Chapter 1

LA DIFFÉRENTIELLE

1 Définition et premières propriétés

1.1 Définition

1.1 Définition. Soit f une application définie d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, dérivable en $x_0 \in U$ s'il existe $y \in \mathbb{R}$ tel que

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}(f(x_0 + x) - f(x_0)) = y$$

Si y existe, il est unique et appelé dérivée de f en x_0, noté $y = f'(x_0)$.

1.2 Définition. Soient $(F, \|\|_F)$ un espace vectoriel normé et f une application définie d'un ouvert $U \subset \mathbb{R}$ dans F. On dit que f est dérivable en $x_0 \in U$ s'il existe $y \in F$ tel que

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{1}{x}(f(x_0+x) - f(x_0)) = y \quad \text{ou encore} \quad \lim_{\substack{x \to 0 \\ \neq}} \frac{\|f(x_0 + x) - f(x_0) - x \cdot y\|_F}{|x|} = 0$$

Cette limite lorsqu'elle existe, elle est la dérivée de f en x_0, notéée $f'(x_o) \in F$.

1.3 Définition. Soient E, F deux espaces vectoriels normés sur E, $L(E, F)$ l'espace des applications $\mathbb{R}$-linéaires continues de E dans F muni de la norme classique $\|f\|_{L(E,F)} = \sup_{\|h\|_E \leq 1} \|f(h)\|_F$. Soient U un ouvert de E, f une application de U dans F, $a \in U$. On dit que f est différentiable en a s'il existe $L_a \in L(E, F)$ tel que, quel que soit $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour $\|h\|_E < \alpha$, $\|f(a + h) - f(a) - L_a(h)\|_F \leq \varepsilon \|h\|_E$.

1.4 Remarque. On rencontre quelques écritures strictement équivalentes :
(1) $f(a + h) = f(a) + L_a(h) + \|h\|_E \varepsilon(h)$, où $\varepsilon(h) \in F$ tend vers 0 avec h.
(2) $f(a + h) = f(a) + L_a(h) + o(h)$.
Il est à noter que la notation de Landau $o(h)$ représente un ensemble de fonctions. Au fait, on devrait écrire $h \mapsto f(a + h) - f(a) + L_a(h) \in o(h)$, où $o(h)$ ·

est l'ensemble des fonctions g de norme $||g||_{L(E,F)} \leq \varepsilon ||h||_E$. Ces écritures montrent l'idée de la notion de la différentielle comme approximation de f par une application affine au voisinage d'un point a .

1.5 Proposition. *Si f est une fonction différentiable en a, l'application L_a définie ci-dessus est unique.*

Proof. Supposons qu'il existe $L_1, L_2 \in L(E,F)$ deux applications vérifiant, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $||h||_E < \eta$ entraîne

$$||f(a+h) - f(a) - L_1(h)||_F \leq \varepsilon ||h||_E \quad \text{et} \quad ||f(a+h) - f(a) - L_2(h)||_F \leq \varepsilon ||h||_E.$$

Soit $L = L_1 - L_2$, alors, $L \in L(E,F)$ et pour $||h||_E < \eta$, on a $||L(h)||_F < 2\varepsilon$ d'après les formules précédentes et l'inégalité triangulaire. Soit h fixé non nul. Il existe $\alpha > 0$ tel que $||\alpha h||_E < \eta$, et donc $||L(\alpha h)||_F \leq \varepsilon ||\alpha h||_E$, ce qui entraîne $|\alpha| ||L(h)||_F \leq \varepsilon |\alpha| ||h||_E$ puis $||L(h)||_F \leq \varepsilon ||h||_E$. Cette inégalité est vraie quel que soit $\varepsilon > 0$, d'où $L(h) = 0$. Ceci étant vrai pour h quelconque, on conclut que L est identiquement nulle, d'où $L_1 = L_2$. □

Notation: L'application linéaire L_a est notée $f'(a)$, $Df(a)$ ou $d_a f$.

Dans le cas particulier où l'espace de départ est $\mathbb{R}$, on a défini deux notions : différentiabilité et dérivabilité.

U ouvert de E

E = IR

1.6 Proposition. *Soient E, F un espace vectoriel normé, $f : E \to F$ une application et $x_0 \in U$. Alors, f dérivable en x_0 est équivalent à f différentiable en x_0 et, pour tout $x \in U$, $d_{x_0} f(x) = x \cdot f'(x_0)$. En particulier, $f'(x_0) = d_{x_0} f(1)$.*

Proof. Par définition de la différentiabilité en x_o, on a $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $||x||_{\mathbb{R}} = |x| < \eta$ entraîne $||f(x_o + x) - f(x_0) - d_{x_0} f(x)||_F \leq \varepsilon |x|$. Mais alors, dans $\mathbb{R}$, on a $x = x \cdot 1$, donc $||f(x_o + x) - f(x_0) - d_{x_0} f(1) x||_F \leq \varepsilon |x|$. Alors, $\lim_{x \to 0} ||\frac{f(x_o+x) - f(x_0)}{x} - d_{x_0} f(1)||_F = 0$, d'où $d_{x_0} f(1) = f'(x_0)$. □

Il est à noter que la dérivée de f en x_0 et la différentielle de f en x_0 sont de natures différentes car $f'(xo) \in F$ et $d_{x_0} f \in L(\mathbb{R}, F)$, mais il existe un isomorphisme canonique entre $L(\mathbb{R}, F)$ et F.

1.2 Premières propriétés

1.7 Proposition. *Soient E, F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $a \in U$, f une application de U dans F différentiable en a. Alors, f est continue en a.*

Proof. Soit $\varepsilon > 0$. Si f est différentiable en a, il existe $\eta > 0$ tel que, pour $||h||_E < \eta$, $||f(a+h) - f(a) - d_a f(h)||_F \leq \varepsilon ||h||_E$. L'application $d_a f$ étant linéaire continue, alors en faisant tendre $||h||_E$ vers 0, on trouve $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$, d'où f est continue en a. □

1.8 Proposition. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E, f une application de U dans F différentiable en un point $a \in U$. Alors, f est toujours différentiable en a si l'on remplace les normes sur E et F par des normes équivalentes, et sa différentielle est inchangée. En particulier, si E et F sont de dimension finie, la différentiabilité ne dépend pas des normes car elles sont toutes équivalentes.*

Proof. On ne change pas la topologie d'un espace vectoriel normé en remplaçant une norme par une norme équivalente, donc on ne change pas les notions de continuité et de limite. □

1.3 Application différentielle

1.9 Définition. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, U un ouvert de E et $f : U \to F$ une application. Si f est continue en tout point de l'ouvert U, on dit que f est de classe C^0 et on note $d^0 f = f$.

1.10 Définition. Soient E, F deux espaces vectoriels normés (E éventuellement égal à $\mathbb{R}$), U un ouvert de E, $f : U \to F$ une application. On dit que f est différentiable dans U (respectivement dérivable dans U) si f est différentiable (respectivement dérivable) en tout point de U. Dans ce cas, on appelle application différentielle (respectivement dérivée) de f la fonction df définie sur U à valeurs dans $L(E, F)$ (respectivement F) qui à $a \in U$ associe $d_a f$ (respectivement à $x \in U$ associe $f'(x)$). On note $d^1 f = df$.

1.11 Définition. Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert, $f : U \to F$ une application. On dit que f est continûment différentiable ou de classe C^1 sur U si f est différentiable en tout point de U et si $df : U \to L(E, F)$ est continue.

2 Quelques exemples et théorèrmes classiques

Dans cette section, E, F sont des espaces vectoriels normés, U un ouvert de E.

2.1 Exemples

2.1 Proposition. *(***Applications constantes***). Soit $f : U \subset E \to F$ une application constante (i.e. il existe $b \in F$ tel que, $\forall x \in U$, $f(x) = b$). Alors f est différentiable en tout point de U et, pour tout $a \in U$, $d_a f = 0 \in L(E, F)$.*

Proof. On a $f(a + h) = f(a) + 0$. □

Soit

2.2 Proposition. *(***Applications linéaires***). ~~Soient~~ $f \in L(E, F)$. Alors f est différentiable en tout point de E et, pour tout $a \in E$, $d_a f = f$.*

Proof. D'abord d'~~parès~~ après la propriété 1.7, si f est une application linéaire non continue, alors elle n'est pas différentiable. De plus, dans ce cas très particulier, $d_a f$ ne dépend pas de a. La preuve de la proposition est donc immédiate, on a $f(a + h) - f(a) - f(h) = 0$. □

2.3 Proposition. (**Applications multilinéaires**). *Soit $f \in L(E_1 \times \cdots \times E_k, F)$ où $E_1, \cdots, E_k, F$ sont des espaces vectoriels normés. Alors, f est différentiable sur $E_1 \times \cdots \times E_k$ et, quel que soit $(a_1, \ldots, a_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$, quel que soit $(h_1, \ldots, h_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$, on a*

$$d_{(a_1,\ldots,a_k)}f(h_1,\ldots,h_k) = f(h_1,a_2,\ldots,a_k)+f(a_1,h_2,\ldots,a_k)+\cdots+f(a_1,\ldots,h_k).$$

En particulier, pour $k=2$, on a $d_{(a_1,a_2)}f(h_1,h_2) = f(h_1,a_2)+f(a_1,h_2)$.

Proof. Il suffit de montrer la proposition pour $k=2$, et le principe est identique pour $k>2$. Soit $E = E_1 \times E_2$, $h = (h_1,h_2) \in E$. Soit $f \in L(E,F)$. Alors,

$$f(a_1+h_1,a_2+h_2) = f(a_1,a_2)+f(a_1,h_2)+f(h_1,a_2)+f(h_1,h_2).$$

L'application $(h_1,h_2) \mapsto f(a_1,h_2)+f(h_1,a_2)$ est bien dans $L(E_1 \times E_2, F)$ et $||f(h_1,h_2)||_F \leq ||f||_{L(E,F)}||h_1||_{E_1}||h_2||_{E_2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Sans nuire à la généralité, on prend comme norme $||h||_E = \max(||h_1||_{E_1}, ||h_2||_{E_2})$. Alors, pour $\eta = \sqrt{\frac{\varepsilon}{||f||_{L(E,F)}}}$, on a $||h||_E < \eta$ entraîne $||f(h_1,h_2)||_F \leq \varepsilon||h||_E$, d'où le résultat. □

Remarque: Lorsque l'espace de départ est de dimension finie, toute application linéaire ou multilinéaire est continue et donc différentiable.

2.2 Opérations sur les fonctions différentiables

2.4 Proposition. *Soient U et V deux ouverts de E contenant a, f et g deux applications définies respectivement sur U et V, à valeurs dans F. Si f et g sont différentiables en a, alors $f+g$ est différentiable en a et $d_a(f+g) = d_af + d_ag$. De même, si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors αf est différentiable en a et $d_a(\alpha f) = \alpha\, d_af$.*

Proof. La preuve est immédiate. □

2.5 Proposition. *Soient E, F, G trois espaces vectoriels normés, O, U des ouverts de E et F respectivement, f une application de O dans F, g une application de U dans G et, $a \in O$ tel que $f(a) \in U$. Si f est différentiable en a et g différentiable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est différentiable en a et $d_a(g \circ f) = d_{f(a)}g \circ d_af$.*

Proof. Soit $\varepsilon > 0$ fixé. Par hypothèse, il existe $\alpha, \eta > 0$ tels que, pour $||h||_E < \alpha$, $||k||_F < \eta$, les fonctions $\varepsilon_f(h) = f(a+h) - f(a) - d_af(h)$ et $\varepsilon_g(k) = g(f(a)+k) - g(k) - d_{f(a)}g(k)$ vérifient $||\varepsilon_f(h)||_F \leq \varepsilon||h||_E$ et $||\varepsilon_g(k)||_G \leq \varepsilon||k||_F$. On a $g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = g(f(a) + d_af(h) + \varepsilon_f(h)) - g \circ f(a)$. En posant $k = d_af(h)+\varepsilon_f(h)$, on obtient $g \circ f(a+h) - g \circ f(a) = g(f(a)) + d_{f(a)}g(k) + \varepsilon_g(k) - g(f(a)) = d_{f(a)}g(d_af(h)) + d_{f(a)}g(\varepsilon_f(h)) + \varepsilon_g(k)$. En évaluant cette expression, on a $||d_{f(a)}g(\varepsilon_f(h))||_G \leq ||d_{f(a)}g||_{L(E,F)}||\varepsilon_f(h)||_F$, d'où pour $||h||_E < \alpha$, $||d_{f(a)}g(\varepsilon_f(h))||_G \leq \varepsilon||d_{f(a)}g||_{L(F,G)}||\varepsilon_f(h)||_F \leq C\varepsilon||h||_E$. Par ailleurs, on peut choisir $\beta < \alpha$ tel que $||h|||_E < \beta$ entraîne $||k||_F = ||d_af(h) + \varepsilon_f(h)||_F \leq ||d_af(h)||_{L(E,F)}||h||_E + \varepsilon||h||_E < \eta$. Pour ce choix de β, on a $||\varepsilon_g(k)||_G \leq \varepsilon||k||_F \leq \varepsilon(||d_af||_{L(E,F)}) + \varepsilon)||h||_E \leq C'\varepsilon||h||_E$. Il suit que, pour $||h||_E < \beta$, $g \circ f(a+h) - g \circ f(a) - d_{f(a)}g \circ d_af||_G \leq \varepsilon||h||_E$. □

Dans le cas particulier où $E = F = \mathbb{R}$, la proposition précédent donne

$$(g\circ f)'(x_0) = d_{x_0}(g\circ f)(1) = d_{f(x_0)}g(d_{x_0}f(1)) = d_{f(x_0)}g(f'(x_0)) = f'(x_0)d_{f(x_0)}g(1)$$

D'où, $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0)g'(f(x_0))$.

2.6 Proposition. *Soient $E, F_1, \cdots, F_k$ des espaces vectoriels normées et $f : U \subset E \to F = F_1 \times \cdots \times F_k$, $f = (f_1, \ldots, f_k)$ où les $f_i : U \subset E \to F_i$ sont les composantes de f. Alors, f est différentiable en $a \in U$ si et seulement si, pour tout $1 \leq i \leq k$, f_i est différentiable en a. Dans ce cas on a, pour tout $h \in E$,*

$$d_af(h) = (d_af_1(h), d_af_2(h), \ldots, d_af_k(h)).$$

Proof. Pour tout $1 \leq i \leq k$, on considère la projection $p_i : F \to F_i$ et l'injection $u_i : F_i \to F$ définie par $u_i(x_i) = (0, ..., 0, x_i, 0, \ldots, 0)$. Les applications u_i et p_i sont linéaires et continues, donc différentiables. De plus, elles vérifient $p_i \circ u_i = Id_{F_i}$ et $\sum_{i=1}^k u_i \circ p_i = Id_F$. Si f est différentiable, alors $p_i \circ f = f_i$ est différentiable et vérifie $\forall h \in E$ $d_af_i(h) = p_i \circ d_af(h)$.
Réciproquement, si pour tout i, $1 \leq i \leq k$, f_i est différentiable au point a, on a $\sum_{i=1}^k u_i \circ p_i \circ f = f$, donc $f = \sum_{i=1}^k u_i \circ f_i$. D'où, f est différentiable au point a et $\forall h \in E$, $d_af(h) = \sum_{i=1}^k u_i \circ d_af_i(h)$. □

3 Différentielles et dérivées partielles

Notations Soient $(E_1, ||\cdot||_1), \ldots, (E_k, ||\cdot||_k), (F, ||\cdot||_F)$ des espaces vectoriels normés, U un ouvert de $E_1 \times \cdots \times E_k$ et f une application de U dans F. Soit $a = (a_1, \ldots, a_k) \in U$. On considère, pour $1 \leq i \leq k$, on considère l'application h_{i_a} définie par $h_{i_a} : E_i \to E_1 \times \cdots \times E_k$, $x \mapsto (a_1, \ldots, x, \ldots, a_k)$. Elle est différentiable sur E_i car chacune de ses composantes est une application constante, sauf la i-ième qui est l'application identité de E_i dans lui-même. De plus, pour tout $x, x' \in U$, on a $d_{x'}h_{i_a}(x) = (0, \ldots, 0, x, 0, \ldots, 0)$.
On appelle *application partielle* d'indice i de f au point a l'application notée $f_{i_a} = f \circ h_{i_a}$ définie de l'ouvert $h_{i_a}^{-1}(U) \subset U$ dans F.

3.1 Définition. On dit que f admet une différentielle partielle par rapport au i-ième espace (on dit aussi par rapport à la i-ième variable) au point a si l'application partielle f_{i_a} est différentiable au point $a_i \in h_{i_a}^{-1}(U)$. Cette différentiielle, si elle existe, est appelée *la différentielle partielle* de f par rapport au i-ième espace au point a et on note $d_{i_a}f$.
Si au moins l'un des $E_i = \mathbb{R}$, on définit la dérivée partielle comme étant la dérivée $f'_{i_a}(a_i)$ de f_{i_a}. Dans ce cas, on note $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = (f_{i_a})'(a_i)$, donc $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = d_{i_a}f(1)$.

On note d_if l'application définie par $E_i \to F$, $a_i \mapsto d_{i_a}f$. Il est à noter que cette application n'est pas une différentielle en un point, donc elle n'est pas nécessairement continue.

3.2 Proposition. *Soient $f : U \subset E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ et $a \in U$. Si f est différentiable en $a \in U$, alors, pour tout $1 \leq i \leq k$, les différentielles partielles par rapport à la i-ième variable de f au point a existent et, quel que soit $(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$,*

$$d_a f(x_1, \ldots, x_k) = d_{1_a} f(x_1) + \cdots + d_{k_a} f(x_k)$$

Dans le cas particulier où $E_1 \times \cdots \times E_k = \mathbb{R}^k$, on a

$$d_a f(x_1, \ldots, x_k) = x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} f(a) + \cdots + x_k \frac{\partial f}{\partial x_k} f(a)$$

Proof. Soit $a = (a_1, \ldots, a_k)$. Par définition, pour $1 \leq i \leq k$, on a $d_{i_a} f = d_{a_i}(f \circ h_{i_a}) = d_{h_{i_a}(a_i)} f \circ d_{a_i} h_{i_a}$. Alors, quel que soit $(x_1, \ldots, x_k) \in E_1 \times \cdots \times E_k$, $d_{i_a} f(x_i) = d_a f(0, \ldots, x_i, \ldots, 0)$. Donc, $d_{1_a} f(x_1) + \cdots + d_{k_a} f(x_k) = d_a f((x_1, 0, \ldots, 0) + \cdots + (0, x_2, 0, \ldots, 0) + (0, \ldots, 0, x_k)) = d_a f(x_1, \ldots, x_k)$. Dans le cas où $E_1 \times \cdots E_k = \mathbb{R}^k$, on a

$$d_{i_a} f(x_i) = d_{i_a} f(x_i \times 1) = x_i d_{i_a} f(1) = x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a).$$

□

4 Matrice Jacobienne

Dans le cas particulier où $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, sa différentielle en un point peut s'exprimer sous forme matricielle.

4.1 Théorème. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ et $a = (a_1, \ldots, a_n) \in U$, $f = (f_1, \ldots, f_m)$. Si f est différentiable en a, alors la matrice de $d_a f \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ relative aux bases canoniques est appelée la* matrice Jacobienne *de f au point a définie par*

$$Jf_a = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{x_1}(a) & \frac{\partial f_1}{x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{x_n}(a) \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{x_1}(a) & \frac{\partial f_m}{x_2}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Proof. Pour tout $1 \leq i \leq m$, $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$d_a f_i(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f_i}{\partial x_1} x_1 + \cdots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n} x_n.$$

Donc, la matrice colonne de $d_a f(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^m$ (relative à la base canonique de $\mathbb{R}^n$) vérifie $\begin{pmatrix} d_a f(x_1, \ldots, x_n)_1 \\ d_a f(x_1, \ldots, x_n)_2 \\ \vdots \\ d_a f(x_1, \ldots, x_n)_m \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} d_a f_1(x_1,\dots,x_n) \\ d_a f_2(x_1,\dots,x_n) \\ \vdots \\ d_a f_m(x_1,\dots,x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) + \cdots + x_n \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)) \\ x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(a) + \cdots + x_n \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(a)) \\ \vdots \\ x_1 \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) + \cdots + x_n \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)) \end{pmatrix} = Jf_a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$\square$

Chapter 2

THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

1 Théorème des accroissements finis

1.1 Théorème des accroissements finis, cas réel

1.1 Théorème. (**Rolle**) *Soit g une application, $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $g(a) = g(b) = 0$, g continue sur $[a,b]$ et g dérivable sur $]a,b[$. Alors, il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c) = 0$.*

1.2 Théorème. *Soit $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.*

Proof. Soit $g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a)$. Alors, on a $g(a) = g(b) = 0$, g continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Du théorème de Rolle, on déduit le résultat. □

1.3 Remarque. Le théorème 1.2 est faux si l'espace d'arrivé n'est pas $\mathbb{R}$. Par exemple, considérons la fonction $f : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (\cos(x), \sin(x))$. Pour tout $x \in [0,2\pi]$, la norme $||f'(x)||_2 = 1$, d'où $f'(x) \neq 0$ pour tout x. Mais alors $f(2\pi) = f(0) = (0,0)$.

1.2 Théorème des accroissements finis, cas général

1.4 Théorème. *Soient $(F, ||\cdot||_F)$ un espace vectoriel normé, $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to F$, $g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, telles que f et g soient continues sur $[a,b]$ et dérivables sur $]a,b[$. On suppose que $\forall x \in]a,b[, ||d_x f||_{L(\mathbb{R},F)} = ||f'(x)||_F \leq g'(x)$. Alors, $||f(b) - f(a)||_F \leq g(b) - g(a)$.*