Universite d'Antananarivo
Domaine Sciences et Technologies
Mention Maths – Info

TD CALCUL DIFF
PAAC

Annee U 2023 – 2024
Semestre 6

I-Les différentielles

Exercice 1
Soit $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||f|| = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$, et $\Phi : E \longrightarrow E$, avec $\Phi(f)(x) = \int_0^1 sin(xt)f(t)dt$. L'application Φ est-elle différentiable ?

Exercice 2
Soit E un espace vectoriel muni d'un produit scalaire réel b. Montrer que b est différentiable et calculer $||b||$.

Exercice 3
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $(M,N) \mapsto MN$ (produit de deux matrices). Calculer $\mathrm{d}_{(M,N)}f$.

Exercice 4
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, définie par $M \mapsto (\mathrm{trM}) \cdot M$ où trM désigne la trace $\sum_{i=1}^n m_{i,i}$ de la matrice $M = (m_{i,j})$. Calculer $\mathrm{d}_M f$.

Exercice 5
Étudier le contre-exemple à la proposition 1.19 donné par la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Exercice 6
Soient $U \subset \mathbb{R}^n$, $V \subset \mathbb{R}^p$ des ouverts, $f : U \to \mathbb{R}^p$, $g : V \to \mathbb{R}^q$ des applications. Supposons $f(U) \subset V$, f différentiable en $x_0 \in U$, g différentiable en $y_0 = f(x_0)$. Déterminer $J(gof)_{x_0}$.

Exercice 7
Soient E et F deux espaces de Banach, et soit φ l'application de $Isom(E;F)$ sur $Isom(F;E)$ définie par $\varphi(f) = f^{-1}$. Alors, $\varphi \in C^1(Isom(E;F); Isom(F;E))$ et on a $\varphi'(f)(u) = -f^{-1} \circ u \circ f^{-1}$.

II-Théorème des accroissements finis

Exercice 8
Étudier le contre-exemple au théorème 2.6 donné par U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ défini par U $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, x^2 + y^2 > 1\}$. et $f : U \to \mathbb{R}$ tel que $f(x,y) = \arctan(y/x)$.

Exercice 9
Montrer que le système $\left\{ \begin{array}{l} x = \frac{1}{2}\cos(x+y) \\ y = \frac{1}{2}\sin(x-y) \end{array} \right.$ admet une solution unique en appliquant le théorème du point fixe.

Exercice 10
Soient E, F deux espaces vectoriels normés, $U \subset E$ un ouvert connexe, et $f : U \longrightarrow F$ une application différentiable. Montrer que si df est constante sur U, alors f est la somme d'une application linéaire continue et d'une constante.

Exercice 11
Soient $I =]a, b[\subset \mathbb{R}$ un intervalle $(a < b)$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, une application dérivable, $k > 0$ et $t_0 \in I$. On suppose que $\forall t \in I$, $||f'(t)|| \leq k||f(t)||$ et $f(t_0) = 0$. Montrer que f est identiquement nulle au voisinage de t_o. En déduire que f est identiquement nulle sur I.