcal{N}(100\;;\;\sigma)$.

Il existe a tel que $P(X \leq a) = 0{,}017$ et $P(X > a) = 0{,}005$. Déterminer σ.

Exercice12 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$.

X suit la loi log normale : $L\mathcal{N}(\mu\;;\;\sigma)$ si $\ln(X)$ $suit\ la\ loi$ $\mathcal{N}(\mu\;;\;\sigma)$.

1- Calculer la densité de probabilité f_X associée à X.

2- Calculer $E(X)\ et\ Var(X)$.

Indication : Utiliser le fait que $E(A^k) = E\left(e^{k\ln(A)}\right) = E(e^{kB}) = g_{\mathbb{R}}(k) = e^{\mu k + \frac{\sigma^2 k^2}{2}}$ ***où B suit la loi*** $\mathcal{N}(\mu\;;\;\sigma)$

Exercice13 : Soit Y une variable exponentielle de loi $\mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$. La variable aléatoire $X = e^Y$ suit une loi de Pareto de paramètre λ notée $\mathcal{PA}(\lambda, 1)$. Habituellement, le deuxième paramètre de la loi de Pareto n'est pas égal à 1 mais est quelconque. C'est un paramètre seuil noté par exemple x_{min}.

1- Calculer la densité de probabilité f_X associée à X.

2- Calculer f_X associée à X.

CHAPITRE II : VARIABLES ALEATOIRES DISCRETES

1. Définitions

Définition 2.1 :

Une variable aléatoire est une fonction définie sur l'espace Ω qui associe une valeur numérique à chaque résultat de l'expérience aléatoire étudiée. Ainsi à chaque événement élémentaire ω on associe un nombre X.

Exemple :

On lance trois fois une pièce et on s'intéresse au nombre X de fois où PILE apparait. Donc, il y a deux manières de formaliser cette phrase. D'abord, à chaque événement élémentaire ω, on associe un nombre $X(\omega)$.

ω	FFF	FFP	FPF	PFF	PPF	PFP	FPP	PPP
$X(\omega)$	0	1	1	1	2	2	2	3

Ensuite, comment on observe que plusieurs événements élémentaires donnent la même valeur, on peut les regrouper et obtenir des événements (événement est égale à la réunion des événements élémentaires) qui correspondent à des valeurs distinctes de X.

k valeur prise par X	0	1	2	3
événement X=k	FFF	{FFP, FPF, PFF}	{PPF, PFP, FPP}	PPP

On peut donc observer que les événements (X=0), (X=1), (X=2) et (X=3) sont deux à deux disjoints.

De plus, la réunion de ces événements X est Ω.

Les événements correspondants à des valeurs distinctes de X sont incompatibles.

Pour tout $i \neq j$, les événements (X=i) et (Y=j) sont incompatibles : $(X = i) \cap (Y = j) = \emptyset$

De plus, $\bigcup_k (X = k) = \Omega$.

Donc : une variable qui ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs est dite discrète, sinon, elle est dite continue.

Définition 2.2 :

La loi d'une variable aléatoire discrète est la liste de toutes les valeurs différentes que peut prendre X, avec les probabilités qui leur sont associée. Souvent, on utilisera une formule plutôt qu'une liste.

X	X=0	X=1	X=2	X=3
Evénement	FFF	{FFP, FPF, PFF}	{PPF, PFP, FPP}	PPP
Probabilité	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Une autre manière permet de caractériser la loi d'une variable aléatoire : s'il s'agit de la fonction de répartition empirique.

Définition 2.3:

Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction de répartition de X la fonction de $\mathbb{R}$ vers $[0,1]$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$.

Exemple :

X est le nombre de face quand on lance 3 fois une pièce. On a la loi de la variable aléatoire X suivant :

$\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{8};\ \mathbb{P}(X = 1) = \frac{3}{8};\ \mathbb{P}(X = 2) = \frac{3}{8};\ \mathbb{P}(X = 3) = \frac{1}{8}$

$$F(x) = \begin{cases} 0 \; si \; x < 0 \\ \frac{1}{8} \; si \; 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{2} \; si \; 1 \leq x < 2 \\ \frac{7}{8} \; si \; 2 \leq x < 3 \\ 1 \; si \; x \geq 3 \end{cases}$$

Remarque 2.4 : Deux variables aléatoires ayant la même loi ont la même fonction de répartition.

Proposition 2.5 :

Soit F la fonction de répartition. Alors,

i) F est croissante

ii) F est continue à droite et admet une limite à gauche en tout point x égale à $\mathbb{P}(X < x)$

iii) $\lim_{n\to-\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{n\to+\infty} F(x) = 1$

Preuve : TD

Pour une variable aléatoire discrète, la fonction de répartition est une fonction en escalier, avec un saut en chaque valeur k de $X(\Omega)$ et la hauteur de ces sauts est la probabilité $\mathbb{P}(X = k)$.

Après avoir établi la loi d'une variable aléatoire, on peut calculer l'espérance et la variance.

Définition 2.6 :

L'espérance ou moyenne d'une variable aléatoire discrète est le réel :

$$\mathbb{E}(X) = \sum_k k \; \mathbb{P}(X = k)$$

Où on somme sur toutes les valeurs k que peut prendre X.

Théorème 2.7 :

Pour toute fonction g, $\mathbb{E}(g(X)) = \sum_k g(k)\mathbb{P}(X = k)$.

Preuve :

Posons $g(X) = y$ si et seulement si X=x avec g(x)=y,

$$\mathbb{P}(g(X) = y) = \sum_{x:g(x)=y} \mathbb{P}(X = x)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_y y \; \mathbb{P}(Y = y) = \sum_y \sum_{x:g(x)=y} g(x)\mathbb{P}(X = x) = \sum_x g(x)\mathbb{P}(X = x)$$

□

Définition 2.8 :

La variance d'une variable aléatoire discrète X est le réel positif :

$$Var(X) = \mathbb{E}(X - \mathbb{E}(X))^2$$

$$= \sum_k (k - \mathbb{E}(X))^2 \; \mathbb{P}(X = x)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$$

et l'écart-type de X : $\sigma(X)$ est la racine carrée de la variance.

Remarque 2.9 :

- L'espérance d'une variable aléatoire n'a pas un sens quand $X(\Omega)$ est infini. Dans ce cas, X a une espérance si $\sum_{k\in X(\Omega)} |k| \; \mathbb{P}(X = k) < \infty$.
- L'espérance et la variance ne dépendent de X qu'à travers sa loi, i.e. deux variables aléatoires qui ont même loi ont la même espérance et même variance.

Exemple :

Nous avons vu la loi de nombre de PILE.

Donc : $\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2}$; : $Var(X) = \frac{3}{4}$ et $\sigma(X) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2. Indépendance et conditionnement

Définition 2.1 : Deux variables aléatoires X et Y sont dites indépendantes si pour tout i, j, les événements (X=i) et (Y=j) ont indépendantes, c'est-à-dire $\mathbb{P}[X = i\,, Y = j] = \mathbb{P}(X = i)\,.\,\mathbb{P}(Y = j)$

Remarque 2.2 : Si X et Y ne sont pas indépendantes, connaître la loi de X et celle de Y ne suffit pas pour connaître la loi de (X,Y), qui est la donnée pour tout i et j la probabilité $\mathbb{P}[(X, Y) = (i, j)] = \mathbb{P}[X = i\,, Y = j]$.

Proposition 2.3 (Formule des probabilités totales)

Soit X, Y deux variables aléatoires.

Pour tout $i \in X(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = i) = \sum_{j\, \in X(\Omega)} \mathbb{P}[X = i | Y = j]\, \mathbb{P}(Y = j)$

Preuve :

On utilise la preuve de la formule des probabilités totales qu'on a vu précédemment en sachant que les événements Y=j forment une partition sur Ω.

Mini-exercice : On lance deux dés équilibrés et on note X ou Y les deux chiffres obtenus. Soit Z=X+Y. Quelle est la loi de Z ?

Indication : On peut faire un tableau à double entrée X et Y

Définition 2.4 :

Soit K un ensemble fini, les variables aléatoires discrètes $(X_k)_{k\in K}$ sont dites mutuellement indépendantes si pour tout $(x_k)_{k\in K} \in \prod_{k\in K} X_k(\Omega)$, $\mathbb{P}(\bigcap_{k\in K}(X_k = x_k)) = \prod_{k\in K} \mathbb{P}(X_k = x_k)$

Théorème 2.5 :

1- Pour toutes variables aléatoires X et Y, $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
2- Si X et Y sont indépendantes, $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$

Preuve : TD

3. Propriétés de l'Espérance :

a- L'espérance est linéaire sur $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ i.e. pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ et pour toutes variables aléatoires X et Y admettant une espérance mathématique, on a :

$$\mathbb{E}(aX + bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$$
$$\mathbb{E}(a) = a$$

b- Si g et h deux fonctions définies sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que g(X) et h(X) appartiennent à $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[ag(X) + bh(X)] = a\mathbb{E}[g(X)] + b\mathbb{E}[h(X)], pour\ tout\ a, b \in \mathbb{R}$$

c- Moment simple et moment d'ordre r :

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, le moment simple d'ordre r de X est $\mu_r(X) = \mathbb{E}(X^r)$

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, le moment centré d'ordre r de X est le réel :

$$\mu_r^m = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^r] = \mathbb{E}[(X - \mu_1)^r]$$

- Si r = 1, $\mu_1^m(X) = \mathbb{E}(X - \mu_1) = 0$
- Si r=2, $\mu_2^m(X)$ est la variance de X.

d- Pour tout a, b ∈ $\mathbb{R}$, $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

- Si $\mathbb{E}(X) = 0$, X est une variable aléatoire centrée
- Si $Var(X) = 1$, X est une variable aléatoire réduite
- Si X admet une variance non nulle, $X^* = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$ est appelé une variable centrée et réduite associée à X.

e- Les moments d'ordre 3 et 4 sont utilisés en statistiques

- Le moment d'ordre 3, lorsqu'il existe une variable aléatoire discrète X dont $\sigma > 0$ fournit le coefficient d'asymétrie $\frac{\mathbb{E}(X-\mu)^3}{\sigma^3}$.
- Le moment d'ordre 4 lorsqu'il existe de variable aléatoire dont $\sigma > 0$ fournit le coefficient d'aplatissement $\frac{\mathbb{E}(X-\mu)^4}{\sigma^4}$.

f- Fonction génératrice des moments :

Considérons la fonction $g_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}]$ définie pour l'ensemble des valeurs t pour lesquelles $\mathbb{E}[e^{tX}] < +\infty$. $g_X(t)$ est la fonction génératrice des moments de variables aléatoires discrètes X lorsqu'elle est définie dans un voisinage à l'origine.

La fonction génératrice de la variable aléatoire discrète X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est la série

$$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(t^X) \ , t \in [-1, 1]$$

La fonction génératrice ne dépend que de la loi de X. Elle caractérise la loi de X.

4. Somme et Covariance de deux variables aléatoires discrètes

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoire discrète et g une fonction de $(X, Y)(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{P}[g(X, Y) = z] = \sum_{\substack{(x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega) \\ tels\ que\ x_i + y_j = z}} \mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]$$

La loi de la somme de X et de Y est donc :

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{\substack{(x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega) \\ tels\ que\ x_i + y_j = z}} \mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]$$

si la série double S^*est absolument convergente, alors g(X, Y) admet une espérance : $\mathbb{E}[g(X, Y)] = S^*$.
Avec : $S^* = \sum_{(x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega)} g\left(x_i, y_j\right) \mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]$

Remarque 4.1 : Si deux variables aléatoires discrètes X et Y ont une variance, alors XY admet une espérance :

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{(x_i, y_j) \in (X,Y)(\Omega)} x_i, y_j \ \mathbb{P}\left[(X = x_i) \cap \left(Y = y_j\right)\right]$$

Et si X et Y sont indépendantes : $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Covariance :

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes ayant une variance.

La covariance de X et de Y est le réel défini par :

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))]$$

Propriétés : Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes

i) $Cov(X, X) = Var(X)$ et $Cov(X, Y) = Cov(Y, X)$

ii) Formule d'Huygens : $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

iii) X+Y admet une variance et

$$Var(X + Y) = Var(X) + 2Cov(X, Y) + Var(Y)$$

iv) $(X_k)_{k \in K}$ une famille finie de variable aléatoire deux à deux indépendantes et qui admet une variance, alors $\sum_{k \in K} X_k$ admet une variance et $Var\left(\sum_{k \in K} X_k\right) = \sum_{k \in K} Var(X_k)$

v) Soient X, Y et Z trois variables aléatoires discrètes ayant une variance et a,b,c et d des réels
   - $Cov(aX + bY, Z) = aCov(X, Z) + bCov(Y, Z)$
   - $Cov(aX + b, cY + d) = ac\ Cov(X, Y)$

Preuve : TD

5. Lois discrètes usuelles finie

a- Loi de Bernoulli de paramètre p :

Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit une loi de Bernoulli de paramètre p notée $\mathcal{B}(1,p)$ ou $\mathcal{B}(p)$, si la variable aléatoire X prend la valeur 1 avec la probabilité p et la valeur 0 avec la probabilité q = 1-p
Propriétés : L'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli sont respectivement égales à $\mathbb{E}(X) = p$ et $Var(X) = pq = p(1-p)$.

b- Loi uniforme discrète :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une variable aléatoire X suit une loi uniforme discrète si la variable aléatoire X prend n valeurs possibles $k_1, k_2, \dots, k_n$ avec la probabilité égale à $\frac{1}{n}$ pour n'importe quelle valeur de k.
Propriétés : X prend les valeurs 1,2,...,n et $\forall k = 1,2,\dots,n$, $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n}$
Si X suit la loi $\mathcal{U}$; $\mathbb{E}(X) = \frac{n+1}{2}$ et $Var(X) = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$

c- Loi hypergéométrique de paramètre N,n et p :

Soit N et n deux entiers naturels tels que $n \leq N$ et $p \in [0,1]$ tel que Np soit entier.
Une variable aléatoire X suit la loi hypergéométrique de paramètres N,n,p notée $\mathcal{H}(N,n,p)$ si la variable aléatoire X prend la valeur k avec la probabilité égale à : $\frac{\binom{Np}{k}\binom{N-Np}{n-k}}{\binom{N}{n}}$

Remarques :

- La loi hypergéométrique modélise toutes les situations qui s'apparentent à un tirage sans remise.
- La loi hypergéométrique prend la valeur comprise entre $\max(0, n-N+Np)$ et $\min(Np, n)$.

Propriétés :

$$\mathbb{E}(X) = np$$
$$Var(X) = npq\frac{N-n}{N-1} = np(1-p)\frac{N-n}{N-1}$$

d- Loi binomiale de paramètres n et p :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n,p notée $\mathcal{B}(n,p)$ si la variable aléatoire X prend la valeur k avec la probabilité qui est égale à $\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.
Propriétés :

$$\mathbb{E}(X) = np$$
$$Var(X) = npq = np(1-p)$$

Remarque : L'espérance d'une variable aléatoire qui suit une loi binomiale et celle qui suit une loi hypergéométrique sont égale.

6. Lois discrètes usuelles infinies

a- Loi géométrique de paramètre p :

Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit une loi géométrique notée $\mathcal{G}(p)$ si la variable aléatoire X prend la valeur $k \geq 1$ avec la probabilité qui est égale à $(1-p)^{k-1}p$.

Remarques :

- Cette loi sert généralement lorsque nous nous intéressons au temps d'attente au premier succès, i.e. en nombre d'essai nécessaire pour obtenir un succès lors d'une succession d'expérience aléatoire indépendante n'ayant que 2 issues possibles, le succès avec une probabilité p et l'échec avec une probabilité (1-p).
- La loi géométrique est parfois utilisée pour modéliser des durées de vie par exemple.
- La loi géométrique est la version discrète d'une loi absolument continue appelée loi exponentielle.

Propriétés :

$$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{p}$$
$$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

b- **Loi de Poisson de paramètre $\boldsymbol{\lambda}$:**

Soit $\lambda > 0$. Une variable aléatoire X suit une loi de Poisson de paramètre λ notée $\mathcal{P}(\lambda)$ si la variable aléatoire X prend la valeur $k \in \mathbb{N}$ avec la probabilité égale à $e^{-\lambda}.\frac{\lambda^k}{k!}$.

Propriétés :

$$\mathbb{E}(X) = \lambda$$
$$Var(X) = \lambda$$

Remarques :

- La loi de Poisson est utilisée pour décrire plusieurs types de phénomènes comme le nombre d'appel reçu par un standard téléphonique pendant une période donnée.
- La loi de Poisson est encore utilisée lorsque nous étudions le nombre d'apparition des phénomènes rares.
- Si $X \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1)$ et $Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_2)$ et si X et Y sont indépendantes, alors $X + Y \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$.
  Plus généralement, si $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont n-variables aléatoires indépendantes et $\forall k \in \{1,2, \dots, n\}$, $X_k \rightsquigarrow \mathcal{P}(\lambda_k)$, alors la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n} X_k \rightsquigarrow \mathcal{P}(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k)$

TRAVAUX DIRIGES

Exercice1 : Calculer les fonctions génératrices des lois usuelles : Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson. En déduire leur moyenne et leur variance

Exercice2 : On jette 5 dés. Après le premier lancer, on reprend et on lance les dés qui n'ont pas donné de six, jusqu'à ce qu'on obtienne 5 six.

Soit X le nombre de lancers nécessaires.

1- Calculer $\mathbb{P}(X \leq k)$ pour $k \in \mathbb{N}$
2- Soit Y une variable à valeurs dans ℕ. Montrer que $\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y \geq k)$
3- Combien de lancers sont nécessaires en moyenne pour obtenir les 5 six ?

Exercice3 : Une urne contient N boules numérotées de 1 à N. On tire n boules une à une avec remise. Soit X et Y le plus petit et le plus grand des nombres attendus.

1- Calculer $\mathbb{P}(X \geq x)$ pour tout $x \in \{1,2, \dots, N\}$. En déduire la loi de X.
2- Donner la loi de Y.
3- Calculer $\mathbb{P}(X \geq x, Y \leq y)$ pour tout $(x, y) \in \{1,2, \dots, N\}^2$. En déduire la loi du couple (X, Y)

Exercice4 : Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ une suite indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.

1- Calculer la loi de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ conditionnellement à S_n.
2- Calculer la loi de X_i conditionnellement à S_n $(pour\ n \geq i)$.
3- Les variables X_1et X_2 sont-elles indépendantes conditionnellement à S_n $(pour\ n \geq 2)$?

Exercice5 : Soit X_1et X_2 des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\theta_1 > 0$ et $\theta_2 > 0$.

1- Calculer la loi de $X_1 + X_2$.
2- Calculer la loi de X_1 sachant $X_1 + X_2$.
3- Calculer $\mathbb{E}[X_1 | X_1 + X_2]$.

Exercice6 : Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$.

1- Vérifier que f est une densité de probabilité
2- Soit X une variable aléatoire continue dont la loi a pour densité f. Montrer que $Y = X^2$ est une variable aléatoire continue, dont on précisera la densité. Quelle est la loi de Y ?
3- Calculer l'espérance et la variance de Y.

Exercice7 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi respectives $\Gamma(\lambda, a)$ et $\Gamma(\lambda, b)$ avec a,b,$\lambda \in]0, +\infty[$.

Calculer la loi du couple $\left(X + Y, \frac{X}{X+Y}\right)$ sont indépendantes et identifier leur loi.

Exercice8 : Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy.

1- Déterminer la loi de $\frac{1}{X}$.
2- Montrer que si Y et Z sont deux variables aléatoires gaussiennes centrées réduites indépendantes, alors $\frac{Y}{Z}$ suit une loi de Cauchy.
3- Retrouver ainsi le résultat de la question 1.

CHAPITRE III : VARIABLES ALEATOIRES CONTINUES

1. Définitions

Définition 1.1 : Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Nous disons que la variable aléatoire X est continue s'il existe une fonction f_X définie sur $\mathbb{R}$ tel que :

i) $f_X(t) \geq 0, \forall t \in \mathbb{R}$

ii) L'ensemble des points de discontinuité de f_X est fini et ces discontinuités sont de premières espèces (i.e. la limite à gauche et à droite en chaque point existe)

iii) Pour tout x réel , la fonction de répartition F_X de la variable X est donnée par

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

La fonction f_X est une densité de probabilité de X.

Remarque 1.2 : Il faut en particulier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt}$ soit convergente et que $\int_{-\infty}^{x} f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt} = 1$

Propriétés :

Soit X une variable aléatoire réelle admettant une densité de probabilité f_X.

1- Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X = a) = 0$

2- Pour tout (a, b), $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$, nous avons

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X < b) = \int_{a}^{b} f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

Proposition 1.3 : La fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire réelle X de densité f_X est continue, croissante. Elle est dérivable en tout point x :

On a la relation : $\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$ dès que $b \geq a$.

Définition 1.4 : L'espérance d'une variable aléatoire X est définie par : $\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(\mathrm{x})\mathrm{dx}$ quand cette intégrale a de sens. De plus, la variance de X est $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}^2(X)$

Proposition 1.5 :

i) L'espérance d'une fonction $Y = \varphi(X)$ est donnée par

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) f_X(\mathrm{x})\mathrm{dx}$$

ii) Pour tous réels a et b ;

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$
$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

iii) Si X et Y sont deux variables aléatoires continues,

$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Si de plus elles sont indépendantes

$$Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y)$$

Preuve : TD

Mini-exercice : Soit X une variable aléatoire de densité f définie par $f(x) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[0,2]}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \ si \ x \in [0,2] \\ 0 \ sinon \end{cases}$

($\mathbb{1}_{[0,2]}$ *est la fonction indicatrice définie par* $\mathbb{1}_{[0,2]}(x) = \begin{cases} 1 \ si \ x \in [0,2] \\ 0 \ sinon \end{cases}$*)*

Il s'agit bien d'une densité ($f(x) \geq 0 \ et \ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{dx} = 1$

1- *Calculer* $\mathbb{P}\left(\frac{1}{3} \leq X \leq \frac{2}{3}\right)$

2- *Calculer* $\mathbb{E}(X)$ *et Var(X)*

Moments simple et moment d'ordre r :

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Sous réserve d'existence, nous appelons moment simple d'ordre r de la variable aléatoire X la valeur :

$$\mu_r(X) = \mathbb{E}(X^r) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^r f_X(\mathrm{t})\mathrm{dt}$$

et nous appelons moment centré d'ordre r de X le réel :

$$\mu_{m_r}(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^r]$$

Nous disons que X admet une variance lorsque X admet un moment centré d'ordre 2.

Alors, $Var(X) = \mathbb{E}[(X-\mu)^2] = \mu_{m_2}(X)$.

2. Loi uniforme

Définition 2.1 : Une variable aléatoire X suit une loi uniforme sur [a, b], si elle admet pour densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} \ si\ a < x < b \\ 0\ sinon \end{cases}$$

La fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f_x(t)dt = \begin{cases} 0\ si\ x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} \ si\ a \leq x \leq b \\ 1\ si\ x > b \end{cases}$$

L'espérance de X est $\mathbb{E}(X) = \frac{b-a}{2}$ et la variance de X est $Var(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Mini-exercice : Soit X une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur [0, 10]. Calculer $\mathbb{P}(X < 3)$, $\mathbb{P}(X > 6)$ et $\mathbb{P}(3 < X < 8)$.

3. Loi normale

3.1. Loi normale centrée réduite :

C'est la loi la plus importante. Son rôle est central en de nombreux modèles probabilistes et dans toute la statistique.

Elle possède des propriétés intéressantes qui le rendre agréable à utiliser.

Définition 3.1.1 : Une variable aléatoire X suit la loi normale (ou gaussienne ou loi de Laplace) $\mathcal{N}(0,1)$ si sa densité est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, pour\ tout\ x\ \in \mathbb{R}$$

Si X suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors pour tous $a < b$,

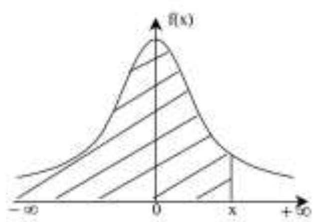
$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(b) - \Phi(a)$$

où Φ est la fonction de répartition de X.

Rappelons que Φ est une primitive de la densité f. Mais, il n'existe plus d'une forme analytique de la primitive de f. On lit donc les valeurs de Φ dans une table, on peut les calculer par un logiciel adapté (Excel, Matlab, R).

La courbe de la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ porte le nom de « courbe en cloche ». Elle tend vers 0 à l'infini, croissante sur $\mathbb{R}^-$, puis décroissante sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet donc un maximum en 0.

On peut voir aussi qu'elle est symétrique de centre de symétrie 0.



Proposition 3.1.2 : La variable aléatoire X est centrée c'est-à-dire de moyenne nulle et réduite c'est-à-dire de variance 1. De plus, -X suit encore une loi normale centrée réduite.

Preuve : TD

(Indication : Le calcul de l'espérance est immédiat quand on observe que xf(x) est une fonction impaire. Le calcul de la variance se fait par intégration par parties)

Utilisation de la table :

Pour calculer $\mathbb{P}(a \leq X \leq b)$ ou $\mathbb{P}(X \leq x)$, on peut faire le calcul numérique sur ordinateur ou sur la table qui donne $\mathbb{P}(X \leq x)$ pour tout décimal positif x à deux chiffres après la virgule.

Puis, il faut remarquer que

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) = \mathbb{P}(X \leq b) - \mathbb{P}(X \geq a)$$

Puis on lit les probabilités dans une table si a et b sont positifs.

Pour trouver $\mathbb{P}(X \leq -x)$ quand $x > 0$, on utilise le fait que X et −X ont même loi

$$\mathbb{P}(X \leq -x) = \mathbb{P}(-X \geq x) = \mathbb{P}(X \geq x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq x)$$

Mini-exercice : Calculer $\mathbb{P}(-1 \leq X \leq 1)$

Calculer $a \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathbb{P}(-a \leq X \leq a) = 0{,}90$

3.2. Loi normale (cas général) :

Proposition 3.2.1 :

Soient $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$. Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma)$ si f est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}, pour\ tout\ x\ \in \mathbb{R}$$

Proposition 3.2.2 :

$Z = \frac{X-m}{\sigma}$ suit une loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

Preuve : TD

Proposition 3.2.3 :

$$\mathbb{E}(X) = m$$
$$Var(X) = \sigma^2$$

Preuve : TD

.

.

.

4. Loi exponentielle

5. Fonction d'une variable aléatoire

TRAVAUX DIRIGES

Exercice1 : Soient X_1et X_2 deux variables indépendantes de loi $\mathcal{N}(0,1)$.

1- Montrer que X_1^2 suit la loi de $\mathcal{X}^2(1)$
2- Montrer que $X_1^2 + X_2^2$ suit la loi $\mathcal{X}^2(2)$

Exercice2 : Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre λ_n.

Etudier la convergence en loi dans les cas suivants :

1- $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = \lambda \in]0,+\infty[$
2- $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = +\infty$
3- $\lim\limits_{n\to+\infty} \lambda_n = 0$

Exercice3 : Soit $(X_n, n \in \mathbb{N}^*)$ une suite de variables aléatoires réelles de mêmes loi, indépendantes de carrée intégrable.

On pose : $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = Var(X_1)$ et $Z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (X_k - \mu)$

1- Rappeler la convergence en loi de la suite $(Z_n, n \in \mathbb{N}^*)$
2- Etablir la convergence de la suite $(Z_{2n} - Z_n, n \in \mathbb{N}^*)$ et donner sa limite
3- En déduire que la suite $(Z_n, n \in \mathbb{N}^*)$ ne converge pas en probabilité si $\sigma^2 > 0$

CHAPITRE IV : THEOREMES LIMITES

Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$, des variables aléatoires indépendantes et de même loi. Supposons que ces variables aléatoires ont une espérance, notée m et une variance notée σ^2.

1. Loi des grands nombres

Théorème 1.1 :

$$\mathbb{E}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \cdots + \mathbb{E}(X_n) = n.m$$
$$Var(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = Var(X_1) + Var(X_2) + \cdots + Var(X_n) = n.\sigma^2$$

Théorème 1.2 (Inégalité de Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire et $x \in \mathbb{R}_+$. Alors $\mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| > x] \leq \frac{Var(X)}{x^2}$

Preuve :

On a $|X - \mathbb{E}(X)|^2$ est positif,

$$|X - \mathbb{E}(X)|^2 \geq |X - \mathbb{E}(X)|^2 \mathbb{1}_{\{|X-\mathbb{E}(X)|>x\}}$$

Puis, on prend l'espérance

$$Var(X) = \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|^2] \geq \mathbb{E}\left[|X - \mathbb{E}(X)|^2 \mathbb{1}_{\{|X-\mathbb{E}(X)|>x\}}\right]$$
$$\mathbb{E}[|X - \mathbb{E}(X)|^2] \geq x^2 \mathbb{P}[|X - \mathbb{E}(X)| > x]$$

Définition 1.3 :

La moyenne empirique des variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ est la variable aléatoire $\overline{X_n} = \frac{X_1+X_2+\cdots+X_n}{n}$.

De plus, $\mathbb{E}(\overline{X_n}) = m$ et $Var(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$.

Ainsi, si plus n est grand, moins cette variable aléatoire varie.

A la limite, quand n tend vers l'infini, elle se concentre sur son espérance m. C'est la loi des grands nombres.

Théorème 1.4 (Lois des grands nombres)

Quand n est grand, $\overline{X_n}$ est proche de m avec une forte probabilité.

Autrement dit, pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\overline{X_n} - m| > \varepsilon) = 0$.

Preuve : TD (Indication : Inégalité de Tchebychev)

2. Théorème Central Limite

Théorème 2.1 :

Pour tous réels $a < b$, quand n tend vers l'infini, alors

$$\mathbb{P}\left(a \leq \frac{\overline{X_n} - m}{\sigma/\sqrt{n}} \leq b\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

On dit que : $\frac{\overline{X_n}-m}{\sigma/\sqrt{n}}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0,1)$

Corollaire 2.2 :

Quand n est grand, la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ est proche de la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.

Preuve : TD (Indication : Prendre n variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ indépendantes et de même lois $\mathcal{B}(p)$, et poser $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et puis démontrer S_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$.)

Cette approximation est importante car les probabilités relatives à la loi binomiale sont difficiles à calculer quand n est grand.

Pour améliorer l'approximation, on effectue une correction de continuité qui permet de lier la loi discrète et la loi continue.

Ainsi, en pratique, si X est une variable aléatoire de loi $\mathcal{B}(n,p)$, avec $n \geq 30, np \geq 5\ et\ n(1-p) \geq 5$, on peut approcher la loi de X par la loi normale $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$ de cette manière :

- Pour $0 \leq k \leq n, \mathbb{P}(X \leq k) \approx \ \mathbb{P}(Y \leq k + 0.5)$ où Y suit la loi $\mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)})$.
- Pour tout $a < b$,

$$\mathbb{P}(a \leq X \leq b) =$$

.

.

.

.

Exemple :

On interroge 30 personnes au hasard pour étudier un certain caractère présent dans la population en proportion p=0.6.

Soit X le nombre de personne qui ont ce caractère parmi les 25. Alors X suit la loi $\mathcal{B}$(30,0.6).

Calculer $\mathbb{P}(X \leq 15)$.

Inégalité de Markov

Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Loi faible des grands nombres

Convergence en probabilité

Théorème Central Limite

Convergence en loi

CHAPITRE V : VECTEURS ALEATOIRES ET VECTEURS GAUSSIENS

1. Vecteurs aléatoires

Définition 1.1 :

Un vecteur aléatoire X est une application de $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ dans un espace vectoriel réel, en général $\mathbb{R}^p$ muni de la tribu borélienne. En particulier, $\mathbb{R}^p$ est muni de la base canonique et nous identifions X au p-uplets des variables aléatoires formées par ses composantes sur cette base $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$.

Définition 1.2 :

La fonction de répartition F est une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ définie par

$$F(x_1, x_2, \dots, x_p) = \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_p \leq x_p)$$

Définition 1.3 :

La densité si elle existe est définie, en tout point $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, par l'égalité :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{\partial^p F}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_p}(x_1, x_2, \dots, x_p)$$

Théorème de Cramer-Wald

La loi du vecteur aléatoire X est entièrement déterminée par celles de toutes les combinaisons linéaires de ses composantes.

Définition 1.4 :

Soit $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ un vecteur aléatoire tel que chacun de ses composantes X_i admette une espérance. L'espérance de $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ est le vecteur $\mathbb{E}(X) = \mu = (\mathbb{E}(X_1), \mathbb{E}(X_2), \dots, \mathbb{E}(X_p))$

Définition 1.5 :

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ un vecteur aléatoire tel que chacun couples (X_i, X_j) admette une covariance. Nous appelons matrice de variance-covariance de X la matrice :

$$Var(X) = \Sigma = \begin{pmatrix} Var(X_1) & \cdots & Cov(X_1, X_p) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Cov(X_p, X_1) & \cdots & Var(X_p) \end{pmatrix}$$

Remarque :

a- Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^p$, $\mathbb{E}(AX + B) = A\mathbb{E}(X) + B$

b- Σ est une matrice carrée symétrique réelle d'ordre p

c- Si $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^p$, $Var(AX + B) = AVar(X)A^t$

d- $\Sigma = \mathbb{E}[(X^t)X] - (\mu^t)\mu$

e- Si les variables X sont réduites, Σ s'identifie avec la matrice de corrélation linéaire

$$\begin{pmatrix} 1 & R(X_1, X_2) & \cdot & \cdot & R(X_1, X_2 \\ & 1 & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & \cdot & \cdot \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

2. Vecteurs aléatoires gaussiens

Définition 2.1 :

X est un vecteur gaussien à p dimensions si toute combinaison linéaire de ses composantes suit une loi normale à une dimension.

Définition 2.2 :

Les composantes d'un vecteur gaussien X sont indépendantes si et seulement si Σ est diagonale c'est-à-dire si les composantes sont non corrélées.

Notons par $\mathcal{N}_p(\mu, \Sigma)$ la loi normale à $p \geq 2$ dimensions d'espérance μ et de matrice variance-covariance Σ.

Théorème 2.3 :

Si la matrice Σ est inversible, alors le vecteur aléatoire X admet pour densité :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{p}{2}}(dét\Sigma)^{\frac{p}{2}}} exp\left[-\frac{1}{2}[(x-\mu)^t](x-\mu)\right]$$